Geschichte

der

Geometrie,

hauptsächlich mit Bezug

auf die neueren Methoden.

Von

Chasles.

Aus dem Französischen übertragen

durch

Dr. L. A. Sohncke,
ord. Professor der reinen Mathematik an der vereinten
Friedrichs - Universität Halle - Wittenberg.

Halle,
Gebauersche Buchhandlung.
1839.

Vorwort
des Uebersetzers.

Indem ich die Uebersetzung des „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne*, par *M. Chasles*, ancien élève de l'école polytechnique; Bruxelles 1837", dem deutschen mathematischen Publicum übergebe, will ich mit wenigen Worten auseinandersetzen, was mich zu dieser Arbeit bewogen hat.

Als mir genanntes Werk zuerst zu Gesicht kam und ich es oberflächlich durchblätterte, sprach mich die eigenthümliche Auffassung der Geometrie in dem rein historischen Theil und die Reichhaltigkeit des Stoffs in den Noten an, und es entstand bei mir die Idee, dasselbe durch eine Uebertragung ins Deutsche allgemeiner zugänglich zu machen. Eine genauere Durchsicht bestärkte mich in meinem Vorsatz, zumal da ich Grund hatte, zu glauben, dass das Original nur wenig in Deutschland bekannt wäre. Denn wenn auch sein Titel nicht fremd bleiben konnte, so dürfte doch der ziemlich

hohe Preis des Originals (14 Rthlr.) Viele von dem Ankauf desselben zurückgehalten und dadurch seine grössere Verbreitung verhindert haben. Es schien mir deshalb nicht unzweckmässig, vielleicht von Manchem erwünscht zu sein, wenn dieselbe Sache gegen ein geringeres Opfer zugänglich gemacht würde.

Gern hätte ich an manchen Stellen, wo ich mit dem Verfasser nicht einverstanden bin, eigene Bemerkungen hinzugefügt, wenn nicht das Buch schon an und für sich so stark geworden wäre und ich durch solche Zusätze den Zweck der Billigkeit verfehlt hätte. Eine eigene Arbeit übrigens, die ich schon längere Zeit unter Händen habe, deren Vollendung aber, wegen der mannigfaltigen dazu erforderlichen Nebenstudien, noch auf längere Zeit hinausgeschoben werden muss, wird vielfach Gelegenheit bieten, auf gegenwärtiges Werk zurückzukommen.

Was die Uebersetzung an sich betrifft, so bitte ich den geneigten Leser, es mit den Worten nicht zu streng zu nehmen. An vielen Stellen hab' ich schon selbst, bei einer letzten Durchsicht, so manche Härten und unzweckmässige Ausdrucksweisen bemerkt: ich hoffe, der Leser wird diese übersehen, wenn er bedenkt, dass wohl Jeder beim Uebersetzen eines Werks, das nur wissenschaftliches Interesse anregen soll, mehr den Inhalt, als die Sprache beachtet.

Halle,
den 5ten August 1839.

L. A. Sohncke.

Inhaltsverzeichniss.

Noten.

In dieser Uebersicht ist es unsre Absicht, eine kurze Analyse der hauptsächlichsten Entdeckungen zu geben, welche die reine Geometrie bis zu dem Grad der Ausdehnung gebracht haben, den sie in unsrer Zeit erlangt hat, besonders derjenigen Entdeckungen, welche die neuen Methoden vorbereitet haben.

Wir bezeichnen sodann unter diesen Methoden diejenigen, an die sich, wie es uns scheint der grösste Theil der zahlreichen neuen Theoreme, womit die Wissenschaft in der letzten Zeit bereichert ist, anknüpfen lassen.

Endlich setzen wir die Natur und den philosophischen Charakter der beiden Hauptprincipien der Ausdehnung auseinander, welche den hauptsächlichsten Gegenstand des Memoires ausmachen. *)

In der Geschichte der Geometrie haben wir fünf Epochen unterschieden. Man wird, nach dem Lesen des Buchs, beurtheilen, ob die besondern Charaktere, welche wir für jede dieser fünf Epochen erkannt haben, diese Eintheilung rechtfertigen können.

Mehre Noten sind dieser geschichtlichen Uebersicht beigefügt. Die Einen sind für die weitere Entwickelung gewisser Stücke bestimmt, die wir im Laufe des Vortrags nur kurz behandeln konnten; Andere liefern einige historische Details, deren Ausdehnung uns nicht gestattete, sie als Marginalbemerkungen zu geben, weil sie die Lectüre gehindert hätten; mehre Andere endlich sind die Frucht unsrer eigenen Untersuchungen über verschiedene Theile der im Text besprochenen Theorien, die vielleicht einige neue Resultate liefern.

Diese dürften nicht unumgänglich nothwendig erscheinen, wenn man nur den historischen Zweck unsrer Arbeit in Betracht zieht. Wir haben aber vornehmlich im Auge gehabt, bei der Schilderung des Ganges der Geometrie und bei der Darstellung ihrer Entdeckungen und

---

*) S. die Anmerkung auf S. 251 dieser Uebersetzung.

neuen Lehren, durch einige Beispiele zu zeigen, dass der Charakter dieser Lehren der ist, in alle Theile der Wissenschaft von der Ausdehnung eine neue Leichtigkeit zu bringen und neue Mittel herbeizuschaffen, um zu einer, bisjetzt noch unbekannten Verallgemeinerung aller geometrischen Wahrheiten zu gelangen; was ebenfalls der eigene Charakter der Analysis, zur Zeit ihrer Anwendung auf die Geometrie, gewesen ist. Auch folgern wir aus unsrer Uebersicht, dass die wesentlichen Hülfsmittel, welche die Geometrie seit dreissig Jahren erlangt hat, in mehrer Hinsicht mit den analytischen Methoden vergleichbar sind, mit denen von nun an diese Wissenschaft, bei einer sehr ausgedehnten Gattung von Fragen, rivalisiren kann.

Diese Idee wird sich wiederholt, wir können sagen, gerechtfertigt finden an mehren Stellen dieser Schrift; weil sie deren Ursprung ist und weil sie bei den langen Untersuchungen, welche die historische Partie, die Noten und die beiden Memoire, woraus dieses Werk zusammengesetzt ist, nöthig machten, nicht aufgehört hat, ihren Vorrang zu hehaupten.

Um jedoch jede falsche Auslegung unsrer Absicht und unsrer Meinung über die beiden Methoden, die sich in das Gebiet der mathematischen Wissenschaften theilen, zu vermeiden, beeilen wir uns auszusprechen, dass unsre Bewunderung für das in unsern Tagen so mächtige analytische Hülfsmittel ohne Grenzen ist und wir nicht in allen Punkten die geometrische Methode mit ihm gleichstellen wollen. Aber davon überzeugt, dass man nie zu viele Erforschungsmittel bei der Aufsuchung mathematischer Wahrheiten haben kann, die alle gleich leicht und anschaulich werden können, wenn man den geraden Weg, der ihnen eigenthümlich und natürlich ist, findet und verfolgt, so haben wir geglaubt, dass es von Nutzen sein kann, so viel es unsre schwachen Mittel gestatten, zu zeigen, dass die Lehren der reinen Geometrie oft und bei einer Menge von Fragen diesen einfachen und natürlichen Weg darbieten, der, bis zum Ursprung der Wahrheiten vordringend, die geheimnissvolle Kette, welche sie unter einander verbindet, offen darlegt und sie einzeln auf das deutlichste und vollständigste kennen lehrt.

Erstes Kapitel.

Erste Epoche.

§. 1. Den Ursprung der Geometrie findet man bei den Chaldäern und Aegyptiern. Der Phönicier Thales ging nach Aegypten, um sich dort auszubilden und liess sich darauf zu Milet nieder, wo er die ionische Schule stiftete, aus welcher die griechischen Philosophen hervorgingen, denen man die ersten Fortschritte der Geometrie zu verdanken hat.

Thales, geb. 639, gest. 548 v. Ch. G.

Pythagoras von Samos, ein Schüler des Thales, ging wie dieser zuerst nach Aegypten und darauf zu den Indiern, zog sich dann nach Italien zurück und gründete hier seine Schule, die weit berühmter geworden ist, als die, aus welcher sie hervorging. Vorzüglich diesem Philosophen und seinen Schülern gebührt der Ruhm der ersten Entdeckungen in der Geometrie, zu deren ausgezeichnetsten die Theorie der *Incommensurabilität* gewisser Linien, wie der Diagonale eines Quadrats im Vergleich mit der Seite desselben und die Theorie der *regulären Körper* gehören. Diese ersten Schritte in der Wissenschaft von den ausgedehnten Grössen bieten im Uebrigen nur einige elementare Sätze dar, die sich auf die gerade Linie und den Kreis beziehen, worunter die merkwürdigsten sind: der Satz von dem *Quadrat der Hypotenuse* eines rechtwinkligen Dreiecks (dessen Erfindung, wie die Geschichte oder die Fabel erzählt, den Pythagoras eine Hekatombe gekostet hat) und die Eigenschaft des Kreises und der Kugel, dass sie unter den Figuren von gleichem Umfang oder von gleicher Oberfläche die *grössten* sind; Sätze, welche den ersten Keim zu der Lehre von den *Isoperimetern* enthalten.

Pythagoras, geb. 580 v. Ch.

§. 2. Die Geometrie blieb so beschränkt bis zur Gründung der platonischen Schule, welches die Epoche ihrer bedeutendsten Fortschritte war.

Plato, 430 — 347 *v. Ch.* Um sich in der Mathematik auszubilden, ging Plato, wie seine Vorgänger in Griechenland es gethan hatten, zu den ägyptischen Priestern und darauf nach Italien zu den Pythagoräern. Nachdem er nach Athen zurückgekehrt war, wurde er das Haupt der Schule und führte in die Geometrie die *analytische Methode* [1]), die *Kegelschnitte* und die Lehre von den *geometrischen Oertern* ein. Diese merkwürdigen Entdeckungen machten aus der Geometrie gewisser Maassen eine neue Wissenschaft, welche im Range höher stand, als die Elementar-Geometrie, wie sie bis dahin betrieben war, und welche von Plato's Schülern *transcendente Geometrie* genannt wurde.

Seit dieser Zeit wurde die Lehre von den geometrischen Oertern [2]) auf höchst geschickte Weise auf die berühmten Probleme von der *Verdoppelung des Kubus*, von den *zwei mittlern Proportionalen* und von der *Dreitheilung des Winkels* angewandt.

---

1) Die folgende Erklärung von *Analysis* und *Synthesis*, wie sie Vieta im Anfang seiner *Isagoge in artem analyticam* gegeben hat, characterisirt vollständig die beiden Methoden der Alten. Er sagt: „es giebt in der Mathematik eine Methode zur Erforschung der Wahrheit, von der Plato für den Erfinder gehalten wird und welche Theon Analysis nannte und folgender Maassen definirt hat: *Man betrachte die gesuchte Sache als gegeben und gehe von Folgerung zu Folgerung, bis man die gesuchte Sache als wahr erkennt.* Die Synthesis dagegen ergiebt sich als das *Ausgehn von einer gegebenen Sache, um durch Folgerung aus Folgerung zur Auffindung einer gesuchten Sache zu gelangen.*"

2) Man nennt in der Geometrie einen *Ort* die Aufeinanderfolge von Punkten, deren jeder eine vorgelegte Aufgabe löst oder deren jeder sich einer gewissen Eigenschaft erfreut, welche keinem andern Punkte ausserhalb dieses Ortes zukommt. Die Alten theilen die geometrischen Oerter in verschiedene Klassen. Sie nennen *ebene Oerter* die gerade Linie und die Kreislinie, weil sie in der Ebene erzeugt werden, *körperliche Oerter* die Kegeschnitte, weil man sich deren Entstehung auf einem Körper dachte, endlich *lineäre Oerter* alle Curven höherer Ordnungen, wie die Conchoide, Cissoide, Spirale und Quadratrix. Ebenso nannte man *Orts-Theorem* ein solches, in welchem es sich um den Beweis handelt, dass eine Aufeinanderfolge von Punkten einer geraden oder krummen Linie den Bedingungen eines aufgestellten Satzes genügen, und ein *Orts-Problem* eine Aufgabe, in welcher gefordert wird, dass aus einer Aufeinanderfolge von Punkten jeder eine vorgegebene Bedingung erfüllt.

Das erste dieser Probleme, durch seine Schwierigkeit, so wie durch seine fabelhafte Veranlassung bekannt, hatte schon früher die Geometer beschäftigt. Der durch die Quadratur seiner *lunulae* hinlänglich bekannte Hippocrates von Chios hatte es auf die Aufsuchung der beiden mittlern Proportionalen zwischen der Seite des gegebenen Kubus und dem Doppelten dieser Seite zurückgeführt, so dass hierdurch wahrscheinlich Veranlassung zu dem allgemeinen Problem der zwei mittlern Proportionalen gegeben wurde. Letzteres wurde auf sehr verschiedene Arten gelöst, welche aber sämmtlich den Geometern des Alterthums Ehre machten. Die erste Lösung gehört Plato an, welcher dazu ein Instrument anwandte, das aus einem Winkelmaass bestand, auf dessen einem Schenkel sich eine gerade Senkrechte so bewegen liess, dass sie parallel mit dem andern Schenkel blieb: unstreitig das erste Beispiel von der mechanischen Auflösung eines geometrischen Problems.

Hippocrates v. Chios, um 450 v. Ch.

Menächmus, ein Schüler Plato's, bediente sich zu demselben Zweck der geometrischen Oerter, nämlich entweder zweier Parabeln, die einen gemeinschaftlichen Scheitel hatten und deren Axen senkrecht auf einander standen, oder auch einer Parabel und einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Menächmus.

Eudoxus, ein anderer Schüler und Freund Plato's, wandte gewisse andere Curven an, welche er besonders zu diesem Zwecke erfunden hatte; unglücklicher Weise aber ist seine Lösung nicht auf uns gekommen und wir wissen auch nicht, welche seine Curven waren.

Die Auflösung des berühmten Pythagoräers Archytas, dessen Vorlesungen Plato in Italien gehört hatte, war rein speculativ. Sie ist dadurch merkwürdig, dass dabei von einer Curve doppelter Krümmung Gebrauch gemacht wird, welche die erste zu sein scheint, die überhaupt von den Geometern betrachtet wurde, wenigstens ist sie die älteste, welche bis zu uns gelangt ist[3]).

Archytas.

---

3) Die Beschreibung dieser Curve ist folgende: „Ueber einem Durchmesser der Basis eines geraden Kreiscylinders denke man sich einen Halbkreis beschrieben, dessen Ebene senkrecht auf *der* der Cylinder-Basis steht; den Durchmesser drehe man um einen seiner Endpunkte und führe bei dieser Kreisbewegung zugleich den Halb-

Die vier hier angeführten Lösungen des Problems der beiden mittlern Proportionalen sind, wie man sieht, wesentlich von einander verschieden. Dasselbe Problem beschäftigte noch viele Jahre hindurch die Geometer, wodurch sich natürlich die Auflösungen davon vermehrten. Eutocius, ein Mathematiker des sechsten Jahrhunderts, führt in seinem Commentar zum 2ten Buch *über Kugel und Cylinder von Archimedes* die des Eratosthenes, Apollonius, Nicomedes, Hero, des Byzantiners Philo, des Pappus, Diocles und Sporus an. Alle diese Mathematiker werden wir in chronologischer Ordnung erwähnen.

§. 3. Die vorzüglichen von Plato und seinen Schülern angedeuteten Methoden wurden von ihren Nachfolgern mit Eifer bearbeitet und bildeten den Gegenstand mehrer beachtungswerthen Werke, in welchen die Haupteigenschaften der Kegelschnitte entwickelt wurden, dieser berühmten Curven, welche 2000 Jahre später eine so bedeutende Rolle in der Mechanik des Himmels spielten, nachdem Kepler sie für die wahren Bahnen erkannt hatte, welche von den Planeten und ihren Trabanten durchlaufen werden, und nachdem Newton in ihren Brennpunkten diejenigen Punkte entdeckt hatte, in welchen die Kräfte sich befinden, die alle Körper des Weltsystems bewegen.

Aristäus, um 450 v. Ch.

Das hauptsächlichste dieser Werke war das des Aristäus, welches fünf Bücher über die Kegelschnitte enthielt und von dem die Alten mit ausserordentlichem Lobe sprechen. Leider aber ist von diesen eben so wenig Etwas auf uns gekommen, als von den fünf Büchern über die körperlichen Oerter von demselben Geometer[4]).

---

kreis so mit herum, dass seine Ebene beständig senkrecht auf der Basis des Cylinders steht; dieser Halbkreis wird in jeder seiner Lagen die Oberfläche des Cylinders in einem Punkte treffen: die Aufeinanderfolge dieser Punkte bildet die in Rede stehende Curve doppelter Krümmung."

Um das Problem der beiden mittlern Proportionalen zu lösen, schneidet Archytas diese Curve durch einen Kegel, der durch Umdrehung um *die* Seitenlinie des Cylinders entsteht, welche durch den festen Endpunkt des Durchmessers des beweglichen Halbkreises gezogen ist: der Durchschnittspunkt giebt die gesuchte Lösung.

4) Diese fünf Bücher über die körperlichen Oerter, von welchen Pappus in dem 7ten Buche seiner mathematischen Sammlungen spricht, sind nach dieser Angabe durch Viviani unter dem Titel: *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae aucutore* V i n c e n t i o V i-

§. 4. Ungefähr in dieselbe Epoche fällt die Entdeckung der Quadratrix des Dinostratus. *Dinostratus.* Diese Curve, welche vermöge ihrer Haupteigenschaft zur Theilung eines Winkels in eine Anzahl von Theilen, die gegebenen Linien proportional sind, geeignet ist, scheint zur Lösung des in der Schule Plato's behandelten Problems von der Trisection des Winkels erfunden zu sein. Sie würde auch das Problem über die Quadratur des Kreises lösen, wenn man sie geometrisch construiren könnte; und gerade diese Eigenschaft hat ihr bei den Alten den Namen der Quadratrix erworben. Nach Pappus scheint diese Eigenschaft von Dinostratus, dem Bruder des Menächmus, gefunden zu sein, weshalb die Neuern diese Curve die Quadratrix des Dinostratus genannt haben. Indess scheint aus zweien Stellen des Proclus [5]) hervorzugehen, dass Hippias, ein Geometer und Philosoph, der zur Zeit Plato's lebte, der wahre Erfinder derselben gewesen sei und auch deren Eigenschaften bewiesen habe [6]).

§. 5. In diese ersten Zeiten der Geometrie scheint auch noch Perseus gesetzt werden zu müssen, der durch die Erfindung der *Schneckenlinien* einige Berühmtheit erlangt hat. *Perseus.* Er bildete diese Curven, indem er die ringförmige Oberfläche oder den *torus*, welcher durch die Umdrehung eines Kreises um eine feste Axe, die in derselben Ebene liegt, entsteht, mit einer andern Ebene schnitt.

Es ist uns über diesen Gegenstand keine andre Nachricht geblieben, als eine Stelle von Proclus in seinem

---

viani, etc. (in fol. Florenz, 1701.) ganz in der Weise der alten Geometrie restituirt worden. Schon im Jahr 1659 hatte derselbe Viviani das 5te Buch der Kegelschnitte des Apollonius restituirt, von denen man damals nur die 4 ersten Bücher hatte und welches zugleich mit dem 6ten und 7ten Buch durch Borelli aufgefunden wurde, als gerade Viviani sein Werk beendigt hatte.

5) Siehe den 9ten Satz des 3ten Buchs und den Anfang des 4ten Buchs im Commentar des Proclus zum 1sten Buch des Euclid.

6) Ein mit der alten Geometrie sehr vertrauter Geometer des 17ten Jahrh., Leotaud, hat über diese Curve eine Schrift herausgegeben, in der er eine grosse Menge von vorzüglichen Eigenschaften derselben aufdeckt, welche dem Titel des Werks: *Liber in quo mirabiles quadratricis facultates variae exponuntur*, entsprechen. Der Verf. vergleicht sie mit der Spirale des Archimedes und mit der Parabel, wendet sie zur Bestimmung des Schwerpunkts an, erkennt an ihr unendliche Aeste u. s. w. Johann Bernoulli hat ebenfalls einige Eigenschaften dieser Curven entdeckt. (S. Th. I. S. 447 seiner Werke und Th. II. S. 176 u. 179 seines Briefwechsels mit Leibnitz.)

Commentar zum ersten Buch des Euclid [7]), wo er die Erzeugung dieser Curven in der ringförmigen Oberfläche deutlich beschreibt und die Erfindung derselben dem Perseus zuspricht. Einige Zeilen später fügt er noch hinzu, dass auch Geminus über die Schneckenlinien geschrieben habe, welcher Ausspruch ein Document von Wichtigkeit ist, weil es die Priorität des Perseus vor dem Geminus beweist. Von letzterem weiss man aber, dass er um die Zeit des Hipparch, in den beiden ersten Jahrhunderten vor der christlichen Zeitrechnung lebte. Dass die Schriften von Perseus und Geminus nicht auf uns gekommen sind, ist sehr zu bedauern, denn es müsste sehr interessant sein, ihre geometrische Theorie dieser Schneckenlinien kennen zu lernen, da es Curven vom vierten Grade sind, welche heut zu Tage die Gleichungen der Oberflächen und einen schwierigen analytischen Calcul zu erfordern scheinen. (S. Note I.)

Euclid, 285 v. Ch.

§. 6. Euclid, der berühmte Verfasser der Elemente der Geometrie, bildete das Band zwischen der platonischen Schule, in welcher er gebildet war, und der neu entstandenen zu Alexandrien. Schon viele griechische Geometer vor Euclid hatten über die Elemente der Geometrie geschrieben. Proclus, der uns ihre Namen überliefert hat, zeichnet unter ihnen folgende aus: Hippocrates von Chios, Leo, dessen Werk vollständiger und brauchbarer war, als das des vorhergehenden; Theudius von Magnesia, empfehlenswerth wegen der Ordnung, welche er in seine Abfassungsweise gebracht hatte; Hermotimus von Colophon, welcher die Entdeckungen des Eudoxus und Thötetes vervollkommnete und auch vieles Eigene zu den Elementen hinzufügte. Bald darauf trat Euclid auf, welcher, wie Proclus sagt, „die Elemente sammelte, viele von den durch Eudoxus gefundenen Sachen in die gehörige Ordnung brachte, das, was Thötetes angefangen hatte, vollendete und das, was vor ihm nur leichthin angedeutet war, streng bewies.“ [8])

Euclid führte in die Elemente der Geometrie die Methode ein, welche unter dem Namen *Reductio ad absur-*

---

7) Ueber die vierte Definition des Euclid. — Proclus spricht auch über die Schneckenlinie in seinem Commentar zur 7ten Definition und im Anfang seines 4ten Buchs, wo er sie noch die Schneckenlinie des Perseus nennt.

8) Proclus, 2tes Buch, 4tes Kap. in seinem Commentar über das 1ste Buch des Euclid.

dum bekannt ist und welche in dem Nachweis besteht, dass jede Annahme, welche dem ausgesprochenen Satze zuwiderläuft, auf einen Widerspruch führt; eine Methode, welche vorzüglich bei jenen Untersuchungen von Nutzen ist, wo sich das Unendliche unter der Form von Irrationalgrössen darstellt. Archimedes bediente sich derselben in den meisten seiner Werke, und Apollonius machte von ihr in seinem 4ten Buche über die Kegelschnitte ebenfalls einen glücklichen Gebrauch, so wie auch die neuern Geometer da grossen Nutzen aus ihr gezogen haben, wo die Wissenschaft noch nicht weit genug vorgeschritten war, um directe Beweise liefern zu können, welche allein eine Wahrheit zur vollen Evidenz bringen und dem Geiste ganz genügen.

Die Elemente des Euclid enthalten 13 Bücher, mit welchen man gewöhnlich noch zwei andere über die fünf regelmässigen Körper verbindet, die dem Alexandriner Hypsicles zugeschrieben werden, der um 150 Jahre jünger ist als Euclid.

„Man erhält eine richtige Vorstellung von dem ganzen Werke, wenn man sich dasselbe aus vier Theilen zusammengesetzt denkt. Der erste umfasst die 6 ersten Bücher und zerfällt wieder in drei Unterabtheilungen, nämlich: Beweis der Eigenschaften gegebener Figuren, auf absolute Weise behandelt, und enthalten in den Büchern 1, 2, 3, 4, ferner Theorie der Verhältnisse von Grössen im Allgemeinen im 5ten Buch, und endlich Anwendung dieser Theorie auf ebene Figuren. Der zweite Theil besteht aus den Büchern 7, 8, 9, welche man mit dem Beinamen, die *arithmetischen*, benannt hat, weil sie die allgemeinen Eigenschaften der Zahlen behandeln. Der dritte Theil wird von dem 10ten Buche allein gebildet, in welchem der Verfasser die incommensurabeln Grössen im Detail betrachtet. Der vierte Theil endlich, welcher die 5 letzten Bücher enthält, behandelt die Flächen und Körper. Von diesem grossen Lehrbuch hat man nur die 6 ersten Bücher und das 11te und 12te in den Unterricht gezogen." [9])

§. 7. Diesen seinen *Elementen* verdankt Euclid die Berühmtheit seines Namens, obwohl es nicht das einzige

9) Wir entlehnen diese Auseinandersetzung der Elemente des Euclid aus der vortrefflichen Notiz von Lacroix in der *Biographie universelle.*

seiner Werke ist, welches Bewunderung verdient. Dieser grosse Geometer hatte die Grenzen der Wissenschaft durch mehre andre Schriften erweitert, welche ihm nicht weniger Ehre machen würden, wenn sie bis zu uns gelangt wären. Nur eines von ihnen, aber gerade das am wenigsten bedeutende, ist uns unter dem Titel *δεδόμενα* bekannt. Es ist eine Fortsetzung der Elemente und dazu bestimmt, deren Gebrauch und Anwendung auf alle Aufgaben, die in das Gebiet der Geometrie gehören, zu erleichtern. Euclid nennt hier *gegeben* alles das, was aus den Bedingungen einer Aufgabe unmittelbar vermöge der in seinen Elementen enthaltenen Sätze folgt. Wenn man z. B. von einem gegebenen Punkte eine Gerade zieht, welche einen der Lage nach gegebenen Kreis berührt, so ist diese Gerade der Lage und Grösse nach gegeben. (Satz 91 in den *Datis* des Euclid.)

Die alten Geometer und auch die des Mittelalters haben bei allen ihren geometrischen Untersuchungen die Sätze der *Data* ebenso wie die der Elemente citirt; selbst Newton macht in seinen Principien von diesen ebenso wie von den Kegelschnitten des Apollonius Gebrauch. Seit dieser Zeit aber sind solche Spuren des Alterthums aus den Schriften der Geometer verschwunden und das Buch der *Data* ist kaum denen bekannt, die sich mit der Geschichte der Wissenschaft beschätigen. [10])

Man kann aus einigen Sätzen der *Data* mit Leichtigkeit die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades ableiten, welche man bei den Alten nur erst im Diophantus findet, welcher 600 Jahre nach Euclid lebte. Ein Beispiel hiervon ist folgender Satz: „Wenn zwei Gerade

---

10) Euclid bedient sich in seinen *Datis* eines Ausdrucks, der in seinen Schlüssen störend erscheint und dessen Sinn selbst in der Definition, die er davon giebt, schwer zu fassen ist. Da sich derselbe Ausdruck im Apollonius und Pappus findet und auch noch in Werken des vorigen Jahrhunderts gebraucht wird, so halten wir es für passend, seiner hier zu erwähnen. Euclid sagt: Eine Grösse ist grösser in Bezug auf eine andere um eine *gegebene*, *was das Verhältniss betrifft*, wenn nach Abzug der gegebenen Grösse der Rest zu der andern ein gegebenes Verhältniss hat (11te Def. in den *Datis*). Sei etwa A grösser als B um eine in Betreff eines Verhältnisses und sei c diese gegebene und μ das Verhältniss, so hat man $\frac{A-c}{B}=\mu$.

Euclid wollte, wie man sieht, eine Gleichung mit drei Termen unter der Form einer Gleichheit zweier Glieder darstellen.

unter einem gegebenen Winkel einen gegebenen Raum fassen und wenn ihre Summe gegeben ist, so wird jede von ihnen gegeben sein.[11]

Das 13te Buch der Elemente, welches von der Einbeschreibung der regelmässigen Polygone und Polyeder in den Kreis und die Kugel handelt, enthält nach dem 5ten Satz folgende Erklärung von Analysis und Synthesis.

„In der Analysis nimmt man das Geforderte als zugestanden an und kommt dann hierdurch zu einer Wahrheit, welche zugestanden ist.“

„In der Synthesis nimmt man das, was zugestanden ist, und kommt von diesem zum Schluss oder zu der Kenntniss dessen, was verlangt ist.“

Mehre hierauf folgende Sätze sind nach der analytischen und auch nach der synthetischen Methode behandelt.

§. 8. Unter den nicht auf uns gekommenen Werken des Euclid haben wir hauptsächlich zu bedauern: vier Bücher über die Kegelschnitte, deren Theorie durch ihn beträchtlich erweitert wurde, dann vier Bücher über die Oerter auf der Oberfläche[12]), und endlich drei Bücher Porismen. Nach der Vorrede zum 7ten Buch der mathematischen Sammlungen von Pappus scheint es, dass die Porismen sich durch einen tiefen eindringenden Geist ausgezeichnet haben und dass sie zur Lösung der schwierigsten Probleme brauchbar gewesen sind. (*Collectio artificiosissima multarum rerum, quae spectant ad analysin difficiliorum et generalium problematum.*) Die 38 Hülfssätze, welche dieser gelehrte Commentator uns zum Verständniss der Porismen hinterlassen hat, beweisen, dass diese solche Eigenschaften der geraden Linie und des Kreises vollständig enthalten haben, welche in der neuern Geometrie die Theorie der Transversalen liefert.

---

11) Dieser Satz enthält die Lösung der beiden Gleichungen $xy = a^2$ und $x + y = b$, welche unmittelbar die Gleichung vom zweiten Grad $x^2 - bx + a^2 = 0$ geben. Die Lösung der Aufgabe bei Euclid giebt die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung.

Ein andrer Satz (der 87ste) löst die beiden Gleichungen $xy = a^2$ und $x^2 - \mu y^2 = b^2$, deren Wurzeln durch eine Gleichung des vierten Grades, die auf eine quadratische reducirbar ist, erhalten werden.

12) In Note II. wollen wir einige Conjecturen über dieses Werk des Euclid versuchen, welches man wieder herzustellen bis jetzt noch nicht unternommen hat.

Pappus und Proclus sind die einzigen Geometer des Alterthums, welche der Porismen Erwähnung thun, aber schon zur Zeit des erstern hatte sich die Bedeutung des Wortes πόρισμα geändert und seine so wie des Proclus Erklärungen davon sind dunkel, so dass es für die Neuern ein schwierige Aufgabe war, zu entscheiden, worin der genaue Unterschied bestanden hat, den die Alten zwischen Theorem und Problem einerseits und der dritten Gattung von Sätzen, Porismen genannt, machten und besonders zu bestimmen, was die Porismen des Euclid waren.

Pappus führt uns zwar dreissig Sätze an, welche zu den Porismen gehörten, diese sind aber so kurz abgefasst und durch Lücken und durch das Fehlen der Figuren so unvollständig geworden, dass der berühmte Halley, der gewiss in der alten Geometrie hinlänglich bewandert war, dennoch gesteht[13]), dass er nichts davon begreife und dass bis um die Mitte des letzten Jahrhunderts noch kein Satz restituirt war, obwohl die verdientesten Geometer diese Materie zum Gegenstand ihrer Untersuchungen gemacht haben. (S. Note III.)

R. Simson hatte den Ruhm, die Bedeutung mehrer dieser räthselhaften Sätze, so wie auch die Form der Abfassung, welche dieser Gattung von Sätzen eigenthümlich ist, aufzudecken. Die Erklärung, welche dieser Geometer von den Porismen gegeben hat, ist folgende: „Ein Porisma ist ein Satz, in welchem ausgesprochen wird, dass man gewisse Dinge bestimmen könne und in welchem man sie auch wirklich bestimmt, wenn deren Beziehung zu festen und bekannten und auch zu solchen Dingen gegeben ist, welche bis ins Unendliche variirt werden dürfen; wobei diese letztern durch eine oder mehrere Relationen unter einander verbunden sind, welche das Veränderungsgesetz, dem sie unterworfen sind, bilden." Es seien z. B. zwei feste Axen gegeben und man fälle von jedem Punkte einer Geraden Perpendikel p und q auf diese Axen, so wird man eine solche Linie a und ein solches Verhältniss α finden können, dass man zwischen den beiden Perpendikeln die constante Relation $\frac{p-a}{q} = \alpha$ erhält. (Nach der Weise der Alten wird dieser Satz so

13) Note von Halley zum Texte des Pappus über die Porismen, wieder aufgenommen zugleich mit der Vorrede zum 7ten Buch der mathematischen Sammlungen, im Anfange der Abhandlung über Apollonius *de sectione rationis*, in 4to, 1706.

ausgesprochen: Das erste Perpendikel wird grösser in Bezug auf ein zweites um eine gegebene Grösse in Betreff eines Verhältnisses.)

Hier sind die gegebenen festen Dinge die beiden Axen, die veränderlichen sind die beiden Perpendikel p und q, das gemeinsame Gesetz, dem die beiden veränderlichen Dinge unterworfen sind, ist dieses, dass der veränderliche Punkt, von welchem aus die Perpendikel gefällt werden, einer gegebenen geraden Linie angehört, die gesuchten Dinge endlich sind die Linie a und das Verhältniss α, welche zwischen den festen und veränderlichen Dingen die vorgeschriebene Relation bilden.

Dieses Beispiel reicht hin, die Natur der Porismen zu erkennen, wie sie R. Simson, dessen Vorstellungsart seitdem allgemein angenommen ist, aufgefasst hat. Inzwischen müssen wir hinzufügen, dass nicht alle Geometer das von Simson Gegebene als die richtige Idee dessen, was Euclid geliefert, anerkennen. Obgleich wir für unsere Person die Meinung des berühmten Professors von Glasgow annehmen, so müssen wir dennoch sagen, dass wir in seiner Arbeit nicht die vollständige Lösung des grossen Räthsels der Porismen gefunden haben. Diese Aufgabe ist in der That zusammengesetzt und jeder ihrer verschiedenen Theile verlangt eine Lösung, welche man vergebens in der Arbeit von Simson sucht. So muss man nothwendig darnach fragen:

1) Welches ist die Form in der Aussprache dieser Porismen?

2) Wie waren die Sätze, welche das Werk des Euclid enthielt und besonders die, von welchen uns Pappus eine, wenn auch nur sehr unvollständige Andeutung zurückgelassen hat?

3) Welche war die Absicht und der philosophische Grund bei Euclid, als er dieses Werk in so ungewöhnlicher Form abfasste?

4) In welcher Hinsicht verdiente dieses Werk die besondere Auszeichnung, welche ihm Pappus vor den übrigen Werken des Alterthums zu Theil werden lässt? denn in der Ausdrucksweise eines Theorems allein besteht weder das Verdienst noch die Nützlichkeit.

5) Welche sind die Methoden oder heutigen Operationen, die sich unter einer andern Form am meisten den Porismen des Euclid anschliessen, und was ersetzt sie in der Lösung der Probleme? denn man kann doch nicht

annehmen, dass eine so schöne und fruchtbare Doctrin gänzlich aus der Wissenschaft verschwunden sein sollte.

6) Endlich wäre es nöthig, eine genügende Erklärung von den einzelnen Stellen des Pappus über diese Porismen zu geben, z. B. von der, wo er sagt, dass die Neuern die Bedeutung des Wortes geändert hätten, da sie nicht Alles durch sich selbst finden oder gewisser Maassen porismiren konnten. Hätte nun ein Porisma nur in der Art des Ausdrucks bestanden, wie es aus der Abhandlung von R. Simson hervorzugehen scheint, so war es jeder Zeit leicht, alle Sätze, welche dessen fähig waren, zu porismiren, und man sieht nicht ein, wie die Neuern darin Schwierigkeiten finden konnten, welche sie nöthigten die Bedeutung des Wortes zu ändern.

Wir wollen jetzt diese Betrachtungen über die Lehre von den Porismen verlassen und da der Gegenstand wegen der Beziehung zu jenen Theorien, die den Hauptgegenstand der heutigen Geometrie bilden, hinreichendes Interesse zu haben scheint, die Fortsetzung dieses Paragraphen in der dritten Note geben, wo wir zugleich einige neue Ideen über diese grosse Frage der Porismen versuchen werden.

Archimedes, 287—212 *v. Ch.*

§. 9. Bald nach Euclid bezeichnen zwei Männer von wunderbarer Geisteskraft, Archimedes und Apollonius, die grösste Epoche der Geometrie bei den Alten. Ihre zahlreichen Entdeckungen in allen Theilen der mathematischen Wissenschaft haben zu mehren Theorien den Grund gelegt, welche heute zu den wichtigsten gehören.

Die Quadratur der Parabel, welche Archimedes auf zwei verschiedene Arten gab, war das erste Beispiel der genauen Quadratur einer Fläche, die zwischen geraden Linien und einer Curve liegt.

Hinlänglich bekannt ist, dass die Spiralen, das Verhältniss ihrer Fläche zu der des Kreises, die Art an ihnen Tangenten zu ziehen, die Bestimmung des Schwerpunkts eines parabolischen Sectors, der Ausdruck für das Volumen der Segmente von Sphäroiden und parabolischen und hyperbolischen Conoiden [14]), das Verhältniss der Kugel

---

14) Archimed nennt *Sphäroide* diejenigen Körper, welche durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre grosse und kleine Axe, und *Conoide* die, welche durch die Umdrehung einer Parabel oder Hyperbel um ihre Axe erzeugt werden.

zum umgeschriebenen Cylinder, das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser und noch viele andere Entdeckungen von Archimed sind; und zwar Entdeckungen, die stets merkwürdig bleiben wegen der Neuheit und Schwierigkeit, welche sie damals darboten, und weil sie grossen Theils der Keim zu nachfolgenden vorzüglich in *den* Theilen der Geometrie wurden, welche die Messung der Curven und Oberflächen behandeln und welche die Betrachtung des Unendlichen erfordern.

Die Untersuchung über das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser war das erste Beispiel, dass ein Problem durch *Näherung* gelöst wurde; ein so höchst nutzreiches Beispiel, welches eben so oft in der algebraischen Rechnung als bei geometrischen Constructionen Vortheil gewährt.

§. 10. Das Verfahren, welches Archimed zum Beweis dieser neuen und schwierigen Wahrheiten anwandte, ist dem Wesen nach die *Exhaustionsmethode*, welche darin besteht, die gesuchte Grösse z. B. einer Curve als die Grenze zu betrachten, welcher sich in- und umbeschriebene Polygone immer mehr nähern, wenn man die Anzahl der Seiten durch Halbirungen vervielfältigt, so dass der Unterschied kleiner wird als irgend eine gegebene Grösse. Man *erschöpft* gleichsam auf diese Weise die Differenz; woher der Name der Exhaustionsmethode. Diese beständige Annäherung unter den Polygonen und der Curve giebt von letzterer eine mehr und mehr genaue Vorstellung, und wenn man dem Gesetz der Continuität folgt, gelangt man zu der gesuchten Eigenschaft. Endlich beweist man noch, dass das auf diese Art erhaltene Resultat in voller Strenge richtig sei, indem man die *reductio ad absurdum* anwendet.

Man hat oft gesagt, dass die Alten die Curven als Polygone von unendlich vielen Seiten betrachtet haben. Dieses Prinzip jedoch erscheint niemals in ihren Schriften und würde auch durchaus nicht mit der Strenge ihrer Beweise zusammenpassen: nur die Neuern haben es in die Geometrie eingeführt und dadurch die Beweise der Alten vereinfacht. Diese glückliche Idee bildete den Uebergang von der Exhaustionsmethode zur Infinitesimal-Rechnung.

Ebenso hat man behauptet, dass die Methode des Archimedes verwickelt und schwer zu verstehen sei, und sich dabei auf das Zeugniss des Boulliaud, eines ziemlich gewandten Geometers des 17ten Jahrhunderts, gestützt,

welcher sagt, dass er die Beweise in dem Werke über die Spiralen nicht habe ordentlich verstehen können. Aber diese Meinung ist geradezu dem Urtheil der Alten entgegen, welche durch die bewunderungswürdige Ordnung und Klarkeit, die Euclid in die Geometrie eingeführt hatte, die gerechtesten Richter in dieser Sache werden mussten; und um sie noch mit der eigenen Meinung der Neuern zu widerlegen, genügt es anzuführen, dass auch das Urtheil des Galiläi und Maclaurin, welche die Werke des Archimedes genau studirt hatten, dagegen streitet: „Es ist wahr, sagt Maclaurin, dass man geglaubt hat, noch mehre Sätze als Vorbereitung zum Beweise der Hauptsätze bilden zu müssen, wodurch seine Methode lästig erscheint. Aber die Anzahl der Schritte ist nicht der grösste Fehler, den ein Beweis haben kann, man muss nur prüfen, ob sie zu einem vollständigen und bündigen Beweise nothwendig sind." (*A treatise of fluxions.* Einleitung.)

F. Peyrard, der in unserer Zeit derjenige Gelehrte zu sein scheint, welcher die Werke der vier grossen Geometer des Alterthums, Euclid, Archimed, Apollonius und Pappus, in all ihren Theilen am gründlichsten untersucht und sie übersetzt und erklärt hat, sagt ausdrücklich: „Archimed ist in der That nur für die schwer, welche mit der Methode der Alten nicht vertraut sind, er ist dagegen klar und leicht zu verfolgen, wenn man jene studirt hat." [15])

Apollonius, um 247 v. Ch. §. 11. Apollonius schrieb über die Kegelschnitte ein Werk in 8 Büchern. Die vier ersten enthielten Alles, was schon vor ihm über diesen Gegenstand geschrieben war, nur in einzelnen Theilen erweitert und verallgemeinert, was damals die *Elemente der Kegelschnitte* genannt wurde; die vier andern enthalten die eigenen Erfindungen dieses grossen Geometers.

Apollonius war der erste, welcher die Kegelschnitte an einem schiefen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche betrachtete: denn bis dahin hatte man nur einen geraden oder Drehungs-Kegel dazu gewählt und noch dazu die schneidende Ebene immer senkrecht auf einer Seitenlinie des Kegels angenommen, so dass man drei Kegel mit verschiedenem Scheitelwinkel anwenden musste, um die drei Kegelschnitte zu erhalten. Man bezeichnete diese

15) Vorrede zur Uebersetzung der Werke des Archimedes.

Curven durch die Ausdrücke: *Schnitt* eines *spitzwinkligen*, eines *stumpfwinkligen* und eines *rechtwinkligen Kegels*, die Namen *Ellipse*, *Hyperbel* und *Parabel* erhielten sie erst in dem Werke des Apollonius. [16])

Das ganze gelehrte Werk gründet sich beinahe nur auf eine einzige Eigenschaft der Kegelschnitte, welche sich unmittelbar aus der Natur des Kegels ableitet, auf dem diese Curven gebildet werden. Diese Eigenschaft, welche die neuern Werke meistentheils ignoriren, verdient es, dass wir sie hier mit anführen, da sie der Schlüssel zur gesammten Doctrin der Alten und zum Verständniss ihrer Schriften durchaus nothwendig ist.

Denkt man sich einen schiefen Kegel, dessen Basis ein Kreis ist und zieht man vom Scheitel eine gerade Linie nach dem Mittelpunkt der Grundfläche, so heisst diese Linie die *Axe* des Kegels. Die Ebene, welche man durch die Axe senkrecht zur Grundfläche legt, schneidet den Kegel in zwei Seitenlinien und den Kreis in einem Durchmesser; dieses Dreieck, welches den Durchmesser zur Basis und die Seitenlinien zu Seiten hat, wird das *Axendreieck* genannt. Apollonius nimmt zur Bildung der Kegelschnitte die schneidende Ebene senkrecht auf der Ebene des Axendreiecks an. Die Punkte, in denen die Ebene die Seiten des Dreiecks trifft, sind die *Scheitel* der Curve, und die Gerade, welche diese beiden Punkte verbindet, ein *Durchmesser*. Apollonius nennt diesen Durchmesser *latus transversum*. Auf der Ebene des Axendreiecks errichte man in einem der Scheitel der Curve ein Perpendikel, dessen bestimmte Länge hernach angegeben werden soll, von dem Endpunkte dieses Perpendikels ziehe man eine gerade Linie nach dem andern Scheitel und errichte in irgend einem Punkte des Durchmessers der Curve eine senkrechte Ordinate, dann ist das Quadrat dieser Ordinate, vom Durchmesser bis zur Curve gerechnet, gleich einem Rechteck, welches construirt wird aus dem Theile der Ordinate, der zwischen dem Durchmesser und der Geraden liegt, und aus dem Theile des Durchmessers, welcher zwischen dem ersten Scheitel und dem Fusspunkt der Ordi-

16) Die beiden Worte *Ellipse* und *Parabel* waren schon Archimed bekannt. Das erste findet sich in dem Titel einer seiner Abhandlungen (Ueber die Quadratur der Parabel), obgleich es niemals im Texte vorkommt; das zweite wird zuerst im 9ten Satze seines Buches über Conoide und Sphäroide gebraucht.

nate enthalten ist. Dieses ist die ursprüngliche und characteristische Eigenschaft, welche Apollonius für die Kegelschnitte entdeckt hat, und von welcher aus er durch äusserst gewandte Transformationen und Ableitungen beinahe zu allen übrigen gelangt. Sie spielt, wie man sieht, in seiner Hand beinahe dieselbe Rolle, als die Gleichung vom zweiten Grade mit zwei Veränderlichen in dem System der analytischen Geometrie von Descartes.

Man sieht hieraus, dass der Durchmesser der Curve und das Perpendikel, welches in einem seiner Endpunkte errichtet wird, zur Construction der Curve hinreichen. Diese beiden Elemente sind es, auf welche die Alten ihre Theorie der Kegelschnitte gründen. Das in Rede stehende Perpendikel wurde *latus erectum* genannt, welches die Neuern in den lange Zeit hindurch gebrauchten Namen *latus rectum* umwandelten, bis dieser endlich durch *Parameter* ersetzt wurde, wobei es geblieben ist. Apollonius und die Geometer nach ihm geben verschiedene geometrische Constructionen an dem Kegel selbst an, um die Länge des *latus rectum* zu bestimmen, aber keine scheint so einfach und so elegant zu sein, als die von Jacob Bernoulli. Dieser sagt: „Man lege eine Ebene parallel mit der Grundfläche des Kegels in derselben Entfernung von dessen Scheitel, in welcher die Ebene des vorgegebenen Kegelschnitts von diesem absteht; diese Ebene wird den Kegel in einem Kreise schneiden, dessen Durchmesser das *latus rectum* des Kegelschnitts sein wird." [17])

Hieraus leitet man ohne Mühe die Art ab, wie man einen gegebenen Kegelschnitt auf einen ebenfalls gegebenen Kegelschnitt aufträgt.

§. 12. Die ausgezeichnetsten Eigenschaften der Kegelschnitte finden sich in dem Werke des Apollonius behandelt. Wir wollen hier nur anführen: die Eigenschaften der Asymptoten, welche den grössten Theil des zweiten Buchs ausmachen; das constante Verhältniss der Producte aus den Segmenten, welche durch einen Kegelschnitt auf zwei Transversalen abgeschnitten werden, welche zweien Axen parallel und durch einen gewissen Punkt gezogen werden (Satz 16—23 im 3ten Buch); die Haupteigenschaften der Brennpunkte in der Ellipse und Hyperbel, welche Apollonius Anwendungspunkte nennt (in demselben

---

17) *Novum theorema pro doctrina sectionum conicarum* (*Acta Erud. ann.* 1689.) p. 586.

Buch Satz 45 — 52) [18]); die beiden schönen Theoreme über die conjugirten Durchmesser (7tes B., Satz 12 und 22, 30 und 31).

Wir müssen noch folgendes Theorem mit aufnehmen, welches so ausserordentliche Wichtigkeit in der neuern Geometrie erlangt hat, da es die Grundlage der Theorie von den reciproken Polairen geworden ist und da aus ihm auch De La Hire das Princip seiner Kegelschnittstheorie hernahm; nämlich: „Wenn man durch den Durchschnittspunkt zweier Tangenten eines Kegelschnitts eine Transversale zieht, welche die Curve in zwei Punkten, und die Verbindungslinie der Berührungspunkte beider Tangenten in einem dritten Punkte schneidet, so sind dieser dritte und der Durchschnittspunkt beider Tangenten die zugeordnet harmonischen Punkte zu den beiden ersten." (Buch 3, Satz 37.)

Die 23 ersten Sätze des 4ten Buchs beziehen sich auf die harmonische Theilung der geraden Linien, die in der Ebene des Kegelschnitts gezogen werden, und sind grossen Theils besondere Fälle des eben ausgesprochenen Theorems. In den folgenden Sätzen betrachtet Apollonius das System zweier Kegelschnitte und beweist von ihnen, dass sie sich nicht in mehr als 4 Punkten schneiden können. Er untersucht, was eintreffen muss, wenn sie sich in einem oder in zwei Punkten berühren, und behandelt die übrigen verschiedenen gegenseitigen Lagen, welche sie annehmen können.

Das 5te Buch ist das köstlichste Denkmal für des Apollonius Genie. Hier erscheinen zum ersten Male Untersuchungen über das *Grösste* und *Kleinste*. Wir finden hier Alles wieder, was uns die heutigen analytischen Methoden über diesen Gegenstand lehren, und erkennen darin zugleich den ersten Keim zu der schönen Theorie der *Evoluten*. Apollonius beweist nämlich, dass es auf jeder Seite der Axe eines Kegelschnitts eine Aufeinanderfolge von Punkten giebt, aus welchen man nach dem gegenüberliegenden Theile der Curve nur *eine* Normale ziehen kann; er liefert die Construction dieser Punkte und bemerkt, dass ihre Continuität zwei Räume von einander trennt, welche diese merkwürdige Verschiedenheit besitzen, dass man von jedem Punkt des einen Raums zwei Normalen an die Curve ziehen kann, von jedem Punkt des andern dagegen keine. Man erkennt darin die voll-

18) S. Note IV.

ständige Bestimmung der *Mittelpunkte der Berührungskreise* und der *Evolute* für den Kegelschnitt. Apollonius nimmt eine Hyperbel, deren Elemente er bestimmt, zu Hülfe, um die Fusspunkte der Normalen zu construiren, welche von einem gegebenen Punkt auf den vorgelegten Kegelschnitt gefällt werden. Alle diese Untersuchungen sind mit bewundernswerthem Scharfsinn geführt. — Dieses grosse Werk hat, wie Geminus berichtet, dem Apollonius den Beinamen des Geometers κατ' ἐξοχὴν erworben.

Auf uns sind nur die sieben ersten Bücher gekommen und zwar die ersten vier in der Originalsprache, die drei andern arabisch. Halley hat das achte Buch in der einzigen vollständigen und vorzüglichen Ausgabe der *Kegelschnitte des Apollonius* zu restituiren versucht. [19])

§. 13. Apollonius hat noch viele andere Schriften, meisten Theils auf geometrische Analyse bezüglich, hinterlassen, von diesen haben wir jedoch nur das einzige *de sectione rationis* erhalten, die übrigen unter den Titeln: *de sectione spatii*, *de sectione determinata*, *de tactionibus*, *de inclinationibus*, *de locis planis*, sind nach den Andeutungen des Pappus durch verschiedene Geometer der beiden letzten Jahrhunderte wiederhergestellt.

Apollonius hat endlich auch noch den Ruhm, die Geometrie auf die Astronomie angewandt zu haben; denn man schreibt ihm die Theorie der Epicykel zu, vermöge deren man die Phänomene des Stillstands und der Rückläufigkeit der Planeten erklärt. Ptolemäus führt ihn in Bezug auf diesen Gegenstand in seinem Almagest an.

Eratosthenes, geb. 276 v. Ch.

§. 14. Unter den Zeitgenossen des Archimedes und Apollonius zeichnet sich Eratosthenes aus, der 276 v. Ch. geboren wurde (11 Jahre nach Archimedes und 31 Jahre vor Apollonius). Dieser in allen Zweigen des Wissens gründliche Philosoph war unter dem dritten Ptolemäus Director

---

19) *Apollonii Pergaei conicorum libri octo*; in fol. Oxoniae, 1710.

Peyrard hatte in den Vorreden zu seiner Uebersetzung des Archimedes, und zu seiner Uebersetzung des Euclides in drei Sprachen, eine französische Uebersetzung der Kegelschnitte des Apollonius angekündigt. Als schon die ersten Bogen gedruckt waren, ereilte den fleissigen Arbeiter der Tod. Es wäre sehr zu bedauern, wenn die Frucht seiner Arbeiten für Frankreich verloren sein sollte. Die Fonds, welche zur Aufmunterung für die Wissenschaften bestimmt sind, dürften keine bessere Anwendung finden, als in der Veröffentlichung dieses Werks.

der Bibliothek zu Alexandrien und verdient in gleichem Ansehn mit den drei berühmten Geometern des Alterthums, mit Aristäus, Euclides und Apollonius, zu stehen. Pappus führt von ihm ein Werk in zwei Büchern an, welches sich auf die geometrische Analysis bezieht, welches aber für uns verloren gegangen ist. Es hatte zum Titel: *de locis ad medietates*; wo wir nicht wissen, welche diese Oerter waren.

Eratosthenes hatte zur Auffindung der beiden mittleren Proportionalen ein Instrument erfunden, welches er *Mesolabium* nannte und welches er selbst in einem Briefe an den König Ptolemäus beschreibt, wobei er zugleich die Geschichte des Problems von der Verdoppelung des Würfels erzählt. Dieser Brief ist uns von Eutocius in dem Commentar zu dem Werke des Archimedes über die Kugel und den Cylinder erhalten. Auch Pappus giebt in seinen mathematischen Sammlungen die Construction des Eratosthenischen Mesolabiums.

§. 15. Die Arbeiten des Archimedes und Apollonius bezeichnen die brillanteste Epoche der alten Geometrie. Man kann diese als die Schöpfer und Begründer der beiden grossen Fragen betrachten, welche die Geometer aller Epochen beschäftigt haben und an welche sich die meisten ihrer Werke anknüpfen, so dass sie in zwei Klassen zerfallen und es beinahe scheint, als theilten sie sich in das Gebiet der Geometrie.

Das erste dieser wichtigen Probleme ist die Quadratur der krummlinigen Figuren, welches Veranlassung zur Entstehung des Infinitesimal-Calculs war, der erfunden und allmählig ausgebildet wurde durch Kepler, Cavalleri, Fermat, Leibnitz und Newton.

Das zweite ist die Theorie der Kegelschnitte, durch welche zunächst die geometrische Analysis der Alten und hernach die Methoden der Perspective und der Transversalen erfunden wurden. Diese waren die Vorgänger der Theorie der geometrischen Curven aller Grade und jenes beträchtlichen Theils der Geometrie, der bei den allgemeinen Eigenschaften der Ausdehnung nur die Gestalt und die Lage der Figuren berücksichtigt und sich nur der Durchschnitte von Linien oder Flächen und der Verhältnisse ihrer rechtwinkligen Entfernungen bedient.

Diese beiden grossen Abtheilungen der Geometrie, von denen jede ihren besondern Character hat, können durch die Benennungen *Geometrie des Maasses* und *Geometrie der Gestalt und Lage* oder durch Geometrie des Archimedes und Geometrie des Apollonius bezeichnet werden.

Diese beiden Abtheilungen sind übrigens auch noch die sämmtlicher mathematischen Wissenschaften, welche nach einem Ausdruck des Descartes die Untersuchung über die *Ordnung* und über das *Maass* zum Gegenstand haben.[20]) Aristoteles hat schon dieselbe Idee in diesen Worten ausgesprochen: „Womit sollten sich die Mathematiker beschäftigen, wenn nicht mit der Ordnung und mit dem Verhältniss?" [21])

Aristoteles, 384—322.

Diese Definition der mathematischen Wissenschaften und diese beiden bedeutenden Abtheilungen, welche sie bemerklich macht, lassen sich vorzüglich auf die Geometrie anwenden. Man muss sich deshalb wundern, dass diese selbst in den vorzüglichen Büchern diejenige Wissenschaft genannt wird, welche das *Maass* der Ausdehnung zum Gegenstand hat. Diese Erklärung ist offenbar unvollständig und giebt eine falsche Vorstellung von dem Zweck und dem Gegenstand der Geometrie. — Diese Bemerkung ist keineswegs ohne Interesse und wir wollen sie in der Vten Note weiter verfolgen.

§. 16. Drei oder vier Jahrhunderte nach Archimedes und Apollonius haben mehre Geometer, die mit Recht sich einen Namen erworben haben, ohne gerade diese grossen Geister zu erreichen, die Geometrie durch nützliche Entdeckungen und Theorieen bereichert; sodann lebten in den nächsten zwei oder drei Jahrhunderten die Commentatoren, welche uns die Werke und die Namen der Geometer des Alterthums überliefert haben; dann folgte endlich die Zeit der Unwissenheit, in welcher die Geometrie bei den Arabern und Persern schlummerte bis zum Wiederaufleben der Wissenschaften in Europa.

Wir wollen nur kurz die hauptsächlichsten Werke der berühmtesten Schriftsteller anführen, welche in den beiden ersten Perioden dieses 1700jährigen Zwischenraums sich auszeichneten. Wir müssen jedoch sogleich dabei bemerken, dass diese Epoche, in welche wir treten, die der bedeutendsten Fortschritte in der Astronomie ist. Auf

20) Alle Beziehungen, welche zwischen Dingen derselben Art stattfinden können, lassen sich auf zwei zurückführen, auf Ordnung und Maass. (*Règles pour la direction de l'esprit*; *ouvrage posthume de Descartes*, 14te Regel.) Schon vorher hatte Descartes gesagt: Alle Wissenschaften, welche zu ihrem Gegenstand die Untersuchung über *Ordnung* und *Maass* haben, beziehen sich auf die Mathematik. (*ibid.* 4te Reg.)

21) Drittes Kapitel des 11ten Buchs der Metaphysik von Aristoteles.

diese Wissenschaft hauptsächlich beziehen sich die Arbeiten der hier zu nennenden Geometer, und sie ist es, welcher diese Geometer mit Ausnahme des Nicomedes grossen Theils ihre Berühmtheit verdanken.

Diese Aenderung in der Richtung des Geistes war eine nothwendige Folge der grossen Entdeckungen des Archimedes und Apollonius, welche von Jahrhunderten erst Studium und Nachdenken erforderten, bevor man in den Materien, welche diese ausgezeichneten Genies behandelt hatten, weiter gehen konnte.

Nicomedes, um 150 v. Ch.

§. 17. Die Werke des Nicomedes sind nicht bis auf uns gekommen und wir kennen diesen Geometer nur als den Erfinder der Conchoide, welche er auf geistreiche Weise zur Auflösung des Problems über die beiden mittleren Proportionalen und des der Dreitheilung des Winkels anwandte.

Die Conchoide, welche schon durch den Umstand merkwürdig war, dass sie die beiden berüchtigtsten Probleme des Alterthums auflöste, erlangte noch eine neue Wichtigkeit durch die von Vieta gemachte Bemerkung, dass alle Probleme, deren Lösung von einer Gleichung des dritten Grades abhängt, sich auf diese beiden zurückführen lassen, und ausserdem noch durch die Anwendung, welche Newton in seiner *Arithmetica universalis* von dieser Curve machte, um alle Gleichungen vom dritten Grade zu construiren.

Hipparchus, um 150 v. Ch.

§. 18. Hipparch, der grösste Astronom des Alterthums, der wahre Begründer der mathematischen Astronomie, hat ein Werk in zwölf Büchern geschrieben, worin sich die Construction der Chorden von Kreisbögen findet. 22)

Seine astronomische Berechnungen erforderten die ebene und sphärische Trigonometrie, zu welchen er die geometrischen Principien in seinem Werke über den *Aufgang und Untergang der Gestirne* gegeben hat und deren erster Erfinder er mit Bestimmtheit zu sein scheint. 23)

---

22) Theon führt dieses Werk an (Commentar zum Almagest L. I. Cap. IX.).

23) Denn eines Theils sagt Hipparch in seinem Commentar zum Aratus, dass er die Auflösung der sphärischen Dreiecke gezeigt habe, welche zur Auffindung des Ostpunktes in der Ecliptik dienen, und zweitens findet man vor ihm keine Spur der sphärischen Trigonometrie, ja nicht einmal der ebenen. Delambre bemerkt in seiner *Histoire de l'astronomie ancienne* (tom. I. p. 104), dass Archimed, um den Durchmesser der Sonne zu bestimmen, einen Winkel auf

Auch scheint die Erfindung der stereographischen Projection, so wie die Entdeckung der beiden berühmten Theoreme in der ebenen und sphärischen Geometrie, welche wir bei Gelegenheit des Menelaus und Ptolemäus anführen werden, bis auf Hipparch zurückgesetzt werden zu müssen.

Geminus, um 100 v. Ch.

§. 19. Dem Geminus, von dem man annimmt, dass er kurze Zeit nach Nicomedes und Hipparchus gelebt habe, schreibt man ein Werk über verschiedene Curven zu, unter andern über die Schraubenlinie, welche auf der Oberfläche eines geraden Kreiscylinders beschrieben ist. Er bewies von ihr die Eigenschaft, welche sie nur mit der geraden Linie und dem Kreise gemein hat, dass sie nämlich beständig sich selbst gleich bleibt. 24) Ein anderes Werk des Geminus unter dem Titel *Enarrationes geometricae*, welches von Proclus oft citirt wird, muss eine Art von philosophischer Entwickelung der geometrischen Entdeckungen gewesen sein. Beide Werke sind für uns verloren gegangen, das erste soll noch als Manuscript in der Bibliothek des Vatikan vorhanden sein.

Theodosius, um 100 v. Ch.

§. 20. Theodosius vereinigte unter dem Titel *Sphaericorum libri tres* mehre Eigenschaften der grössten Kugelkreise, welche zur Begründung der Astronomie und zur Berechnung der sphärischen Dreiecke nothwendig sind. Diese Berechnung selbst findet sich darin nicht, der Name Dreieck wird nirgends ausgesprochen. So elementar auch dieses Werk sein mag, so wurde es doch sehr hoch geachtet, weil es sehr methodisch und gründlich war. Deshalb wurde es auch von Pappus commentirt und von mehren bedeutenden neueren Geometern übersetzt.

Man hat von Theodosius noch zwei andere Arbeiten unter den Titeln: *de habitationibus* und *de diebus et noctibus*, welche die Phänomene behandeln, wie sie den Bewohnern der Erde erscheinen müssen, je nach ihrer Stellung auf der Kugel und nach dem Ort der Sonne in der Ecliptik.

---

einen Quadranten legt; woraus man sieht, dass er nicht die Mittel besessen habe, den Scheitelwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn die beiden Seiten und die Basis gegeben sind. Man hatte noch nicht die Idee gehabt, die Sehnen der Winkel zu berechnen, d. h. die ebene Trigonometrie war noch unbekannt.

24) Proclus, Commentar zum ersten Buch des Euclid, 4te Def. und 5ter Satz.

§. 21. Der Geometer und Astronom Menelaus hat wie Theodosius ein Werk über die Geometrie der Sphäre geschrieben unter dem Titel *Sphaericorum libri tres*, welches nur in der arabischen und ebräischen Uebersetzung auf uns gekommen ist; der griechische Text ist verloren gegangen. Dieses Werk geht weiter als das von Theodosius, denn es behandelt speciell die Eigenschaften der sphärischen Dreiecke, aber noch nicht ihre Berechnung, d. h. noch nicht sphärische Trigonometrie, welche vielleicht Gegenstand einer andern Arbeit des Menelaus war: über die *Berechnung der Chorden* in 6 Büchern, wovon Theon spricht, welches aber verloren gegangen ist.

Menelaus, um 80 n. Ch.

Der wichtigste Satz in der Sphärik des Menelaus ist der erste im 3ten Buch, welcher die Basis der ganzen sphärischen Trigonometrie der Griechen ausmacht. Es ist dieses eine Eigenschaft der sechs Segmente, welche auf den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks durch irgend einen grössten Kreis abgeschnitten werden. Dieses Theorem stand auch bei den Arabern in grossem Ansehn, welche es in mehren Schriften commentirten und es die *regula intersectionis* nannten. Der analoge Satz der ebenen Geometrie, welchen ebenfalls Menelaus als Hülfssatz beim Beweise des ersten anführt und von dem wir unten bei Ptolemäus sprechen werden, weil er erst im Almagest bemerkt wurde, hat eine besondere Wichtigkeit in der neuern Geometrie erlangt, in die Carnot ihn einführte, indem er ihn zum Grundsatz seiner Theorie der Transversalen machte.

Wir führen aus der Sphärik des Menelaus noch folgende zwei Theoreme an, welche diesem Geometer anzugehören scheinen: 1) Derjenige grösste Kreis, welcher einen Winkel eines sphärischen Dreiecks halbirt, theilt die gegenüberstehende Seite in zwei solche Segmente, dass deren Sehnen sich zu einander verhalten, wie die der anliegenden Seiten; 2) Die drei Bögen, welche die drei Winkel eines Dreiecks halbiren, gehen durch *einen* Punkt.

Menelaus hat auch über die Theorie der krummen Linien geschrieben. Pappus berichtet uns, dass eine dieser Linien, wahrscheinlich von doppelter Krümmung, da sie durch den Durchschnitt zweier krummen Oberflächen entsteht, von diesem Geometer den Beinamen der *wunderbaren* erhielt. [25])

---

25) Mathematische Sammlungen, 4tes Buch nach dem 30sten Satz.

Ptolemäus, um 125 n. Ch. §. 22. Ptolemäus, ein Astronom und Geometer von ungeheuern Kenntnissen, hat uns in seinem Almagest [26]) die Behandlung der ebenen und sphärischen Trigonometrie hinterlassen, der einzigen, die wir von den Griechen besitzen, da die Werke des Hipparch über diesen Gegenstand untergegangen sind. Man findet darin diese schöne Eigenschaft des in einen Kreis eingeschriebenen Vierecks, dass das Product der beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Producte je zweier gegenüberliegenden Seiten. Er ist als Hülfssatz gegeben, um eine Tafel der Werthe von Chorden zu construiren, welche in einem Kreise zu gegebenen Bögen gehören. [27])

Ptolemäus gründete seine sphärische Trigonometrie auf das von Menelaus gegebene Theorem der sechs Segmente, zu dessen Beweis er sich auch des analogen aus der Ebene bedient. Letzteres ist eine Relation zwischen den Segmenten der Seiten irgend eines ebenen Dreiecks, welche durch eine in derselben Ebene willkührlich gezogene Transversale abgeschnitten werden, dass nämlich *das Product aus solchen drei Segmenten, welche keinen Endpunkt gemein haben, gleich ist dem Producte aus den drei übrigen Segmenten.* [28]) Man sieht, dass dieses eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes aus der Theorie der Proportionallinien ist, und zwar folgendes: eine gerade Linie, welche parallel mit der Grundlinie eines Dreiecks gezogen wird, theilt die Seiten in proportionale Theile. Diese Bemerkung genügt, um die Nützlichkeit dieses Theorems für die Geometrie erkennen zu lassen. Es dient hauptsächlich in den Untersuchungen, wo man zu beweisen hat, dass drei Punkte in gerader Linie liegen; man denkt

---

26) Ptolemäus hatte seinem Werke über Astronomie den Titel gegeben: *συντάξις μαθηματικὴ*; seine Harausgeber verwandelten diesen Titel in: *Grosse Zusammenstellung*, die arabischen Uebersetzer machten daraus: *Die grösste (Almagesti)*, wodurch der Name Almagest geblieben ist.

27) In Lib. I. Cap. IX. seiner *géometrie de position* hat Carnot gezeigt, wie man aus diesem Satze die ganze ebene Trigonometrie ableiten könne; nach ihm hat Fergola diesen Gegenstand wieder aufgenommen und ihn vollständig behandelt unter dem Titel: *Dal teorema Tolemaico ritraggonsi immediatamente i teoremi delle sezioni angolari di vieta e di wallis, e le principale verità proposte nella Trigonometria analitica da moderni.* (Erster Theil der Memoiren der Academie der Wissenschaften zu Neapel. 1819)

28) Lib. I. Cap. XI. betitelt: Vorläufige Bemerkungen zu den sphärischen Beweisen.

sich dabei ein Dreieck, dessen Seiten durch diese drei Punkte gehen, und verificirt dann, wenn die in Rede stehende Relation zwischen den sechs Segmenten stattfindet, dass diese drei Punkte auf den drei Seiten des Dreiecks liegen.

Als dieser Satz im Anfang des jetzigen Jahrhunderts zuerst in der *géometrie de position* und bald darauf in der Theorie der Transversalen, deren Grundlage es bildet, wieder in Anregung kam, schien er gänzlich unbekannt zu sein, obgleich er schon in früherer Zeit, abgesehen von dem Nutzen, den er den Griechen als Hülfssatz bei ihren Beweisen auf der Kugel geleistet, ausserdem noch seine Früchte getragen hatte. Wegen seiner gegenwärtigen Wichtigkeit verdient er, dass wir näher in seine Geschichte eingehen; deshalb widmen wir ihm die VIte Note.

Ausserdem verdankt die Geometrie dem Ptolemäus die Lehre von den *Projectionen*, zu denen er, als er sich mit der Construction geographischer Karten beschäftigte und als er die Probleme der Gnomonik zu lösen versuchte, in zwei vortrefflichen Werken über die *Sonnenuhren* und *Planisphären*, den Grund legte. Von diesem letzten Werke, worin die stereographische Projection gelehrt und angewandt wird, glaubt Delambre, dass es dem Hipparch angehöre, und nicht, wie man bisher geglaubt, dem Ptolemäus.

Ptolemäus schrieb ein Buch über die *drei Dimensionen der Körper*, woraus man sieht, dass er der erste war, welcher von drei rechtwinkligen Axen gesprochen hat, auf welche die neuere Geometrie die Lage irgend eines Punkts im Raume bezieht. 29)

Von den vielen andern Werken über verschiedene Gegenstände führen wir endlich noch die *Optik* des Ptolemäus an, worin sich ein rein geometrisches Problem vorfindet, welches später mehre der ausgezeichnetsten Geometer beschäftigt hat; es handelt sich darum, für die gegebenen Stellungen des Auges und eines leuchtenden Punktes den strahlenden Punkt auf einem sphärischen Spiegel zu finden.

§. 23. Hier endet die erste der drei Perioden, in welche wir den Zeitraum von 1700 Jahren getheilt haben, welche Archimed und Apollonius von dem Wiederaufleben der Wissenschaften in Europa trennt.

---

29) Delambre, Art. Ptolemäus, in der *Biographie universelle.*

Die grossen Erfindungen in den mathematischen Wissenschaften, welche dem Alterthum zu machen bestimmt waren, sind abgeschlossen. Von jetzt ab findet man keine Originalschriftsteller, sondern nur gelehrte und berühmte Commentatoren, die aus der griechischen Schule zu Alexandrien hervorgingen. Pappus jedoch, das Haupt derselben, verdient einen höhern Rang einzunehmen, denn seine Werke zeigen noch den Geist und die productive Kraft der früheren Jahrhunderte.

Pappus. §. 24. Dieser Geometer stellte gegen das Ende des vierten Jahrhunderts n. Ch. in seinen *mathematischen Sammlungen* 30) die zerstreuten Entdekkungen der vorzüglichsten Mathematiker zusammen und fügte eine Menge von Sätzen und Hülfssätzen, bestimmt, die Lectüre ihrer Werke zu erleichtern, hinzu. In diesen Sammlungen, dem kostbaren Denkmal der alten Mathematik, finden sich auch mehre Entdeckungen von Pappus selbst, welchen Descartes als einen der ausgezeichnetsten Geometer des Alterthums betrachtete.31)

Man findet darin die Beschreibung einer Curve doppelter Krümmung auf der Kugel. Pappus beschreibt nämlich eine Spirale, ähnlich wie Archimedes, indem er einen Punkt gleichförmig auf dem Bogen eines grössten Kugelkreises sich bewegen lässt, welcher letztere selbst sich um seinen Durchmesser dreht (Buch 4, Satz 30). Pappus fand auch den Ausdruck für die sphärische Oberfläche, welche zwischen dieser Curve und ihrer Basis liegt; welches das erste Beispiel der *Quadratur einer krummen Oberfläche* ist.

---

30) *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Frederico Commandino in latinum conversae, et commentariis illustratae.* Pisanii 1588, fol., und Bononiae 1660, fol.

31) „Ich bin fest davon überzeugt, dass die ursprünglichen Keime von Wahrheiten, welche die Natur in den menschlichen Geist niedergelegt hat und welche wir durch das viele Lesen und Hören von mancherlei Irrthümern in uns ersticken, in diesem einfachen und unbefangenen Alterthum so viel Kraft und Einfluss gehabt haben, dass die Menschen, erleuchtet von diesem Licht des Verstandes, welches sie die Tugend dem Vergnügen und das Rechtschaffene dem Vortheilhaften vorziehen liess, obgleich sie sich von dem Grunde dieses Vorzugs keine Rechenschaft zu geben wussten, dass diese, sag' ich, sich die richtigen Ideen über Philosophie und Mathematik gemacht haben, wenn sie auch diese Wissenschaften noch nicht bis zu ihrer Vollkommenheit bringen konnten. Einige Züge dieser wahrhaften Mathematiker glaub' ich in Pappus und Diophantus anzutreffen....." (*Descartes*, *Règles pour la direction de l'esprit*, 4te Regel.)

Das berühmte Theorem von Guldin, worin der Schwerpunkt zur Ausmessung von Figuren angewandt wird, findet sich in den mathematischen Sammlungen und scheint von Pappus selbst ausgedacht zu sein. [32])

§. 25. Gleich hinter dem 30sten Satz des 4ten Buchs zeigt uns eine Stelle, welche als Einleitung zum Problem der Trisection des Winkels dient, dass die Lehre von den krummen Oberflächen und von den Linien doppelter Krümmung, welche auf diesen Oberflächen gezogen oder durch zusammengesetzte Bewegung erzeugt werden (wie die vorhin erwähnte sphärische Spirale), schon von den Alten ausgebildet wurde. Pappus spricht hier von *Oertern auf der Oberfläche* und citirt über diesen Gegenstand die Werke des Demetrius von Alexandrien und des Philo von Tyana. Das erste hatte zum Titel *περὶ γραμμάτων ἐπιστάσεων*, von dem uns nichts als diese Andeutung übrig geblieben ist; das zweite behandelte Curven, welche durch den Durchschnitt zweier Oberflächen entstehn und hiess *περὶ πληκτοειδῶν*. Montucla bemerkt mit Recht, dass es bei dieser so sehr geringen Andeutung nicht leicht zu errathen sei, was dieses für Oberflächen und Linien gewesen sind. Aus einer Stelle bei Pappus jedoch (B. 4, S. 29), welche diesem gelehrten Historiker unbekannt zu sein scheint, erfahren wir, dass die Oberfläche einer Schraube mit viereckigem Schraubengange (*la vis à filets carrés*) eine Plectoide sei, was uns zu der Vermuthung führt, dass dieses Wort auf irgend eine allgemeine Weise die richtscheitigen Oberflächen (*surfaces réglées*) bedeute, auf welche es uns wegen des Durchschlingens (*l'entrelacement*) der geraden Linien, welches diese Oberflächen darbieten, zu passen scheint, oder auch dass es die Oberflächen bezeichnet, welche man jetzt Conoiden nennt, und welche durch eine Gerade erzeugt werden, die sich während ihrer Bewegung gegen eine feste Gerade und gegen eine Curve stützt, indem sie immer parallel mit einer Ebene bleibt, oder endlich dass es besonders die schraubenförmigen Oberflächen bezeichnet und speciell die Oberfläche der Schraube mit viereckigen Schraubengängen.

Ein neapolitanischer Geometer hat in einem neuern Werke allgemein mit dem Namen der Plectoiden alle Oberflächen verbunden, welche durch eine gerade Linie erzeugt werden. [33])

---

32) S. das Ende der Vorrede zum 7ten Buch der mathem. Samml.

33) *Geometria di sito sul piano e nello spacio*; Naples 1821.

Commandinus spricht in seinem Commentar zum Pappus die Meinung aus, dass das Wort πληκτοειδὴς durch einen Irrthum des Abschreibers entstanden ist und dass man es durch κυλινδρικὸς ersetzen müsse. Aber diese Annahme ist auf jeden Fall irrig, denn das Wort πληκτοειδὴς bezieht sich an der Stelle[34]) im Pappus, welche dem Commandinus Gelegenheit zu dieser Bemerkung giebt, unstreitig auf die Oberfläche der Schraube mit viereckigem Schraubengange, und nicht auf eine cylindrische.

§. 26. Pappus giebt bei Gelegenheit der Quadratrix des Dinostratus zwei Eigenschaften der schraubenförmigen Oberfläche an, welche angeführt zu werden verdienen, da sie zwei Constructionsarten der Quadratrix darbieten und zugleich eine der schönsten Betrachtungen der Alten über krumme Oberflächen und Curven doppelter Krümmung enthalten.

Nachdem er angeführt, wie die Quadratrix durch den Durchschnitt eines Kreisradius, der sich um seinen Mittelpunkt dreht, und eines Durchmessers, der sich parallel mit sich selbst fortbewegt, entstehe, welches er eine mechanische Erzeugung nennt (Buch 4, Satz 25), sagt Pappus, dass diese Curve sich durch Oerter auf einer Oberfläche oder auch durch die archimedische Spirale bilden lasse. Diese beiden Constructionsarten sind folgende:

Erstes Mittel, *Satz* 28. „Es sei eine Schraubenlinie auf einem geraden Kreiscylinder beschrieben, dann bilden die Perpendikel, welche von den einzelnen Punkten derselben auf die Axe des Cylinders gefällt werden, die schraubenförmige Oberfläche. Legt man nun durch eines dieser Perpendikel eine Ebene unter passender Neigung gegen die Basis des Cylinders, so schneidet diese Ebene die schraubenförmige Oberfläche in einer Curve, deren senkrechte Projection auf die Grundfläche des Cylinders die *Quadratrix* ist."

Zweites Mittel, *Satz* 29. „Wählt man eine archimedische Spirale zur Basis eines geraden Cylinders und denkt man sich einen Drehungskegel, dessen Axe diejenige Seitenlinie des Cylinders ist, welche durch den Anfangspunkt der Spirale geht, so schneidet dieser Kegel die cylindrische Oberfläche in einer Curve doppelter Krümmung.[35]) Die Perpendikel, welche von den verschiede-

34) Buch 4, Satz 29, Note F, p. 92 der Ausgabe von 1660.

35) Dieses ist die conische Schraubenlinie. Sie ist eine von jenen Curven doppelter Krümmung, welche den Alten bekannt waren.

nen Punkten dieser Curve auf die erwähnte Seitenlinie des Cylinders gefällt werden, bilden die schraubenförmige Oberfläche (welche Pappus an dieser Stelle plectoidische Oberfläche nennt). Legt man nun durch eine dieser Linien unter passender Neigung eine Ebene, so schneidet diese die Oberfläche in einer Curve, deren senkrechte Projection auf die Ebene der Spirale die verlangte Quadratrix sein wird."

Beide Constructionen bestehen also darin, dass man eine schraubenförmige Oberfläche durch eine Ebene schneidet, welche durch eine Seitenlinie der Oberfläche geht, und dass man den Schnitt auf eine Ebene projectirt, die senkrecht auf der Axe der Schraube steht. Bei der ersten Lösung bestimmt man die Oberfläche der Schraube vermittelst einer Schraubenlinie, durch welche man die erzeugenden Linien der Oberfläche gehen lässt, in der zweiten bestimmt man diese erzeugenden Linien mittelst einer Curve doppelter Krümmung, welche der Durchschnitt eines geraden Cylinders mit spiralförmiger Grundfläche mit einem Drehungskegel ist, welcher zur Axe eine Seitenlinie des Cylinders hat, die durch den Anfangspunkt der Spirale geht.

§. 27. Wir bemerken, dass diese beiden Constructionen auf folgenden beiden Eigenschaften der schraubenförmigen Oberflächen beruhen, welche Pappus nicht besonders ausspricht, welche sich aber in den Sätzen 28 und 29 bewiesen finden.

1) Wenn man die schraubenförmige Oberfläche durch eine Ebene schneidet, die durch eine der erzeugenden Linien geht, so projectirt sich der Schnitt auf eine Ebene, die senkrecht gegen die Axe der Oberfläche gelegt wird, als eine Quadratrix des Dinostratus. [36])

Proclus spricht von ihr in seinem Commentar zur 4ten Definition des ersten Buchs im Euclid. In neuerer Zeit haben sich mehre Geometer mit dieser Curve beschäftigt, vorzüglich Pascal (*De la dimension d'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cone*; *oeuvres de Pascal*, tom. V, p. 422.) und Guido-Grandi (*Epistola ad Th. Cevani*; *oeuvres posthumes d'Huygens*, tom. II.). Garbinski, Professor zu Warschau, hat vor einigen Jahren eine graphische Construction der Tangenten an die conische Schraubenlinie gegeben. (*Annales de mathématiques*, tom. XVI, p. 167 u. 376.)

36) Wenn die schneidende Ebene, statt durch eine erzeugende Linie der schraubenförmigen Oberfläche zu gehen, ganz willkührlich gelegt wird, so haben wir gefunden, dass man in der Projection entweder eine verlängerte oder eine verkürzte Quadratrix d. h. mit andern Worten eine Conchoide erhält.

2) Ein Drehungskegel, welcher mit einer schraubenförmigen Oberfläche eine gemeinschaftliche Axe hat, schneidet diese Oberfläche in einer Curve doppelter Krümmung, welche sich auf eine Ebene, die senkrecht gegen die Axe gelegt wird, als archimedische Spirale projecirt.

Dieser zweite Satz bietet eine Construction der Spirale durch Oerter auf der Oberfläche dar, welche der von Pappus für die Quadratrix gegebenen analog ist.

§. 28. Diese Betrachtungen der krummen Oberflächen und der Curven doppelter Krümmung, bezüglich auf die Construction einer ebenen Curve, welche heut zu Tage in der beschreibenden Geometrie Eingang gefunden haben und den Hauptcharacter der Schule des Monge ausmachen, verdienen, wie es mir scheint, in dem Werke des Pappus bemerkt zu werden. Sie hätten diesen Geometer zu einer Construction der Tangenten für die Spirale und Quadratrix führen können; denn es würde die Bemerkung hingereicht haben, dass diese Tangenten die Projectionen sind von den Tangenten der beiden Curven, die auf der schraubenförmigen Oberfläche gezogen sind, und dass die Tangente in einem Durchschnittspunkt zweier Oberflächen der Durchschnitt der in diesem Punkte beide Oberflächen tangirenden Ebenen ist. Auf diese Weise kommt man auch sehr leicht zu den bekannten Eigenschaften für die Tangenten der Spirale und der Quadratrix.[37]) Dieses ist jedoch gänzlich der Geist in der heutigen beschreibenden Geometrie, und es ist nicht wahrscheinlich, dass die Alten ihre Betrachtungen über die krummen Oberflächen so weit ausgedehnt haben; es ist sogar zweifelhaft, ob sie zur Zeit des Pappus eine hinreichend bestimmte Idee von einer tangirenden Ebene in einem Punkte gehabt haben.

§. 29. Indem man über die Natur der beiden erwähnten Theoreme nachdenkt, wird man darauf geführt, dass man sie als einfache Anwendung zweier Methoden betrachtet, durch welche man alle Arten ebener Curven vermittelst der schraubenförmigen Oberfläche in andere davon verschiedene Curven umwandelt. Und aus diesen Transformations-Arten entspringen Beziehungen für die Construction und für die Eigenschaften von Curven, welche nichts mit einander gemein zu haben scheinen, als

---

37) Th. Olivier, der gewandte Professor an der *école des arts et manufactures*, hat schon von diesem Mittel Gebrauch gemacht, um die Tangente der archimedischen Spirale zu construiren. (*Bulletin de la Société philomatique de Paris*, année 1833, p. 22.)

dieselbe Form der Gleichung zwischen verschiedenen Variabeln; von dieser Art sind einige Spiralen und diejenigen Curven, welche denselben Namen bei dem gewöhnlichen Coordinatensystem führen. Ich werde diesen Gedanken in der VIIIten Note weiter ausführen.

§. 30. In den mathematischen Sammlungen bemerkt man noch mehre Theoreme, welche jetzt zur Theorie der Transversalen gehören; unter andern das, welches ihre Grundlage bildet und welches uns annehmen lässt, dass diese nützliche und elegante Lehre schon von den Alten angewandt wurde, hauptsächlich in ihren Schriften über geometrische Analysis, auf welche sich diese Theoreme beziehen.

Unter den Sätzen, welche zur Theorie der Transversalen gehören und von denen sich mehre auf die *harmonische* Proportion beziehen, wollen wir folgende anführen, welche im 7ten Buch als Hülfssätze für das leichtere Verständniss der Porismen des Euclid bewiesen sind.

Der 129ste Satz sagt: *Wenn vier Linien von Einem Punkte ausgehen, so bilden sie auf einer Transversale, die willkührlich in derselben Ebene gezogen wird, vier Segmente, welche unter sich ein bestimmtes constantes Verhältniss haben, wie auch die Transversale gezogen werden mag.* Es seien a, b, c, d die Punkte, in welchen die vier Geraden von einer beliebigen Transversale getroffen werden, und ac, ad, bc, bd die vier Segmente, so wird das Verhältniss $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$ dasselbe bleiben, welches auch die Transversale sein mag.

Dieser Satz verdient, dass wir ihm diesen ganzen Paragraphen widmen, um auf ihn die ganze Aufmerksamkeit unserer Leser hinzulenken. — Diese Sätze 136, 137, 140, 142 und 145 sind entweder besondere Fälle oder das Umgekehrte dieses Hauptsatzes. Da er von Pappus unter so vielen Formen wiederholt wird, so scheint er in den Porismen des Euclid von besonderm Nutzen gewesen zu sein. Heute jedoch ist er ohne Anwendung.

Wenn wir den Gebrauch untersuchen, welche die Neueren von ihm gemacht haben, so finden wir, dass Pascal ihn in seinem *Essai pour les coniques* zu den Haupttheoremen rechnet, deren er sich in seinem *Traité* über diese Curven bediente; dass ferner Desargues einen der besonderen Fälle (welcher genau der 137ste Satz des Pappus ist) seiner Practik der Perspective (*édition de Bosse*, 1648, p. 336.) zu Grunde legte; und dass R. Simson ihn

als ein Lemma des Pappus beweist und sich desselben zum Beweise eines Satzes in seinem *Traité des porismes* bedient. In der letzten Zeit hat Brianchon ihn im Anfang seines Memoirs über die Linien zweiter Ordnung angeführt, und Poncelet citirt ihn in seinem *Traité des propriétés projectives* (p. 12.). Aber diese beiden gewandten Geometer machen von ihm keinen besondern Gebrauch, nur dass sie sehr viel den besondern Fall beachten, wenn die vier Geraden ein harmonisches Bündel formiren.

Dieser Satz scheint demnach die Aufmerksamkeit der Geometer wenig auf sich gezogen zu haben. Wir glauben inzwischen, dass er zahlreicher Anwendungen fähig ist und dass er einer der nützlichsten und fruchtbarsten in der Geometrie werden kann. Er spielt eine wichtige Rolle in unsern beiden Principien, dem der Dualisation und dem der Deformation der Figuren, indem er die Grundlage jenes Theils ist, welcher ihre Beziehungen der Grösse behandelt. Aus diesem Grunde wird es aber auch nöthig, dem Verhältniss von vier Segmenten, welches man hier betrachtet, einen besondern Namen zu geben. In dem speciellen Falle, dass es der Einheit gleich ist, wird es ein *harmonisches* Verhältniss genannt, in dem allgemeinern Fall wollen wir es ein *anharmonisches Verhältniss* oder eine *anharmonische Function* nennen. Wenn also vier Gerade von Einem Punkte ausgehen und durch eine Transversale in den vier Punkten a, b, c, d getroffen werden, so wird das Verhältniss $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$ eine *anharmonische Function* der vier Punkte a, b, c, d genannt.

Der Satz des Pappus besteht nun darin, dass diese Function beständig denselben Werth behalte, welches auch die Transversale sein möge, wenn nur die vier Geraden, die von Einem Punkte ausgingen, dieselben bleiben. Es ist dieses eine schöne Eigenschaft der anharmonischen Function der vier Punkte, welche sich vor jeder andern Function, die sich aus den Segmenten zwischen vier Punkten bilden lässt, auszeichnet.

Der Begriff der anharmonischen Function scheint uns eine bedeutende Vereinfachung in den meisten geometrischen Problemen hervorzubringen und ist bedeutend mehr als der ptolemäische Satz geeignet, für die Theorie der Transversalen als Fundament zu dienen. Er erzeugt anschauliche Beweise aller Sätze, die über Systeme gerader Linien bekannt sind, und führt auf viele neue Sätze. Ausserdem wird er in der Theorie der Kegelschnitte nützlich, wo er die Verbindung unter einer grossen Menge

isolirt stehender Sätze und die Relationen zeigt, welche diese alle an eine geringe Anzahl von Hauptprincipien anknüpft.

Wir denken der Theorie der anharmonischen Verhältnisse eine besondere Schrift zu widmen, müssen aber schon jetzt einige Hauptsätze und besonders eine andere algebraische Form mittheilen, unter welcher sich der Satz des Pappus darstellen lässt, und verweisen deshalb auf Note IX. T. 309

§. 31. Wir kommen auf Pappus zurück. Der 130ste Satz ist eine Relation zwischen den sechs Segmenten, welche durch die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks auf einer Transversale gebildet werden. Der 127ste und 128ste Satz sind specielle Fälle davon. Statt die Figur im Werke des Pappus so zu nehmen, dass sie die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks darstelle, welche von einer Transversale geschnitten werden, kann man sich auch denken, sie stelle die drei Seiten eines Dreiecks und drei andere Gerade vor, welche, durch die Scheitel dieses Dreiecks gezogen, sich in einem Punkte schneiden. Diese 6 Geraden bestimmen auf der Transversale 6 Segmente, deren jedes zwischen einer Seite des Dreiecks und einer von den beiden Linien liegt, welche durch die an dieser Seite liegenden Scheitelpunkte gezogen sind. Der Satz des Pappus ist alsdann leicht auszusprechen und zu behalten, er besteht nämlich darin, dass *das Product der drei Segmente, welche keine gemeinschaftlichen Endpunkte haben, gleich ist dem Product der drei andern*: ein ähnliches Verhältniss mit dem, welches der ptolemäische Satz giebt. Unter diesem Gesichtspunkte kann der Satz des Pappus dazu dienen, von drei Geraden, welche auf eine gewisse Weise durch die Scheitel eines Dreiecks gezogen sind, zu beweisen, dass sie in *einem* Punkte zusammentreffen, so wie der ptolemäische Satz zum Beweise dafür gebraucht wird, dass drei Punkte, die auf eine gewisse Weise auf den drei Seiten eines Dreiecks vertheilt sind, in einer geraden Linie liegen.

Der 131ste Satz lehrt, *dass in jedem Viereck eine Diagonale harmonisch geschnitten wird durch die andere Diagonale und durch die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten.*

Der 132ste Satz spricht einen besondern Fall dieses Theorems aus, welches wieder selbst als eine Folge des in 130 gegebenen allgemeinen angesehen werden kann.

Der 139ste Satz, von welchem 134, 138, 141 und 143 theils das Umgekehrte, theils besondere Fälle sind, beweist: *Wenn von einem Sechseck die 6 Scheitel je drei und drei auf zwei Geraden liegen, so sind die Durchschnittspunkte seiner gegenüberliegenden Seiten in einer geraden Linie.* Dieses Theorem ist nicht nur an sich selbst merkwürdig, sondern auch noch deshalb, weil man es als den ersten Keim zu dem berühmten Theorem von Pascal über das einem Kegelschnitt eingeschriebene Sechseck betrachten kann. Statt eines Systems zweier Geraden, in welche Pappus sein Sechseck einschreibt, wird in dem Theorem des Pascal irgend ein Kegelschnitt substituirt.[38]) Der schon oben angeführte 130ste Satz lässt eine ähnliche Verallgemeinerung zu, welche wir anführen werden, wenn wir von Desargues sprechen.

Pappus führt in seiner Vorrede als eine Verallgemeinerung eines Porisma Euclids ein schönes Theorem an, bezüglich auf die Deformation eines Polygons, von dem alle Seiten durch Punkte gehen, die in einer geraden Linie liegen, während die Scheitelpunkte, mit Ausnahme eines, beliebig gezogene Gerade durchlaufen. Dieses Theorem hat in dem letzten Jahrhundert einige Berühmtheit erlangt durch die neue Verallgemeinerung, welche es durch Maclaurin und Braikenridge erhielt, und durch die Rivalität, welche es unter diesen beiden ausgezeichneten Geometern anregte. Poncelet hat von Neuem diese Materie mit aller der Vollständigkeit und Leichtigkeit behandelt, welche die Vorschriften seines gelehrten *Traité des propriétés projectives des figures* zulassen (Sect. 4. chap. II. et III.).

---

38) Der 139ste Satz des Pappus, welcher in der angeführten Form eine Eigenschaft des Sechsecks, welches zweien Geraden eingeschrieben ist, ausdrückt, kann auch unter anderm Gesichtspunkt betrachtet werden und giebt dann zu einem andern merkwürdigen Satze Gelegenheit, welchen zuerst Simson als eines der Porismen Euclids angeführt hat; es ist der, auf welchen sich die Worte des Pappus: *Quod haec ad datum punctum vergit*, beziehen: „Wenn man in einer Ebene zwei feste Punkte und einen Winkel, dessen Scheitel auf der Verbindungslinie dieser Punkte liegt, annimmt, und wenn man ferner von jedem Punkte einer gegebenen Geraden nach den beiden festen Punkten gerade Linien zieht, so treffen diese respective die beiden Schenkel des Winkels in zwei Punkten, deren Verbindungslinie immer durch denselben Punkt geht.” (*Simson*, *de Porismatibus*, Prop. 34.) Wir haben hier diesen Satz angeführt, weil er uns in der Folge von Nutzen sein wird. Sein analoger im Raume, welcher bis jetzt noch nicht gegeben wurde, stellt sich als ganz natürliche Folge aus unsern Principien über die Transformation der Figuren dar.

§. 32. Wir müssen noch eine Untersuchung erwähnen, welche sich wie die vorigen an die Theorie der Transversalen anschliesst; es ist dieses das berühmte Problem *ad tres aut plures lineas*, von welchem Pappus als von einer Klippe der Alten berichtet und welchem Descartes eine neue Berühmtheit verschafft hat, indem er bei demselben die erste Anwendung seiner Geometrie machte. Es handelt sich hierbei darum, *wenn mehre gerade Linien gegeben sind, den geometrischen Ort eines solchen Punktes zu finden, dass, wenn man von ihm Perpendikel oder allgemein Linien unter gegebenen Winkeln nach den gegebenen Geraden zieht, das Product gewisser unter ihnen zu dem Producte aller übrigen in einem constanten Verhältnisse stehe.*

Diese Aufgabe, welche seit Descartes unter dem Namen *Problem des Pappus* bekannt ist, hat schon den Scharfsinn des Euclid und Apollonius erprobt. Diese haben sie jedoch nur für drei oder vier Gerade gelöst, in welchem Fall der gesuchte geometrische Ort ein Kegelschnitt ist, woraus folgende allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte folgt: Wenn ein beliebiges Viereck einem Kegelschnitte einbeschrieben ist, so steht das Product der Entfernungen jedes Punktes der Curve von zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks zum Product der Entfernungen desselben Punktes von den beiden andern Seiten in einem constanten Verhältniss.

Newton hat von diesem schönen Theorem einen rein geometrischen Beweis gegeben und sich desselben mit Vortheil in seinen *Principiis mathematicis philosophiae naturalis* bedient. Die Werke über Kegelschnitte, welche zunächst nach diesem Werke erschienen sind, haben von ihm dieses Theorem entlehnt, ohne jedoch alle die Anwendungen davon zu machen, deren es fähig ist; später ist es gewisser Maassen ganz aus der Theorie der Kegelschnitte verschwunden.[39] Inzwischen glauben wir, dass

---

39) Die Unfruchtbarkeit, an welcher dieser Fundamentalsatz Jahrhunderte hindurch litt, während sich aus ihm beinahe alle Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten, und die geringe Wichtigkeit, welche bis auf die letzte Zeit die schönen Sätze des Desargues und Pascal, die natürliche Folgerungen daraus sind, zu verdienen schienen, rufen uns eine sehr wahre Bemerkung des Bailly ins Gedächtniss: „Es scheint, dass die Ideen, wie wir, eine Kindheit und einen anfänglichen Zustand der Schwäche haben; bei ihrem Entstehen können sie noch nicht selbst zeugen, sondern verdanken ihre fruchtbringende Kraft erst dem Alter und der Zeit." (*Histoire de l'astronomie moderne*, tom. II, p. 60.)

man es als die allgemeinste und fruchtbringendste Eigenschaft dieser Curven betrachten könne. Wir führen besonders als einfache Folgerungen aus diesem Satze an: das bekannte mystische Sechsek des Pascal, das Theorem des Desargues über die Involution von 6 Punkten, das constante Verhältniss des Quadrats der Ordinaten zum Product der auf der Axe abgeschnittenen Segmente, das schöne Theorem von Newton über die organische Beschreibung der Kegelschnitte, und endlich ein anderes Theorem, welches sich auf den Begriff des von uns oben *anharmonisch* genannten Verhältnisses gründet, aus dem sich eine grosse Menge von Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten lässt. Beiläufig fügen wir noch hinzu, dass dieses letzte Theorem an sich selbst von solcher Allgemeinheit ist und sich *a priori* so leicht beweisen lässt, dass es dasjenige ist, welches wir als Fundamentalsatz einer Theorie der Kegelschnitte aufstellen würden. (S. Note XV.)

§. 33. Hier drängt sich uns eine ganz natürliche Bemerkung auf, welche zugleich die Wichtigkeit rechtfertigen kann, die wir dem 129sten Satze des Pappus und dem Begriff des anharmonischen Verhältnisses zu geben gesucht haben. Alle Theoreme nämlich, welche wir aus dem 7ten Buch der mathematischen Sammlungen angeführt, hierunter das über die Deformation der Polygone und das *ad quatuor lineas* und mehre andere Theoreme über die Involution von 6 Punkten, wovon wir sogleich weiter sprechen werden: alle diese Theoreme, welche von der grössten Allgemeinheit und dem grössten Nutzen in der neuern Geometrie sind, lassen sich als aus ihrer gemeinsamen Quelle aus der einzigen Eigenschaft des anharmonischen Verhältnisses unter 4 Punkten ableiten. Und diese Art sie darzustellen wird sogar noch die möglich einfachste; denn sie bedarf so zu sagen keines Beweises.

Wir fügen noch hinzu: Nachdem wir erkannt haben, dass der grösste Theil der Lemmen des Pappus, die sich auf das erste Buch der Porismen Euclids zu beziehen scheinen, aus dem in Rede stehenden Satze abgeleitet werden können, so glauben wir, dass dieser Satz sogar zu diesem ganzen ersten Buche der Porismen der Schlüssel werden und dass er zu einer Interpretation der Sätze, die uns Pappus hinterlassen hat, führen könne. Denn es existirt ja immer in jeder Theorie eine Hauptwahrheit, aus der sich die andern ableiten lassen. Und in der That, indem wir den erwähnten Satz zum Ausgangspunkt bei

einer anzustellenden Divination über die Porismen machten, erhielten wir verschiedene Theoreme, welche uns den fraglichen Sätzen zu entsprechen scheinen.

§. 34. Wir erwähnen noch aus dem 7ten Buch der mathematischen Sammlungen die 40 Lemmen, die sich auf das Werk *de determinata sectione* von Apollonius beziehen und welche in die heutigen Lehren der Geometrie eingreifen. Es sind dieses Relationen zwischen den Segmenten, welche durch mehre Punkte auf einer geraden Linie gebildet werden.

Man begreift nicht gleich Anfangs die wahre Bedeutung dieser zahlreichen Sätze, so wenig als die Beziehungen, welche sie sämmtlich an eine Frage knüpfen könnten, so dass alsdann ihre Auffassung schwierig ist. Bei einiger Aufmerksamkeit jedoch erkennt man, dass sie sich alle auf die Theorie der Involution von 6 Punkten beziehen, welche von Desargues erschaffen wurde und der neuen Geometrie so grossen Nutzen gebracht hat. Es sind zwar diese Relationen noch nicht die Eigenschaften der allgemeinsten Involutionsbeziehung zwischen 6 Punkten (es scheint sogar, dass die Alten gar nicht die Transformationen dieser allgemeinen Beziehung gekannt haben), aber es sind Eigenschaften mehrer Relationen, welche man heute als besondere Fälle dieser allgemeinen Relation betrachten kann. So behandeln die Sätze 22, 29, 30, 32, 34, 35, 36 und 44 eine Involution von 5 Punkten. Sie beziehen sich auf zwei Systeme zweier *conjugirten* [40]) Punkte und auf ihren *Centralpunkt*, welcher Punkt von der Beschaffenheit ist, dass das Product seiner Entfernungen von den beiden ersten Punkten dem Product seiner Entfernungen von den beiden andern gleich ist; woraus eine andere Beziehung zwischen den 5 Punkten abgeleitet wird.

Um diese Beziehung aus der allgemeinen unter 6 Punkten abzuleiten, muss man bemerken, dass der conjugirte des fünften oder Central-Punkts in der Unendlichkeit liegt.

---

40) Um sich das Verstehen dieser Stelle über die Lemmen des Pappus zu erleichtern, wird es vortheilhaft sein, die Xte Note nachzulesen, wo wir die verschiedenen Eigenschaften der Involutionsbeziehung zwischen 6 Punkten angeführt haben; d. h. die verschiedenen Transformationen und Folgerungen aus dieser Relation. Wir haben dort auch erkärt, was man unter *conjugirten*, *Central*- und *doppelten* Punkten zu verstehen habe.

Die Sätze 37 und 38 behandeln eine Involution von 4 Punkten, welche aus zwei conjugirten, einem doppelten und dem Central-Punkt bestehen. Von *einer* Relation unter diesen vier Punkten schliesst man auf eine andere.

Die Sätze 39 und 40 enthalten eine Eigenschaft der Involution von 5 Punkten, die man als zwei Systeme von zwei conjugirten Punkten und als einen doppelten Punkt betrachtet.

Die Sätze 41, 42 und 43 sind eine Relation unter zwei Systemen zweier conjugirten Punkte mit ihrem Centralpunkt: eine neue Relation und unter einer Form, die von den bekannten Beziehungen der Involution von 6 Punkten verschieden ist.

Ebenso enthalten die zwölf Sätze 45—56 eine allgemeine Relation zwischen zwei Systemen zweier conjugirten Punkte, ihrem Centralpunkt und irgend einem andern Punkte. Die Sätze 41, 42 und 43 sind nur Folgerungen aus diesem allgemeinern.

Die Sätze 61, 62 und 64 endlich drücken eine interessante Eigenschaft des Maximums und Minimums aus, welche sich auf zwei Systeme conjugirter Punkte und einen doppelten Punkt bezieht, und darin besteht, dass das Verhältniss der Producte aus den Entfernungen dieses doppelten Punkts von den conjugirten Punkten ein Maximum oder Minimum ist. Pappus giebt vermittelst einer eleganten Construction den geometrischen Ausdruck dieses Verhältnisses, thut aber nichts weiter, als die Eigenschaft, dass es ein Maximum oder Minimum sei, anzuführen, während der Beweis sich in dem Werke des Apollonius findet. Der geometrische Beweis für diesen Fall eines Maximums oder Minimums, von den Alten selbst geführt, ist ein wahrhafter Verlust, wenn er auch der neuern Analysis keine Schwierigkeit darbietet. Fermat machte hierauf eine der ersten Anwendungen seiner ausgezeichneten Methode *de maximis et minimis.* (*Opera mathematica*, p. 67.)

§. 35. Die gegebene Analyse der 43 Lemmen des Pappus scheint uns den allgemeinen Geist in denselben erkennen zu lassen und deren Verständniss zu erleichtern. Man sieht hier, dass gewöhnlich mehre Sätze dasselbe Theorem aussprechen, was nur darin liegt, dass die Ausdrucksweise dieser Sätze sich speciellen Figuren anschliesst, welche unter einander verschieden sind nach der verschiedenen Lage, in der sich die betrachteten Punkte befinden. Die Verschiedenheit in der gegenseitigen Lage der gegebenen Punkte gegen den gesuchten haben dem

Werke des Apollonius den Namen *de sectione determinata* gegeben; und die verschiedenen Fälle, welche die Variirung in der Lage dieser Punkte darbietet, sind das, was dieser Geometer und nach ihm Pappus mit dem Namen *ἐπίταγμα* bezeichneten. [41])

Es ist einer der grössten Vorzüge der neuern Geometrie vor der alten, dass sie vermöge der Betrachtung der positiven und negativen Quantitäten mit *einem* Ausdrucke alle verschiedenen Fälle umfasst, welche ein Theorem nach der verschiedenen gegenseitigen Lage der einzelnen Theile der Figur darbieten kann. So bilden heut zu Tage die 9 Hauptprobleme und ihre zahlreichen speciellen Fälle, welche den Gegenstand von 83 Sätzen in den beiden Büchern *de sectione determinata* ausmachen, nur *eine* Aufgabe, die durch *eine einzige* Formel aufgelöst wird.

Viele Autoren haben sich in ihren Schriften über die geometrische Analyse der Alten mit der *sectio determinata* beschäftigt und theils versucht, die beiden Bücher vollständig wieder herzustellen, theils nur einzelne abgerissene Aufgaben aufgelöst. Im 17ten Jahrhundert finden wir als solche: Snellius, Alexander Anderson, Marini Ghetaldi; gegen das Ende desselben Jahrhunderts: Roger von Vintimiglia, Hugo von Omerique; darauf R. Simson in seinem hinterlassenen Werk *Opera reliqua* 1776, und um dieselbe Zeit Giannini in seinen *Opusculis mathematicis*.

In der letzten Zeit hat noch J. Lesli in seiner *Geometrical Analysis* (Buch 2, Satz 10—18) diesem Problem einige Seiten gewidmet. Letztere Untersuchung ist aufs innigste mit der Theorie der Involution von 6 Punkten verbunden, deren Lösung, wie es scheint, aus dieser Theorie abgeleitet werden muss. In der That bietet eine neue Eigenschaft der Involution uns ganz von selbst eine einfache und allgemeine Construction des Problems *de sectione determinata* dar, welche uns von allen bisher gegebenen verschieden zu sein scheint. Dieselbe Theorie liefert auch einen Beweis für den von Apollonius behandelten Fall des Maximums. (S. Note X.)

---

41) Dieses ist die Meinung von Halley und R. Simson. Der gelehrte Commandinus hat die Bedeutung dieses Worts, welches Apollonius auf einen Theil seiner Sätze anwandte, nicht gefunden (*Collect. math.* p. 296. in der Ausgabe von 1660). Das Wort *μοναχοί*, welches man auch im Pappus findet, scheint von Apollonius für die Sätze gebraucht zu sein, welche sich auf *maxima* und *minima* beziehen.

§. 36. Die Lemmen des Pappus zu den *ebenen Oertern* des Apollonius geben auch einige Relationen zwischen den Segmenten, die auf einer Geraden durch Punkte bestimmt werden, aber sie sind verschieden von den vorhergehenden und können nicht wie diese aus den allgemeinen Beziehungen der Involution von 6 Punkten abgeleitet werden. Inzwischen kann man auch *sie* auf einen einzigen Satz zurückführen, welcher eine allgemeine Eigenschaft der vier Punkte, die auf einer Geraden willkührlich gewählt sind, ausdrückt und welcher das zweite allgemeine Theorem des Matthieu Stewart bildet. [42])

So sind die Sätze 123 und 124, welche eine Relation zwischen vier auf einer Geraden willkührlich gewählten Punkten und einem durch eine gewisse Bedingung gegebenen fünften Punkte enthalten, eine leichte Folgerung aus diesem Theorem.

Die Sätze 125 und 126 geben eine Relation zwischen vier auf einer Geraden beliebig gewählten Punkten an, wo man mit Leichtigkeit erkennt, dass diese Relation nichts Anderes als eine höchst einfache Transformation desselben Theorems ist.

Die 4 Sätze 119—122, welche mit den 4 eben genannten zusammengenommen die 8 Lemmen des Pappus zu den ebenen Oertern des Apollonius ausmachen, beziehen sich aufs Dreieck; wobei es höchst merkwürdig ist, dass diese 4 Sätze, welche als gänzlich von den andern verschieden auch durchaus keine Beziehung zu ihnen zu haben scheinen, gleichwohl Folgerungen aus demselben Theorem des Stewart sind.

§. 37. R. Simson hat bei Gelegenheit der Wiederherstellung der Porismen des Euclid und der Werke über die *sectio determinata*, und über die ebenen Oerter des Apollonius, die zahlreichen Lemmen zu diesen drei Werken einzeln bewiesen. Aus dem vorhin Gesagten sieht man zwar, dass man alle diese Sätze in einige wenige zusammenziehen und dadurch die Arbeit bedeutend vereinfachen kann; aber eine solche Vereinfachung war noch nicht im Geiste der Geometrie zur Zeit des R. Simson (es ist beinahe ein Jahrhundert seitdem vergangen), und wäre sie es auch gewesen, so hätte sie doch nicht zu

---

42) *Some general theorems of considerable use in the Higher parts of mathematics.* Edinburg 1746, in 8. — Wir werden das hier erwähnte Theorem in unsrer *vierten Epoche* anführen, wo wir von Stewart sprechen werden.

dem Zwecke dieses gewandten und tiefsinnigen Geometers gepasst, welcher sich vorgesetzt hatte, die Spur und die Andeutungen des Pappus Schritt vor Schritt zu verfolgen.

§. 38. Die andern Lemmen des 7ten Buchs der *mathematischen Sammlungen*, welche wir mit Stillschweigen übergangen haben, sind von geringerem Interesse als die genannten. Es sind dieses ganz einzeln stehende Sätze, die sich auf den Kreis, aufs Dreieck und auf die Kegelschnitte beziehen und die durchaus keine Schwierigkeit darbieten. Sie finden ihre Anwendung in den Werken *de inclinationibus*, *de tactionibus* und *octo libri conicorum* des Apollonius und in den *libri duo locorum ad superficiem* des Euclid.

Wir beschränken uns darauf, von den Lemmen, die sich auf die Abhandlung *de tactionibus* beziehen, folgendes von Pappus sehr einfach gelöste Problem hervorzuheben: „Durch drei in einer geraden Linie gegebene Punkte drei Gerade zu legen, so dass das von ihnen gebildete Dreieck einem gegebenen Kreise eingeschrieben sei." (Satz 117.) Die Sätze 105, 107 und 108 sind specielle Fälle dieser Aufgabe, indem man einen der drei Punkte in der Unendlichkeit annimmt.

Indem man die Lage der drei Punkte ganz willkührlich annahm, ist dieses so verallgemeinerte Problem theils durch die Schwierigkeit, welche es darbietet, theils durch die Namen der Geometer; welche es behandelten, berühmt geworden, und ganz vorzüglich durch die ebenso allgemeine als einfache Lösung, welche ihm ein neapolitanischer Jüngling von 16 Jahren, Oltajano, gab. (S. Note XI.)

Wir führen endlich noch den 238sten und letzten Satz an, welcher sich auf die *loci ad superficiem* bezieht und welcher die Eigenschaft der Directrix in den drei Kegelschnitten angiebt. Er heisst: „Die Entfernungen eines jeden Punktes des Kegelschnitts vom Brennpunkt und von der Directrix stehen unter einander in constantem Verhältniss." Dieser schöne Satz findet sich nicht in den Kegelschnitten des Apollonius.

§. 39. Das 8te Buch der Sammlungen behandelt vorzüglich die Maschinen, welche in der practischen Mechanik gebraucht werden, und spricht auch von ihrer Anwendung auf die organische Beschreibung der Curven. Aber auch verschiedene geometrische Sätze finden sich darin, worunter der eine über den Schwerpunkt eines Dreiecks merkwürdig ist, den wir in folgender Weise

aussprechen: „Wenn drei bewegliche Körper, welche sich ursprünglich in den Scheiteln eines Dreiecks befinden, zu gleicher Zeit sich von diesen entfernen, und indem sie sich in demselben Sinne fortbewegen, resp. die drei Seiten mit einer Geschwindigkeit durchlaufen, welche diesen Seiten proportional ist, so bleibt ihr Schwerpunkt unverändert."

Die neuern Geometer haben dieses Theorem auf irgend ein Vieleck, ein ebenes oder nicht ebenes, ausgedehnt. Montucla bewies es in seiner Ausgabe der *Récréations mathématiques d'Ozanam* durch Betrachtungen aus der Mechanik, und glaubte, dass ein Beweis durch reine Geometrie Schwierigkeiten darbiete. Der aber, welchen Pappus giebt, stützt sich auf den berühmten ptolemäischen Satz über die Segmente, welche auf den drei Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale gebildet werden. Pappus nimmt im Verlauf seines Beweises diesen Satz als bekannt an, während er ihn selbst erst später beweist.

§. 40. Der 14te Satz desselben Buches ist eine sehr einfache Auflösung folgenden Problems: „Wenn zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse gegeben sind, die beiden Hauptaxen ihrer Grösse und Richtnng nach zu finden." Pappus giebt seine Construction, aber ohne Beweis. Euler restituirte den Beweis und gab zugleich mehre andere Lösungen desselben Problems. (*Novi commentarii Petropol.* t. III. ann. 1750 — 1751.) Andere Geometer haben es ebenfalls nach ihrer eigenen Manier behandelt.

Indem wir die analoge Aufgabe im Raume gelöst haben, wo es sich darum handelt, der Grösse und Richtung nach die drei Hauptaxen eines Ellipsoids zu finden, wenn drei conjugirte Durchmesser desselben gegeben sind, so schlossen wir daraus auf eine neue Construction der Axen der Ellipse, welche uns den Grad der Einfachheit, den schon mehre Lösungen dieses Problems erreicht haben, zu übertreffen scheint. 43) Und in der That ist es eine Bemerkung, welche man häufig bei dem Studium der Geometrie machen kann, dass diejenigen Lösungen in der ebenen Geometrie, welche ihre analoge im Raume haben,

---

43) Es sei o der Mittelpunkt einer Ellipse, oa und ob die gegebenen Hälften der conjugirten Durchmesser; durch den Punkt a ziehe man eine Senkrechte auf ob, schneide auf dieser die beiden Segmente ae und ae^1, jedes gleich ob, ab, und ziehe die beiden Geraden oe und oe^1: dann theilen die beiden Hauptaxen der Ellipse den Winkel dieser beiden Geraden und dessen Nebenwinkel in zwei gleiche Theile, und die grosse Axe wird gleich der Summe dieser beiden Geraden, die kleine Axe gleich ihrer Differenz.

stets die allgemeinsten und einfachsten sind. Dieses Princip bildet gewisser Maassen den Probirstein und das Kriterium, ob man bei einer Aufgabe zu der Allgemeinheit und Vollständigkeit, deren sie fähig ist, gelangt sei, oder in andern Worten, ob man die Methode und den Weg, welche ihr gerade eigenthümlich sind, getroffen habe.

§. 41. Die Vorrede zum 7ten Buch der *mathematischen Sammlungen* enthält eine klare Definition von Analysis und Synthesis, welche über den genau begrenzten Charakter beider Methoden keinen Zweifel übrig lassen, wozu noch kommt, dass Pappus im Verlaufe dieses 7ten Buchs häufig bei derselben Aufgabe Beispiele von beiden giebt.

Nach dieser Definition führt Pappus die Titel der Werke an, welche die Alten über den *locus resolutus*, wie sie es nannten, verfasst haben. Mit diesem Namen bezeichnen sie gewisse Materien, welche Jemand nothwendig kennen muss, wenn er Aufgaben will lösen können. Diese Werke waren grossen Theils Beispiele ihrer geometrischen Analysis, deren Titel, wie sie Pappus angiebt, folgende sind: ein Buch *Data* von Euclid; zwei Bücher *de sectione rationis*, zwei Bücher *de sectione spatii* und zwei Bücher *de contactu* von Apollonius; drei Bücher *Porismata* von Euclid; zwei Bücher *de inclinatione*, zwei Bücher *de locis planis* und acht Bücher *Conica* von Apollonius; fünf Bücher *de locis solidis* von dem ältern Aristäus; zwei Bücher *de locis ad superficiem* von Euclid; zwei Bücher *de media ratione* von Eratosthenes. Zu diesem Verzeichniss muss man noch zwei Bücher *de sectione determinata* von Apollonius hinzufügen, wovon Pappus später spricht. Von allen diesen Werken sind nur die *Data* des Euclid, 7 Bücher der *Conica* von Apollonius und des letztern Abhandlung *de sectione rationis* auf uns gekommen. Nach dem aber, was Pappus über dieselben gesagt hat, wurden die übrigen im 16ten und 17ten Jahrhundert von verschiedenen Geometern in der Weise der alten Geometrie wieder hergestellt.

§. 42. Die Lust an dieser Geometrie, welche bis beinahe vor einem Jahrhundert den mathematischen Wissenschaften ein so bedeutendes Ansehn verschaffte, hat sich seitdem besonders in dem Vaterlande des Newton sehr verloren und würde beinahe gänzlich verschwunden sein, wenn ihr nicht die italienischen Geometer treu geblieben wären. In unserer Zeit verdanken wir dem Fergola und seinen Schülern Bruno, Flauti und Scorza mehre bedeu-

tende Werke über die geometrische Analysis der Alten, welche sich in ihrer ursprünglichen Reinheit wieder hergestellt findet. Die von den Alten über diesen Gegenstand verfassten Werke, deren Titel wir so eben aus dem Pappus angeführt haben, bilden ein System von *Ergänzungen* zur Geometrie, welche diese Wissenschaft gewiss schneller vorwärts gebracht haben würden, wenn sie uns unverkürzt beim Wiederaufleben der Wissenschaften überliefert wären. Der neuern Geometrie fehlt es gänzlich an dergleichen *Ergänzungen*; denn man fühlt, dass wegen der bedeutenden Fortschritte und Vervollkommnung dieser Disciplin dieselben auf ganz andern Grundlagen ruhen müssten, als die der griechischen Schule: sie müssten vor allen Dingen das Gepräge der Einfachheit und der Allgemeinheit an sich tragen, welche den Hauptcharakter der neuern Geometrie bilden.

Serenus. §. 43. Um die Zeit des Pappus erwarb sich auch noch ein Geometer, Serenus, durch ein Werk [44]) über den *Schnitt des Cylinders und Kegels* in zwei Büchern einige Berühmtheit; er bewies darin gegen die Meinung der meisten Geometer seiner Zeit die Identität der Ellipsen, welche man auf den beiden genannten Körpern, wenn man sie mit kreisförmiger Grundfläche und schief annimmt, bildet.

Im ersten Buch verdienen folgende beide Aufgaben ausgezeichnet zu werden, da ihre Lösungen so einfach und so elegant sind, dass sie nichts zu wünschen übrig lassen: „Es sei ein schiefer Kegel mit einem Kreise als Grundfläche in einer Ellipse geschnitten, man soll durch diese Ellipse einen Cylinder legen, dessen Grundfläche wieder ein Kreis ist, und zwar in derselben Ebene mit der Grundfläche des Kegels." (Satz 20.) und umgekehrt: „Es sei ein Cylinder in einer Ellipse geschnitten u. s. w." (Satz 21.)

Serenus nimmt wie Apollonius an, dass die schneidende Ebene senkrecht auf dem Axendreieck des Kegels stehe; wobei ich zugleich bemerken will, da wir von hier ab bis auf die neuere Zeit keinen andern Schriftsteller über die Kegelschnitte finden, dass es scheint, als hätten die Alten diese Curven nur auf diese besondere Art gebildet, d. h. nur durch Ebenen, welche nothwendig senk-

44) Halley hat diese beiden Bücher griechisch und lateinisch wieder abdrucken lassen als Anhang zu seiner Ausgabe der Kegelschnitte des Apollonius.

recht auf dem Axendreieck stehen, und als hätten sie die Frage, welche Curven durch andere Schnitte, die ganz willkührlich geführt werden, entstehen, gar nicht behandelt, wenigstens nicht gelöst. Vielleicht bot sie ihnen Schwierigkeiten dar, welche zu überwinden erst den Neuern aufbehalten war. Wir werden sehen, dass Desargues das Verdienst hatte, diesen wichtigen Schritt in der Theorie der Kegelschnitte zuerst zu thun, welchem sogleich Pascal und hernach De La Hire folgten.

Uebrigens müssen wir noch bemerken, dass der Kegel mit einer kreisförmigen Basis, an welchem die Alten ihre Kegelschnitte bildeten, ihnen im Uebrigen vollkommen fremd geblieben ist, so dass wir mit Ausnahme des Satzes über den Wechselschnitt keine Eigenschaft desselben von ihnen gelernt haben. Erst in letzterer Zeit hat man sich mit dieser ein neues Feld zu Untersuchungen darbietenden Materie beschäftigt.

Diocles.

§. 44. Diocles, der Erfinder der Cissoide, deren er sich zur Aufsuchung der beiden mittlern Proportionalen bediente, lebte beinahe ein Jahrhundert nach Pappus. Wir haben von ihm vermittelst der Kegelschnitte die Auflösung einer schwierigen Aufgabe, nämlich die Kugel durch eine Ebene nach einem gegebenen Verhältniss zu theilen, welche von Archimedes behandelt wurde, der uns jedoch die versprochene Construction nicht hinterlassen hat. Da dieses Problem von einer Gleichung des dritten Grades abhängt und folglich nur durch einen Kegelschnitt oder durch eine Curve höherer Ordnung construirt werden kann, so ist es wahrscheinlich, dass Archimed, welcher zur Auflösung von Aufgaben immer nur Lineal und Zirkel gebrauchte, diese Untersuchung nicht weiter verfolgt hat, obgleich er die Auflösung versprochen hatte. [45]). Die Construction des Diocles ist uns von Eutocius, in seinem Commentar zum zweiten Buch des Werkes über Kugel und Cylinder von Archimedes, aufbehalten worden.

---

45) Diese Aufgabe ist der 5te Satz im zweiten Buch des Werks über *Kugel und Cylinder*. Sie hat zu einer sehr interessanten Bemerkung von Poinsot Gelegenheit gegeben, die in dem *Commentaire de Peyrard, sur les oeuvres d'Archimède*, p. 462 steht, wo man die geometrische Deutung der beiden Wurzeln findet, welche der Untersuchung bei der Kugel fremd sind; diese beziehen sich nämlich auf eine allgemeinere Untersuchung, welche die Kugel und das Drehungs-Hyperboloid zu gleicher Zeit umfasst.

Proclus. §. 45. Um die Mitte des 5ten Jahrhunderts beschäftigte sich noch ein berühmter Philosoph, Proclus, Vorsteher der platonischen Schule zu Athen, mit der Mathematik und trug durch seine Schriften und Lehren wesentlich dazu bei, noch einige Zeit hindurch ihre Bedeutsamkeit zu erhalten. Von diesem Geometer ist uns ein Commentar zum ersten Buch des Euclid übrig geblieben, welcher sorgfältige Bemerkungen enthält, die sich auf die Geschichte und Metaphysik der Geometrie beziehen. Man findet darin die Beschreibung der Ellipse durch die continuirliche Bewegung eines Punktes, der in einer geraden Linie liegt, deren Endpunkte auf den Seiten eines Dreiecks hingleiten. [46]

Von den Philosophen, welche dem Proclus in seiner Schule folgten, erwähnen wir als solcher, die der Geometrie einige Dienste geleistet, zuerst des *Marinus.* Marinus, des Verfassers einer Vorrede oder Einleitung zu den *Datis* des Euclid, worin er die Natur und die Anwendung der *Data* auseinandersetzt; und dann des *Isidorus von Milet.* Isidorus von Milet, der, in Geometrie, Mechanik und Baukunst gleich bewandert, Erfinder eines Instruments wurde, die Parabel durch eine continnirliche Bewegung zu beschreiben und dadurch das Problem von der Verdoppelung des Kubus zu lösen. Dieses ist offenbar nebst der von Proclus angegebenen Construction der Ellipse das erste Beispiel von einer organischen Beschreibung der Kegelschnitte, woraus die Neuern ein besonderes Studium gemacht haben. Das Instrument, von dem Eutocius spricht, ist dem griechischen Buchstaben λ ähnlich.

Eutocius, um 540. Eutocius, ein Schüler des Isidor, hat uns Commentare zu den Kegelschnitten des Apollonius und zu einigen Werken des Archimedes hinterlassen. Der zum zweiten Buch der *Kugel und Cylinder* ist für die Geschichte der Wissenschaft von besonderer Wichtigkeit, weil er Fragmente der Geometrie von den ältesten uns bekannten Schriftstellern enthält, deren Werke nicht auf uns gekommen sind. Diese Fragmente beziehen sich auf die Probleme von der Verdoppelung des Kubus und von den beiden mittlern Proportionalen. Wir haben im Anfang dieser Epoche die Schriftsteller genannt, welche Eutocius in diesem Werke als solche anführt, die sich mit diesen beiden Sätzen beschäftigt haben. Auch

46) Commentar zu der 4ten Definition des 1sten Buchs des Euclid.

ist es hier, wo Eutocius bei Gelegenheit der Auflösung des Menächmus von dem Instrumente spricht, dessen sich Isidor zur Beschreibung der Parabel durch eine continuirliche Bewegung bedient hat.

§. 46. Die Arbeiten der eben genannten Mathematiker waren die letzten, welche die Alexandrinische Schule berühmt machten. Die Künste und Wissenschaften nahmen schon ab, als Aegypten Eigenthum der Araber wurde, und der Brand der herrlichen Bibliothek der Ptolemäer, dieser kostbaren Niederlage aller Productionen des Genies und der Bildung von 10 Jahrhunderten, wurde das Signal zu der Barbarei und der langen Finsterniss, welche den menschlichen Geist umgab.

Inzwischen erkannten nach einem oder zwei Jahrhunderten dieselben Araber ihre Unwissenheit an und unternahmen es selbst die Wissenschaften wieder herzustellen. Eben sie haben theils als Text selbst, theils als Uebersetzung in ihre Sprache uns die Manuscripte überliefert, welche ihrer fanatischen Wuth entgangen waren. Dieses ist aber auch beinahe die einzige Verbindlichkeit, welche wir ihnen schulden. Denn die Geometrie blieb unter ihren Händen mit Ausnahme der Berechnung sphärischer Dreiecke auf demselben Flecke stehen; in ihren Arbeiten begnügen sie sich, die griechischen Werke zu bewundern und zu commentiren, als wenn diese die äusserste und erhabenste Grenze der Wissenschaft bezeichnet hätten.

Zweites Kapitel.

Zweite Epoche.

§. 1. Die Stockung in den Wissenschaften währte bei den Arabern und andern Nationen nach der Zerstörung des Museums zu Alexandrien beinahe 1000 Jahre. Erst um die Mitte des 15ten Jahrhunderts, nach der allgemeinen Anregung der Wissenschaften, fand auch die Geometrie wieder Berücksichtigung. Ihre Fortschritte waren anfangs langsam, aber nichts desto weniger nahmen sie sehr bald einen Character von Allgemeinheit und Abstraction an, den sie bis dahin nie gehabt hatten. Denn in der That, keine der frühern Methoden liess eine Verallgemeinerung zu, sondern beschränkte sich nur auf die besondere Untersuchung, welche zu ihr die Veranlassung gegeben hatte: jede bekannte Curve (und deren Zahl war sehr beschränkt) wurde abgesondert und durch Hülfsmittel behandelt, die ihr speciell angehörten, und ohne dass ihre Eigenschaften und die Verfahrungsarten, welche dazu geführt hatten, zur Entdeckung der Eigenschaften einer andern Curve dienen konnten. Wir führen als Beispiel das berühmte Problem der Tangenten an, welches für einzelne Curven, wie die Kegelschnitte und die Spirale des Archimedes, durch äusserst tiefsinnige, aber unter einander so wesentlich verschiedene Betrachtungen gelöst war, dass man daraus keinen Aufschluss für die Lösung desselben Problems in Bezug auf andere Curven erhalten konnte.

Die Exhaustions-Methode, obgleich sie auf einer durchaus allgemeinen Idee beruht, hat dennoch der alten Geometrie nicht den Character der Eingeschränktheit und Specialität nehmen können; denn der Begriff von derselben entbehrte die allgemeinen Mittel zur Anwendung, so dass

jeder besondere Fall eine neue Aufgabe wurde, welche ihre Hülfsmittel nur in den individuellen Eigenschaften der zugehörigen Figur fand. Aber dennoch macht diese Methode den Geometern des Alterthums die grösste Ehre, sie war der Keim zu einer Reihe von Methoden für die Bestimmung der *Quadraturen*, welche in der ganzen Folgezeit den berühmtesten Mathematikern Gegenstand ihrer Bemühungen wurde, und deren endliches Ziel, ich mögte beinahe sagen der Triumph, die Erfindung der Infinitesimalrechnung geworden ist.

Diese Betrachtungnn, welche den Unterschied zwischen speciell und allgemein, zwischen concret und abstract, überhaupt das hervorheben sollen, wodurch die Geometrie bis zum 15ten Jahrhundert von der spätern verschieden ist, veranlassen uns, die ganze erste Epoche als nur Präliminarien zur Wissenschaft enthaltend zu betrachten. Der Character der Allgemeinheit und der Abstraction, welchen später die Geometrie annahm, spricht sich immer mehr und mehr in den folgenden Epochen aus und bildet gegenwärtig einen ungeheuern Abstand zwischen der heutigen Geometrie und der der Alten.

§. 2. Die hauptsächlichsten Entdeckungen bei dem Wiederaufleben der Geometrie verdankt man Vieta und Kepler, welche in mehrfacher Hinsicht die ersten Urheber unserer Superiorität über die Alten sind. (S. Note XII.)

Vieta, 1540 — 1603.

Nachdem Vieta die analytische Methode vervollständigt hatte, wurde ihm auch durch die Erfindung der Algebra oder *logistica speciosa*, welche bestimmt war, diese Methode auf die Wissenschaft von den Zahlen anzuwenden, noch der Ruhm zu Theil, dieses bewunderungswürdige Hülfsmittel in die Wissenschaft von den ausgedehnten Grössen eingeführt und durch die graphische Construction der Gleichungen vom zweiten und dritten Grade die Geometer in die Kunst eingeweiht zu haben, die Resultate der Algebra geometrisch zu construiren. Dieses war der erste Schritt zur genauern Vereinigung der Algebra mit der Geometrie, welcher zu den herrlichen Entdeckungen eines Descartes geführt hat und der Schlüssel zu der gesammten Mathematik wurde.

Dem Vieta verdankt man die Lehre von den *sectiones angulares*, d. h. die Kenntniss des Gesetzes, nach welchem die Sinus oder Chorden der vielfachen Bögen oder ihrer aliquoten Theile wachsen oder abnehmen. Die erste Idee, die Fläche einer Curve durch eine unendliche Reihe

von Gliedern auszudrücken, findet sich ebenfalls in den Werken dieses grossen Geometers.

Vieta war auch in der Geometrie der Alten nicht weniger bewandert als in der algebraischen Analysis. Er restituirte das Werk des Apollonius *de tactionibus* unter dem Titel *Apollonius Gallus*, worin er zuerst das Problem, einen Kreis zu construiren, welcher drei in einer Ebene gegebene Kreise berührt, womit sich damals die Geometer beschäftigten und welches viel Schwierigkeit machte, auflöste. Der berühmte Adrianus Romanus löste es nur mit Hülfe zweier Hyperbeln, was gegen die Regel einer guten Methode, wonach die gerade Linie allein hinreichen musste, ein Fehler war. Dieselbe Aufgabe wurde von Vieta wieder aufgenommen (*Opera Vietae*, p. 325, Ausgabe von Schooten, 1646). Seitdem haben sich noch die grössten Geometer mit diesem Problem beschäftigt und verschiedene Auflösungen davon gegeben, unter denen besonders die von Descartes, Newton [1]), Th. Simpson, Lambert, Euler und Fuss zu nennen sind. Den neuern Methoden jedoch bietet es keine Schwierigkeit dar, im Gegentheil erhält man Lösungen, welche in theoretischer wie in practischer Hinsicht unvergleichlich eleganter und leichter sind, als alle andern [2]), so dass die Berühmtheit dieses Problems nur noch in den bedeutenden Namen liegt, welche dessen Geschichte anführt. [3])

Unter den geometrischen Schriften des Vieta ist noch eine unter dem Titel *Variorum de rebus mathematicis re-*

---

1) Man findet eine analytische Lösung des in Rede stehenden Problems in der *Arithmetica universalis* (Prob. 47) und eine rein geometrische Lösung im 1sten Buch der *Principia philosophiae naturalis* (Lem. 16); letztere ist auf die Betrachtung der beiden Hyperbeln des Adrianus Romanus gegründet, welche Newton aber nicht wirklich construiren darf, um ihren Durchschnittspunkt zu finden; sondern er bestimmte dafür zwei Gerade, welche sich in diesem Punkte schneiden müssen.

2) Man kann sogar die Aufgabe allgemeiner machen, indem man gewisse Kegelschnitte statt der Kreise nimmt, ohne dass die Einfachheit der Construction verloren geht. (S. Note XXVIII, wo dieselbe Aufgabe für die Kugel und noch allgemeiner für die Oberflächen zweiter Ordnung behandelt wird.)

3) Camerer hat vor etwa 40 Jahren ein interessantes Werk herausgegeben, welchem der *Apollonius Gallus* des Vieta beigegeben ist; der Titel dieses Werks, welcher zugleich die verschiedenen darin enthaltenen Materien angiebt, ist folgender: *Apollonii de Tactionibus quae supersunt, ac maxime Lemmata Pappi in hos libros graece, nunc primum edita e codicibus msceptis, cum Vietae librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus, ac problematis Apolloniani historia.* Gothae 1795, in 8.

sponsorum liber VIII in 20 Kapiteln zu bemerken, worin hauptsächlich von der Auflösung der sphärischen Dreiecke, von der Verdoppelung des Kubus und von der Quadratur des Zirkels gehandelt wird. Die Versuche der Alten für die Lösung dieser beiden grossen Probleme sind in diesem Werke mit einer solchen Genauigkeit und einer solchen Uebermacht des Wissens vorgetragen, welche es lebhaft bedauern lassen, dass die übrigen Theile, welche nothwendig diesen vorhergegangen sein müssen, nicht auf uns gekommen sind.

Die sphärische Trigonometrie wurde von Vieta durch die nützlichsten Sätze vervollständigt, worunter die Auflösung solcher Fälle über das Dreieck, welche nicht gerade in der Astronomie ihre Anwendung finden, wie z. B. die Bestimmung eines Winkels aus drei Seiten u. dergl., bemerkt zu werden verdient. Diese Untersuchungen, welche die Lehre von den sphärischen Dreiecken ergänzten, haben Vieta auf die Entdeckung der zwei allgemeinen analytischen Formeln geführt, welche alle Fälle der sphärischen Trigonometrie in sich fassen. Die beiden andern, von denen die erste ihrem Wesen nach den Griechen, ohne ausdrücklich von ihnen ausgesprochen zu sein, bekannt war, sind von den Arabern entdeckt, welche sich viel mit der Trigonometrie beschäftigten.

§. 3. Wir müssen in der Trigonometrie noch eine neue und höchst glückliche Idee von Vieta anführen, die in directer Beziehung zu den neuen Lehren der Geometrie steht: es ist dieses die Transformation eines sphärischen Dreiecks in ein anderes, dessen Winkel und Seiten auf gewisse Weise den Seiten und Winkeln des gegebenen entsprechen. Er sagt: „Wenn man für die drei Scheitel eines sphärischen Dreiecks als Pole, Bögen grösster Kreise beschreibt, so wird das hierdurch entstandene Dreieck das *reciproke* von dem ersten sowohl in Bezug auf die Winkel als auf die Seiten." Wir fügen aber sogleich hinzu, dass dieses *reciproke* Dreieck nicht genau dasselbe als das heutige *Polar- oder Supplementar-Dreieck* ist, in welchem die Seiten die Supplemente der Winkel des primitiven Dreiecks und die Winkel die Supplemente der Seiten sind; in dem Dreieck des Vieta dagegen sind zwei Seiten geradezu gleich den Winkeln des vorgelegten Dreiecks und die dritte Seite gleich dem Supplement des dritten Winkels. Es findet nun zwar die vollständige Reciprocität der beiden Supplementardreiecke, woraus jene constante *Dualität* der Eigenschaften der sphärischen Fi-

guren folgt, bei den Dreiecken des Vieta nicht statt; aber diese Idee, die Dreiecke so umzuformen, was in gewissen Fällen der Trigonometrie von Nutzen ist, verdient doch angeführt zu werden, weil es der erste Schritt des Erfindungsgeistes und der erste Keim zu den allgemeinen Methoden der gegenwärtig gebräuchlichen Dualisation war.

Die Geometer, welche nach Vieta über sphärische Geometrie schrieben, nahmen diese glückliche Neuerung an und transformirten ebenfalls die sphärischen Dreiecke, aber immer in dasselbe reciproke Dreieck des Vieta. Dergleichen Schriftsteller sind: Adrian Metius, Magini, Pitiscus, Neper und Cavalleri.[4]) Gellibrand, der auch diese Transformation anwandte, scheint die Relationen nicht genau genug beachtet zu haben, welche zwischen den correspondirenden Dreiecken stattfinden.

Der Entdecker des wahren supplementären Dreiecks, welches nothwendiger Weise aus der Transformation des Vieta hervorgehen musste, ist Snellius. Dieser berühmte Geometer stellte es als ein sehr nützliches allgemeines Princip auf und zeigte dessen Nutzen in seiner *Doctrina triangulorum*, welche 1627 nach seinem Tode erschien. (Buch III, Satz 8.)

Wenn man dieses Princip des Snellius ganz abstract betrachtet und nicht allein als Mittel zur Lösung einiger Fälle der sphärischen Trigonometrie, so beruht auf ihm das Gesetz der Dualität in der Geometrie der Kugel; ein Gesetz, welches seit jener Zeit bekannt ist, dessen grosse Wichtigkeit aber man nicht auffasste, denn nirgend ist es in allen seinen Folgerungen systematisch behandelt. Obgleich auch das allgemeine Gesetz der Dualität der ausgedehnten Grössen, d. h. die doppelte Ansicht, welche alle Erscheinungen des abgebildeten Raums darbieten, unmittelbar aus der Dualität der sphärischen Sätze hätte abgeleitet werden können, wie wir es bei der Behandlung unserer fünften Epoche zeigen werden, so erkannte man es doch erst in der letzten Zeit und zwar vermittelst zwar tiefsinniger aber weniger directer Betrachtungen.

---

4) Es würde schwierig sein, in der Trigonometrie des Vieta die Relationen zwischen seinen beiden reciproken Dreiecken ordentlich zu erkennen, dagegen sind sie von Neper in seiner *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (in 4., 1614) und von Cavalleri zuerst in seinem *Directorium generale uranometricum* (in 4., 1632) und später in seiner *Trigonometria plana et sphaerica* (in 4., 1643) vollständig und klar durchgeführt.

§. 4. Kepler, in seiner neuen Stereometrie[5]), führte zuerst den Gebrauch des Unendlichen in die Geometrie ein; eine tiefsinnige Idee, welche nach der von Archimedes so gewandt benutzten Exhaustionsmethode der zweite Schritt zu den Infinitesimal-Methoden war. Kepler benutzte seine Methode, um das Volumen eines Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung eines Kegelschnitts um eine in seiner Ebene gelegene Gerade erzeugt wird, welches für die damalige Zeit eine wichtige und mit grossen Schwierigkeiten verbundene Erweiterung der archimedischen Probleme über die Conoide und Sphäroide war.

Kepler, 1576 — 1631.

Auch war es Kepler, welcher die glückliche Bemerkung machte, dass der Zuwachs einer Variabeln, z. B. der Ordinate einer Curve, in einer unendlich kleinen Entfernung vom Maximum oder Minimum gleich Null ist; eine Bemerkung, welche den Grund für die zwanzig Jahre später von Fermat gegebene analytische Regel *de maximis et minimis* enthält.

Ebenso müssen wir der schönen Projectionsmethode von Kepler erwähnen, die er dazu anwandte, durch eine graphische Constructionen die Erscheinungen der Sonnenfinsterniss für die Bewohner der verschiedenen Punkte auf der Erde zu bestimmen. Es war dieses 200 Jahre vor der Erfindung der beschreibenden Geometrie eine sinnreiche Anwendung der Projectionslehre, wie man sie heut zu Tage macht. Auch ist diese Methode von den berühmten Astronomen und Geometern Cassini, Flamsteed, Wren und Halley befolgt und von Lagrange in einem Memoire verallgemeinert worden, worin es interessant zu sehen ist, mit welcher Gewandtheit der berühmte Verfasser der *Mécanique analytique* sich der Verfahrungsart der beschreibenden Geometrie zu bedienen gewusst hat, und zwar 20 Jahre früher, ehe das Erzeugniss des Geistes von Monge bekannt wurde.[6])

Die Arbeiten von Kepler eröffneten ein weites Feld für neue Betrachtungen, und wenn dieser philosophische Kopf, der ganz die neue Astronomie geschaffen hat, die Kräfte seines Geistes noch weiter auf die reine Geometrie

---

5) *Nova stereometria doliorum, etc. Accessit stereometriae Archimediae supplementum*, in fol., Lincii 1615.

6) Das Memoire von Lagrange wurde in der Berliner Academie im Jahre 1778 gelesen und deutsch in den Jahrbüchern von 1781 gedruckt. Französisch erschien es in der *Connaissance des Temps* für 1819.

verwandt hätte, so würde diese Wissenschaft gewiss durch ihn sehr beträchtliche Fortschritte gemacht haben.

Cavalleri, 1598 — 1647. §. 5. Einige Jahre, nachdem Kepler seine Methode zur Bestimmung des körperlichen Inhalts der Conoide gegeben hatte, wurde die Wissenschaft durch eine andere berühmte Theorie von derselben Art, die ebenfalls zur Berechnung von geometrischen Grössen und zwar vermittelst ihrer Elemente bestimmt war, nämlich durch die *Geometrie des Untheilbaren* von Cavalleri (1635), bereichert, und dadurch zugleich die Epoche der grossen Fortschritte in der neuern Zeit bezeichnet. Diese Methode, welche vorzüglich zur Bestimmung des Flächeninhalts, des Volumens und des Schwerpunkts von Körpern geeignet ist, und welche 50 Jahre hindurch mit Glück die Stelle der Integralrechnung vertreten hat, war, wie Cavalleri selbst zeigt, nichts Anderes, als eine glückliche Anwendung oder vielmehr eine Umformung der Exhaustionsmethode.

Guldin, 1577 — 1643. §. 6. Zwischen den Entdeckungen von Kepler und Cavalleri müssen wir noch die berühmte Regel des Guldin nennen, welche, wie wir gesagt, bis auf Pappus zurückgeht, aber unbemerkt geblieben war, bis Guldin sie auf seinem Wege fand und sich derselben zur Auflösung schwieriger Probleme, die sich andern Verfahrungsarten nicht fügen wollten, bediente. Diese Methode jedoch war nicht wie die des Kepler und Cavalleri dazu bestimmt, die Grenzen der Geometrie weiter hinaus zu schieben.

§. 7. Der Anfang des zweiten Drittheils des 17ten Jahrhunderts, wohin wir jetzt kommen, ist die Epoche der grössten und herrlichsten Entdeckungen. Beinahe zu gleicher Zeit traten Descartes, Fermat und Roberval auf, welche für die erhabensten Speculationen neue Wege eröffneten. Diese drei ausgezeichneten Männer theilen unter sich den Ruhm, ein Problem, an welches in seiner ganzen Allgemeinheit sich noch kein Geometer gewagt hatte, jeder auf seine eigene Weise gelöst zu haben; es ist dieses das schönste und nützlichste Problem, nach dessen Lösung Descartes gestrebt hat, nämlich das der *Tangenten* an Curven, welches auch eigentlich ein nothwendiger Vorläufer vor der Erfindung der Differentialrechnung sein musste.

Die alten Geometer definiren die Tangente der Curve als eine Gerade, welche nur *einen* Punkt mit der Curve gemein hat und so beschaffen ist, dass man durch diesen

Punkt zwischen ihr und der Curve keine andere Gerade ziehen könne. Nach diesem Princip hatte man die Tangenten für einige bekannte Curven bestimmt. Aber die wenigen Bestimmungsmittel, welche dieses Princip darbot, zwang die neuern Geometer, die Tangenten unter einem andern Gesichtspunkte zu betrachten. Sie betrachteten sie als Secanten, deren beide Durchschnittspunkte in einen zusammenfallen, oder als die Verlängerungen der unendlich kleinen Seiten einer Curve, die man als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet, oder als die Richtung einer zusammengesetzten Bewegung, durch welche die Curve beschrieben werden kann. Die erste Art war die des Descartes und Fermat, obwohl ihre Auflösungen unter einander sehr verschieden waren; die zweite, welche jetzt die gebräuchlichste ist, wurde ausdrücklich und bestimmt von Barrow ausgesprochen, welcher durch diese Idee die Auflösung des Fermat vereinfachte; die dritte endlich ist die des Roberval. 7)

Die Lösung von Descartes beruht auf den Principien seiner neuen Geometrie, wovon wir später im Anfang unserer dritten Epoche sprechen. Jetzt wollen wir zunächst einen Blick auf die Arbeiten von Roberval, Fermat und einigen andern gleichzeitigen Geometern werfen, welche gemeinschaftlich zu den immensen Fortschritten, die damals die reine Geometrie der Alten machte, beigetragen haben.

Roberval, 1602 — 1675.

§. 8. Die Methode, welche Roberval zur Construction der Tangenten anwandte, basirt auf der Lehre von der zusammengesetzten Bewegung, welche schon einige Jahre vorher Galiläi entdeckt und in die Mechanik eingeführt hatte, ohne aber davon eine Anwedung auf die Geometrie zu machen. Roberval spricht sein Princip in folgenden Worten aus:

„*Allgemeine Regel.* Nach den gegebenen speciellen Eigenschaften einer krummen Linie untersuche man die verschiedenen Bewegungen, welche der die Curve beschreibende Punkt an jener Stelle hat, für welche die Berührende gezogen werden soll; nachdem man alle diese

---

7) Seitdem hat Maclaurin die Definition der Alten wieder in s. *treatise of fluxions* aufgenommen, weil sie ihm mehr mit der geometrischen Strenge, die er darin beachtet wissen wollte, übereinstimmte, und auch Lagrange hat sie als Princip für seine herrliche Theorie der Berührungen in seiner *Théorie des fonctions analytiques* angenommen.

Bewegungen in eine einzige zusammengesetzt hat, ziehe man die Linie für die Richtung dieser zusammengesetzten Bewegung, so hat man die Tangente der Curve."

Diese Methode hat ihrem innern Wesen nach eine merkwürdige Analogie mit der der Fluxionen, welche lange Zeit darauf von Newton erschaffen wurde; jedoch zog Roberval nicht alle Folgerungen aus ihr, welche sich daraus ziehen liessen, weil damals noch die Hülfe eines geregelten analytischen Verfahrens, wodurch sie practisch anwendbar wird, fehlte, so dass Newton die Ehre dafür einerndtete. Nichtsdestoweniger sichert dieser neue und wahrhaft philosophische Gedanke Roberval's diesem Geometer eine ausgezeichnete Stelle in der Geschichte der mathematischen Erfindungen. Sein Princip erzeugte eine wesentlich neue Art, die Grössen zu betrachten und deren Relationen aufzufinden. Man hatte bis dahin in der Geometrie die Grössen als schon gegebene betrachtet, wenn man sie unter sich oder mit andern Quantitäten vergleichen wollte. Roberval ging aber auf die Entstehung derselben zurück, führte die Kräfte, von denen er annahm, dass sie dieselben erzeugen könnten, in die Geometrie ein, und leitete aus den Verhältnissen dieser Kräfte jene Verhältnisse ab, welche zwischen den Quantitäten selbst stattfinden mussten. Diese Kraft, von der er sich die Grössen gebildet dachte, ist die Bewegung. Dass die Alten die Zusammensetzung der Bewegung gekannt haben, sieht man aus den mechanischen Aufgaben des Aristoteles [8]); ja sie haben sie sogar auf die Geometrie angewandt, um die Erzeugung gewisser Curven aufzufassen. Beispiele hierzu sind die Art, wie Archimedes seine Spirale beschreibt, nämlich durch die Zusammensetzung einer Kreisbewegung und einer geradlinigen Bewegung, so wie auch die Beschreibung der sphärischen Spirale des Pappus. Aber diese Geometer wenden diese Betrachtungen der Bewegung nur auf einzelne besondere Curven an, ohne eine Idee davon zu haben, hieraus, wie Roberval,

---

8) *Patet igitur, quotiescunque aliquid per diametrum duplice vi, in diversa tendente, impellatur, illud necessario ferri secundum rationem laterum. Quaest. mechan.* cap. II. Aristoteles kommt in seiner 23sten Aufgabe auf dieses Princip zurück, um zu zeigen, dass, je nachdem die Richtungen der beiden zusammensetzenden Bewegungen einen grössern oder kleinern Winkel machen, die Grösse und Richtung der resultirenden Bewegung verschieden werden kann. — Dieser berühmte Philosoph spricht auch noch ausdrücklich über dieses Princip im 8ten Kap. des 12ten Buchs seiner Metaphysik.

ein Princip für die Erzeugung aller Curven zu machen, und ausserdem wenden sie dieselben auch durchaus nicht auf die Entdeckung der Eigenschaften dieser Curve an.

Dieser Umstand, dass die Methode von Roberval die grösste Allgemeinheit an sich trägt, verdient gewiss in jener Epoche besonders angemerkt zu werden, in welcher sich noch die Geometrie auf das Studium einzelner speciell betrachteter Curven einschränkte. Es gehört dieses zu den ersten Beispielen, dass man in der Lehre der ausgedehnten Grössen von concreten Ideen zu abstracten überging. — Man hat einige falsche Anwendungen von der Methode des Roberval gemacht, weil man das Princip von der Zusammensetzung der Bewegung nicht gehörig beachtete, was auch bei den Aufgaben in der Mechanik mitunter vorgekommen ist. Diese Folgen der Unachtsamkeit aber thun der Methode keinen Abbruch, für welche die Regel von Roberval durchaus bestimmt ausgesprochen ist, wenn auch der Beweis derselben einen weniger leichten Styl hat, und für welche die 13 Anwendungen, welche der Verfasser davon auf sehr verschiedene Curven 9) macht, vollkommen streng sind.

Der Gedanke Roberval's war von derselben Tiefe, als die des Descartes und Fermat, und muss ihnen nur darin nachstehen, dass diese von der mächtigen Hülfe der Analysis unterstützt wurde, ohne welche sie unfruchtbar geblieben wären. Roberval selbst wusste diesen Vorzug, den die Methoden seiner beiden berühmten Nebenbuhler vor der seinigen hatten, zu schätzen, wie man aus dem Urtheil sieht, welches er in einem Briefe an Fermat über diesen Gegenstand fällte. Nachdem er von einigen Anwendungen seiner Methode gesprochen, fährt er fort: „Sie ist nicht mit so feiner und gründlicher Geometrie erfunden, als die Ihrige oder die des Descartes, und erscheint also weniger kunstvoll, dagegen scheint sie mir einfacher, natürlicher und kürzer, so dass ich bei allen Berührenden, von denen ich gesprochen habe, nicht nöthig hatte, die Feder zu ergreifen." (*Oeuvres de Fermat*, p. 165.)

---

9) Die Parabel, Hyperbel, Ellipse, die Conchoide des Nicomedes, verschiedene andere Conchoiden, die Schneckenlinie des Pascal, die Spirale des Archimedes, die Quadratrix des Dinostratus, die Cissoide des Diocles, die Cycloide, die Gefährtin der Cycloide (*cycloidis socia*) und die Parabel des Descartes (eine Curve vom dritten Grade, welche Descartes durch eine continuirliche Bewegung erzeugte und sie in seiner Geometrie zur Construction der Gleichungen vom sechsten Grade gebrauchte).

§. 9. Roberval war auch in allen den Untersuchungen, die sich auf die Ausmessung der Figuren und auf deren Schwerpunkt beziehen und die so nahe an den gegenwärtigen Integralcalcul streifen, ein eifriger Nebenbuhler Fermat's. Zur Lösung solcher Aufgaben hatte er sich eine Methode analog der des Cavalleri ausgedacht, die er aber unter einem Gesichtspunkte darstellte, welcher mehr mit der geometrischen Strenge übereinstimmte. Er nannte diese Methode, welche er, wie er selbst sagt, aus einem gründlichen Studium der Werke des Archimedes geschöpft hatte, *die Lehre von dem Untheilbaren.* Es scheint gewiss, dass er diese früher besessen hat, ehe Cavalleri die seinige bekannt machte, und dass er sie nur deshalb zurückhielt, um durch die Schwierigkeit der Probleme, deren Lösung vermittelst derselben möglich war, eine schmeichelhafte Superiorität über seine Nebenbuhler sich zu sichern. Das Resultat davon war, dass die ganze Ehre einer so nützlichen Entdeckung dem Cavalleri zu Theil wurde. [10])

Fermat, 1590 — 1663.

§. 10. Die Auflösung von Fermat in Beziehung auf die Tangenten der Curven beruht auf denselben Principien, als seine herrliche Methode *de maximis et minimis*, wo er zum ersten Male das Unendliche in den Calcul einführt, wie Kepler es in der reinen Geometrie gethan hatte. Und diese Methode ist die Veranlassung, dass man Fermat als den ersten Erfinder der Infinitesimalrechnung betrachet.

Folgende Stelle aus dem *Calcul des fonctions* von Lagrange zeigt klar und bestimmt den Geist und den Mechanismus der Verfahrungsart von Fermat, und das Band, welches diese mit dem neuen Calcul verbindet: „In seiner Methode *de maximis et minimis* setzt er den Ausdruck der Quantität, deren *maximum* oder *minimum* gesucht wird, gleich dem Ausdruck derselben Quantität, nachdem darin die Unbekannte um eine unbestimmte Grösse vermehrt ist, dann schafft er aus dieser Gleichung die etwa darin vorkommenden Wurzelzeichen und Brüche fort, hebt die beiden Theilen gemeinsamen Glieder gegen einander auf und dividirt die übrigen durch die unbestimmte

---

10) Die Abhandlung über das Untheilbare ist wie die meisten Werke Roberval's erst 20 Jahre nach seinem Tode erschienen in: *Divers ouvrages de mathématiques et de physique, par MM. de l'Académie royale des sciences*, in fol., 1693; sodann im 6ten Bande der alten Memoiren der Academie der Wissenschaften.

Grösse; setzt endlich diese Quantität gleich Null und erhält dadurch eine Gleichung, aus welcher die Unbekannte der Aufgabe bestimmt werden kann. Hier ist aber auf den ersten Blick zu sehen, dass die Regel, welche sich aus der Differentialrechnung ableitet und welche darin besteht, dass man den Differentialquotienten des Ausdrucks, der ein *maximum* oder *minimum* werden soll, in Bezug auf die darin enthaltene Unbekannte genommen gleich Null setzt, dasselbe giebt, weil es im Grunde dasselbe ist, und dass die Termen, welche man in der Differentialrechnung als unendlich klein vernachlässigt, diejenigen sind, welche man als Nullen bei dem Verfahren des Fermat unterdrükken muss. Seine Tangenten-Methode hängt von demselben Principe ab. In der Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate, welche er die specifische Eigenschaft der Curve nennt, vermehrt oder vermindert er die Abscisse um eine unbestimmte Quantität und betrachtet die neue Ordinate als zugleich zur Curve und zur Tangente gehörig, was ihm eine Gleichung giebt, welche er wie die beim *maximum* oder *minimum* behandelt. Auch hier erkennt man die Analogie zwischen der Methode des Fermat und der Differentialrechnung; denn die unbestimmte Quantität, um welche man die Abscisse vermehrt, entspricht dem Differentiale dieser, und die dazu gehörige Vermehrung der Ordinate der Differentiale der letztern. Es ist merkwürdig, dass in der Schrift, welche die Entdeckung der Differentialrechnung enthält (in den *Actis erudit. public. Lipsiae* vom Monat October 1684 unter dem Titel: *Nova methodus pro maximis et minimis* etc.), Leibnitz das Differential der Ordinate eine Linie nennt, welche sich zu dem willkührlichen Wachsthum der Abscisse verhält wie die Ordinate zur Subtangente; was offenbar seine Analyse der des Fermat nahe bringt." 11)

---

11) Poisson ist nicht ganz so bestimmt als Lagrange in dem Urtheile gewesen, was er in dieser wichtigen Angelegenheit gefällt hat. Die Unparteilichkeit, welche man bei solchem historischen Punkte bewahren muss, wo es sich darum handelt, dem Fermat die Ehre einer Erfindung zuzuschreiben, welche so viel Ruhm über England und Deutschland verbreitet hat, macht es uns zur Pflicht, die Worte von Poisson anzuführen, welcher übrigens klar das Princip in der Methode Fermat's auseinandersetzt und die Abweichung derselben von der Leibnitzischen Erfindung genau angiebt. Die philosophische Idee ist Eigenthums Fermat's, das Mittel aber, welches unumgänglich nothwendig war, um diese in Anwendung bringen zu können, gehört Leibnitz. „In dem Maase, dass eine Grösse sich ihrem *maximum* oder *minimum* nähert, verändert sie sich immer weniger und weniger, und ihr Differential verschwindet, wenn sie den

Diese Meinung Lagrange's über den Antheil, welchen man Fermat an der Erfindung des neuern Calculs zugestehen muss, war auch die seiner berühmten Zeitgenossen Laplace und Fourier, sie war sogar schon zu einer Zeit, in welcher man noch gar nicht daran dachte, für Fermat den ihm gebührenden Ruhm in Anspruch zu nehmen, von d'Alembert [12]) ausgesprochen, welcher mit so tiefer Gelehrsamkeit über die Metaphysik der Geometrie geschrieben hat, und auch von Buffon [13]), dem Uebersetzer der Fluxionstheorie und dem eifrigsten Bewunderer des grossen Newton.

§. 11. Fermat war auch mit Pascal zusammen der Erfinder der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eines der schönsten Erzeugnisse des 17ten Jahrhunderts. In der Zahlen-

---

einen oder den andern ihrer äussersten Werthe erreicht. Indem Fermat von diesem Princip ausging, hatte er die glückliche Idee, um das *max.* oder *min.* einer Quantität zu bestimmen, der Variabeln, von welcher sie abhängt, einen unendlich kleinen Zuwachs beizulegen, und den entsprechenden Zuwachs dieser Quantität, welche zuvor auf dieselbe Ordnung als die der Variabeln gebracht ist, gleich Null zu setzen. Auf diese Weiss bestimmt er den Weg eines Lichtstrahls beim Uebergange aus einem Mittel in ein anderes, indem er nach seiner angenommenen Theorie voraussetzt, dass die Zeit des Uebergangs ein *min.* sein müsse. Aus diesem Grunde betrachtet ihn Lagrange als den ursprünglichen Erfinder der Differentialrechnung. Diese Rechnung jedoch besteht weit eher in der Zusammenstellung von Regeln zur unmittelbaren Auffindung der Differentiale aller Functionen, als in dem Gebrauche, den man von diesen unendlich kleinen Veränderungen zur Auflösung dieser oder jener Art von Aufgaben machen kann; und in dieser Hinsicht geht die Erschaffung der Differentialrechnung nicht über Leibnitz hinaus, *er* ist der Urheber des Algorithmus und der Bezeichnung, welche seit dem Anfang dieser Rechnung vorgeherrscht haben und welchen die Infinitesimalrechnung hauptsächlich ihre Fortschritte verdankt." (*Mémoire sur le calcul des variations*, *par M. Poisson*, gel. in der Acad. am 10ten Nov. 1831, im 12ten Bande der *Mémoires de l'Acad. des sc.*)

12) „Man verdankt Descartes die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, worauf die Differentialrechnung gegründet ist, und Fermat die erste Anwendung der Rechnung mit Differentialgrössen auf die Auffindung der Tangenten; von welcher letztern Methode die neue Geometrie nur eine Verallgemeinerung ist." (Art. *Geometrie* in der Encylopädie.)

13) „Fermat fand ein Mittel, mit dem Unendlichen zu rechnen, und gab eine treffliche Methode zur Auflösung der Aufgaben über das Grösste und Kleinste. Die Methode ist beinahe bis auf die Bezeichnung dieselbe, als deren man sich heute bedient, und sie wäre die Differentialrechnung gewesen, wenn ihr Erfinder sie verallgemeinert hätte." (Vorrede zu der Uebersetzung von *The method of fluxions by Newton.*)

theorie dagegen steht er durchaus als Einziger da: für diese muss er ohne Zweifel eine einfache Methode besessen haben, welche noch jetzt ungeachtet der grossen Vervollkommnungen in der unbestimmten Analysis uns unbekannt ist. Denn die vorzüglichen Theoreme, von denen er uns nur den Ausspruch ohne Beweis hinterlassen hat, haben die grössten Geometer beschäftigt und sind nur allmählich mit grosser Mühe und durch die verschiedensten Methoden bewiesen. Aber trotz seiner grossen Vorliebe für Zahlen-Untersuchungen hat Fermat auch die Geometrie mit den herrlichsten Entdeckungen bereichert. So wie Archimedes die Quadratur der Parabel gegeben hatte, quadrirte er die Parabeln aller Ordnungen; er bestimmte das Volumen und den Schwerpunkt der Paraboloide und mehrer andern Körper, und entdeckte die Eigenschaften einer Spirale, welche von der des Archimedes verschieden war. Er ging noch über diesen Heros der Geometer des Alterthums hinaus, indem er durch eine rein geometrische Methode, welche der Exhaustionsmethode analog war, eine Aufgabe löste, von welcher Archimedes nur Spuren hinterlassen hat und welche nach Descartes über die Kräfte des menschlichen Geistes ging, nämlich die absolute Rectification der cubischen Parabel und einiger andern Curven (*De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione.* Werke des Fermat, p. 89); da aber dieses Werk erst 1660 bekannt gemacht wurde, so kamen in dem Ruhme dieser wichtigen Entdeckung, der Rectification einer krummen Linie, Neil und Van Heuraet dem Fermat zuvor.

Es war seine Methode *de maximis et minimis*, welche Fermat in den Stand setzte, den grössten Theil seiner Aufgaben zu lösen; wovon eine der schönsten Anwendungen die ist, welche er auf die Refractionserscheinungen des Lichtes machte, worüber der berühmte Streit zwischen ihm und Descartes entstanden war. Seine Lösung war die Bestätigung der von seinem Gegner gefundenen Regel, welche er bis dahin bekämpft hatte. Diese Lösung erschien so vorzüglich, dass sie ihn mit Descartes den Ruhm theilen liess, das Gebiet der Geometrie durch Einführung dieser Wissenschaft in das Studium der Naturerscheinungen erweitert zu haben.

§. 12. Fermat zeichnete sich auch in dem Theile der Geometrie aus, welcher sich auf die geometrische Analysis der Alten bezieht und welche wir die Geometrie des Apollonius genannt haben. Er stellte die ebenen Oerter

dieses Geometers nach den von Pappus hinterlassenen Andeutungen wieder her. Obgleich er aber in Bezug hierauf in einem Briefe an Roberval erwähnt, dass er dabei manches Schöne und Bemerkenswerthe gefunden habe, so sind doch nur die beiden Bücher des Apollonius allein gedruckt und bekannt geworden. — Er lehrte nach einer allgemeinen analytischen Methode die ebenen und körperlichen Oerter zu finden und diese Methode zur Construction von Aufgaben durch diese Oerter anwenden. Es war dieses die Coordinatenmethode des Descartes, welche Fermat früher kannte, bevor der berühmte Philosoph seine Geometrie bekannt gemacht hatte. Fermat dehnte hernach diese Lehre auf die schwierige Untersuchung über die Construction geometrischer Probleme im Allgemeinen durch die einfachsten Curven aus. Bei seinen Untersuchungen über den Grad der Curven, die zur Construction einer Gleichung erforderlich sind, wurde er auf ein allgemeines Princip geführt, welches später Jacob Bernoulli in den *Actis Lipsiens.* von 1688 bewiesen hat, indem er der Geometrie des Descartes vorwarf, dass sie es ausgelassen habe; und dieses ist folgendes: Es ist immer genügend, dass das Product der Dimensionen der Curven, welche man anwendet, kleiner ist, als der Grad der Gleichung. 14)

§. 13. In seiner Abhandlung *De contactibus sphaericis* löst Fermat zuerst und vollständig die Aufgaben über die Berührung der Kugeln, so wie es Vieta für die Berührung der Kreise in seinem *Apollonius Gallus* gethan hatte. Diese Aufgabe war ihm von Descartes gestellt, welcher in seinen Briefen sagt, dass er sie durch die gerade Linie und den Kreis gelöst habe; die Auflösung selbst ist aber nicht bis auf uns gekommen. Die Arbeit Fermat's ist vollendet und in einem so vorzüglichen Styl geschrieben, dass sie das Muster zu einer guten Geometrie bildet. Wir müssen wenigstens sagen, dass man in letzterer Zeit viel schlechtere geliefert hat. 15) Die Beziehung, in wel-

---

14) *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas, etc. Opera varia*, p. 110.

15) Man hatte bis zum Anfang dieses Jahrhunderts kein anderes Werk über die Berührung von Kugeln, als das von Fermat. In dieser Zeit fesselte gerade diese Untersuchung die Aufmerksamkeit einiger Schüler des Monge, welche sie unter einem neuen Gesichtspunkte betrachteten, der schon die Allgemeinheit der Methode und der Auffassungsart verräth, welche den Character der Geometrie dieses berühmten Meisters ausmacht. Diese ersten Aufsätze sind

cher wir dies meinen, ist folgende: Diese Abhandlung enthält, ausser dem Hauptproblem über eine Kugel, welche vier gegebene berührt, noch 14 andre Probleme, welche eigentlich nur besondere Fälle von diesem sind, welche man aber der Reihe nach auflösen muss, um zu dem Endproblem zu gelangen. Die Lösung dieses letzten ist elegant und leicht, schliesst aber nicht die Lösungen der besondern Fälle mit in sich, sondern führt sich im Gegentheil auf einen dieser besondern Fälle zurück. Die neue Geometrie verfährt durchaus anders; sie giebt mit Einem Male die Lösung des allgemeinen Problems, die sich auf die besondern Fälle anwenden lässt, durch welche Fermat hindurchgehen musste. Man begreift ilecht, welche Vollkommenheit in einer solchen Allgemeinheit der Auffassung und der Methode liegt, und erkennt darin den wahren Fortschritt der Wissenschaft. Uns sei es aber erlaubt noch hinzuzufügen, dass man unter einem andern

---

zum Theil in der zweiten Nummer des ersten Theils der *Correspondance polytechnique* enthalten; eine kurze Analyse eines Memoires von Ch. Dupin, welche sie zu vervollständigen bestimmt war, erschien zu spät in derselben Sammlung (Th. II, S. 420), und sie ist dabei von der Art, dass man nach den darin enthaltenen eleganten und neuen Resultaten lebhaft bedauern muss, dass dieser berühmte Academiker sein Werk nicht bekannt gemacht hat. Gaultier, Professor am *Conservatoire des arts et métiers*, hat diese Untersuchung wieder aufgenommen und sie mit einer vollständig neuen und genügenden Allgemeinheit behandelt, wozu aber die neuern Methoden noch einen neuen Grad von Einfachheit hinzugefügt haben. Die einen sind rein descriptiv, d. h. sie berücksichtigen nicht die Länge der Linien, und diese sind die allgemeinsten und einfachsten. Von den andern, welche das Maass, die Zusammensetzung gewisser Verhältnisse der Linien verlangen, zeichnet man die aus, welche der berühmte Fergola und sein gelehrter Schüler Flauti in den Memoiren der Acad. der Wiss. zu Neapel angeführt haben. (S. auch die *Geometria di sito* von Flauti, 2te Ausg. 1821, S. 156.)

Die Aufgabe, eine Kugel zu finden, welche vier andere berührt, ist eine von denen, in welchen lange Zeit hindurch die Geometrie den Vorzug vor der Analysis gehabt hat. Euler hatte schon 1779 der Academie zu Petersburg zwei analytische Auflösungen davon vorgelegt, welche aber erst im Anfang dieses Jahrhunderts in den Commentaren auf die J. 1807—1808 (gedruckt 1810) erschienen. Auch Carnot hat in seiner *Géometrie de position* (S. 416) eine analytische Lösung angedeutet, ohne jedoch die Entwickelungen, welche auf eine Gleichung vom zweiten Grade geführt hätten, gehörig auszuführen. Erst in unserer Zeit hat Poisson diese Aufgabe vollständig mit Hülfe des Calculs gelöst. (*Bulletin de la Société philomatique*, ann. 1812, p. 141.) Bald darauf haben auch Binet und Français noch andere analytische Auflösungen gegeben (17tes Heft des *Journal de l'école polytechnique* und 3ter Theil der *Annales de mathématiques*).

Gesichtspunkte eine neue Art von Allgemeinheit in diese Materie bringen kann, indem man, statt der vier Kugeln, vier unter einander ähnliche Oberflächen zweiter Ordnung setzt, oder noch allgemeiner irgend welche vier Oberflächen zweiter Ordnung, welche nur alle vier in eine und dieselbe Oberfläche derselben Ordnung eingeschrieben sind. Man sieht, dass letzteres Problem mit seiner Lösung die Aufgabe von den vier Kugeln in sich schliesst. (S. Note XXVIII.)

Diese Vergleichung von Fermat's Auflösung mit den heutigen Methoden darf hier nicht an der unrichtigen Stelle scheinen; denn sie zeigt deutlich die Art der Fortschritte, welche die Geometrie schon gemacht hat und welchen sie noch nachstreben muss, selbst in solchen Untersuchungen, bei welchen man nur zu oft sich begnügt, die Erzeugnisse der grossen Meister anzustaunen, ohne den Gedanken zu wagen, dass man sie dennoch vermöge der Ausbildsamkeit der Wissenschaft angreifen könne.

§. 14. Fermat hatte die Wiederherstellung der Porismen des Euclid versprochen und angefangen, wobei er diesem Wort eine andere Bedeutung als die späterhin nach R. Simson allgemein angenommene unterlegte. Wenn aber dieser berühmte Schottländer die Ausdrucksweise der Porismen errathen und restituirt hat, so war Fermat vielleicht ebenso und wenigstens mit nicht geringerem Glück in dieses Geheimniss eingedrungen, indem er den Zweck und den grossen Nutzen erkannte, welchen Euclid seinem Werk über die Porismen zugesprochen hatte. Aber Fermat drückt sich über diesen Gegenstand so kurz aus, dass man vielleicht *a priori* die Ideen und Vermuthungen hat finden müssen, welche wir bei seiner Art, die Porismen zu betrachten, wahrzunehmen glauben; die Entwikkelung jedoch dieser unserer Meinung über diesen Gegenstand müssen wir auf eine andre Zeit verschieben.

Nach den fünf Theoremen zu urtheilen, welche uns Fermat als Beispiel oder *specimen* seiner Porismen hinterlassen hat, müssen wir es sehr bedauern, dass sein Werk nicht beendigt ist. Das dritte dieser Porismen hätte übrigens verdient, die Aufmerksamkeit der Geometer besonders auf sich zu ziehen, da es zu den schönsten und fruchtbarsten Sätzen aus der ganzen Theorie der Kegelschnitte gehört. Es ist dieses in der That genau das berühmte, in der neuern Geometrie so bekannte Theorem des Desargues über die Involution von sechs Punkten. Ein andres Porisma, welches Fermat dem Wallis zum

Beweise vorgelegt hat, ist ein Corollarium zu diesem allgemeinen Theorem, angewandt auf die Parabel.[16]

Fermat versprach nicht allein die Wiederherstellung der drei Bücher der euclidischen Porismen, sondern er wollte auch diese Wissenschaft über die von dem griechischen Geometer gesteckten Grenzen hinausführen und sie auf die Kegelschnitte und auf alle andre Curven anwenden, wobei er sagt, dass er wunderbare, bis dahin unbekannte Dinge entdeckt habe.[17] Weit davon entfernt wie Simson zu glauben, dass dieses Versprechen ein vermessenes gewesen sei, glauben wir vielmehr darin das Merkmal zu erkennen, dass Fermat die Lehre des Euclid von der richtigen Seite aufgefasst und die Tiefe und Fruchtbarkeit derselben aufzudecken gewusst habe.

Pascal, 1623 — 1662.

§. 15. In derselben Zeit ergriff Pascal mit seiner gewohnten Scharfsichtigkeit den Sinn der Methode des Untheilbaren von Cavalleri, bewies sie in aller Strenge und machte sie zu seinem Eigenthum, indem er sie auf eine allgemeine Weise auf schwierige Aufgaben über Oberflächen, Volumen und Schwerpunkt der Körper anwandte. Diese Untersuchungen liefern ein herrliches Denkmal für die Kraft des menschlichen Geistes; sie streifen ganz nahe an dem Integralcalcul und bilden das Band zwischen Archimedes und Newton.

---

16) R. Simson hat diese beiden schönen Sätze von Fermat entlehnt und den ersten in seinem *Porismatum liber* unter Nr. 81, beide zusammen aber in *Sectionum conicarum libri* V, im 5ten Buch S. 12 u. 19 bewiesen. Der zweite, welcher sich auf die Parabel bezieht, wurde auch von Ozanam angeführt in seinem *Diction. mathem.* Art. Porisma.

17) *Imo et Euclidem ipsum promovebimus et porismata in coni sectionibus et aliis quibuscunque curvis mirabilia sane et hactenus ignota detegemus.* (*Varia op. Math.* p. 119.) Dieses Versprechen, welches der feste Sinn und der edle Character des Autors nicht als übertrieben betrachten lässt, zeigt uns, von welchem grossen Interesse auch für die Geometrie die Auffindung der Manuscripte Fermat's sein würde, deren Verlust bis jetzt nur vorzüglich die Analysis bedauert hat. Wir wollen hoffen, dass wir nicht für immer so kostbarer Werke beraubt sein werden. Schon Libri hat bei seinen Untersuchungen, denen er sich wegen einer allgemeinen Geschichte der Wissenschaften widmet, das Glück gehabt, zwei Fragmente davon, welche unedirt geblieben waren, zu entdecken und verschiedene Andeutungen zu finden, welche ihn neue Entdeckungen hoffen liessen. Der hohe Geist dieses berühmten Analysten ist uns ein sichrer Bürge, dass er bei seinen Untersuchungen den Fragmenten der reinen Geometrie einen eben so grossen Werth beilegen werde, als den analytischen Erzeugnissen des Genies Fermat's.

Mit Hülfe dieser Methode übertraf Pascal die berühmtesten Geometer bei der Untersuchung über die Eigenschaften der Cycloide. Diese Curve, deren Geschichte sich an alle grosse Entdeckungen des 17ten Jahrhunderts knüpft, war schon für Galiläi, Descartes, Fermat, Roberval und Torricelli Gegenstand ihrer Bemühungen gewesen. Nachdem sie einige Zeit geruht hatte, zog sie Pascal wieder aus dem Dunkel hervor, indem er die bedeutende Schwierigkeit der zahlreichen Aufgaben, zu welchen diese Curve Gelegenheit gab, gewisser Maassen als Probierstein und als Maass für die Kräfte und Fähigkeiten der Geometer seiner Zeit gebrauchen wollte. Wren, Sluze, Wallis, Huygens, La Loubére und Fabri nahmen diese Herausforderung an und lösten jeder einen grössern oder geringern Theil der vorgelegten Aufgaben, mussten aber alle Pascal den Ruhm einer vollständigen Lösung lassen. Seitdem hat die Cycloide noch ein drittes Mal Epoche gemacht, nämlich zur Zeit der Erfindung der Differentialrechnung. Ausser ihren schönen und mannigfaltigen geometrischen Eigenschaften erlangte sie unter den Händen von Newton, Leibnitz, der Bernoulli und des Marquis von Lhopital noch neue aus mechanischen Betrachtungen geschöpfte Eigenthümlichkeiten, welche noch Manches zur Wichtigkeit und Berühmtheit dieser ausgezeichneten Curve beitrugen.

Die Bewegung eines Rades auf einer Ebene, wobei man die Cycloide entdeckt hat, liefert auch noch eine zweite Erzeugung dieser Curve, welcher man, wie ich glaube, noch keine Aufmerksamkeit geschenkt hat, nämlich: die Enveloppe des Raums, der durch einen Durchmesser des Rades durchlaufen wird, ist ebenfalls eine Cycloide. 18)

Die Betrachtung dieser Curve wurde die Veranlassung zur Untersuchung einer zahlreichen Klasse von Linien, welche durch das Rollen einer gegebenen Curve auf einer andern festen entstehen. In ihrer vollkommenen Allgemeinheit wurden sie von Leibnitz, De La Hire, Nicolas u. A. betrachtet, und Hermann und Clairaut dehnten ihre Theorie auf Curven aus, die in derselben Weise auf der Kugel beschrieben werden.

---

18) Die Epicycloiden sind ebenfalls einer ähnlichen doppelten Erzeugung fähig; und gerade hieraus lassen sich mehre Eigenschaften dieser Curven ableiten. — Wenn man in Stelle des Durchmessers irgend eine Chorde in den beweglichen Kreisen betrachtet, so wird die Enveloppe die Evolute einer Epicycloide.

§. 16. Die Arbeiten Pascal's in Bezug auf den andern Theil der Geometrie, welcher sich an die geometrische Analyse der Alten und an die Theorie der Kegelschnitte anschliesst, verdienen unsere Bewunderung in demselben Maasse, als seine Staunen erregenden Entdeckungen an der Cycloide und als seine übrigen Anwendungen der Methode des Cavalleri; so dass wir in diesen Theil der Pascal'schen Entdeckungen noch genauer eingehen müssen. Am hervorstechendsten war sein herrliches Theorem von dem *mystischen Sechseck*, welches unter seinen Händen eine fabelhafte Anwendung erhielt. Mit diesem Namen bezeichnete er nämlich jedes Sechseck, das einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, und von dem er die merkwürdige Eigenschaft angab, dass *die drei Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten in einer geraden Linie liegen.* Da fünf Punkte einen Kegelschnitt bestimmen, so ist dieses Theorem eine Relation für die Lage eines sechsten Punktes dieser Curve in Bezug auf die fünf ersten, so dass es eine fundamentale und characterisirende Eigenschaft der Kegelschnitte ist. Auch hatte Pascal (damals erst 16 Jahre alt, wie er selbst sagt)[19]) den Entwurf zu einer vollständigen Behandlung der Kegelschnitte gemacht. Dieses Werk ist nicht auf uns gekommen, aber Leibnitz, welcher es während seines Aufenthalts in Paris selbst in Händen gehabt hat, giebt uns in einem Briefe, den er 1676 an Perier, den Neffen Pascal's, schrieb, die Titel der sechs Abtheilungen, aus denen es bestanden haben muss, an. (*Oeuvres de Pascal*, tom. V, p. 459.) Der Titel der *ersten* Abtheilung zeigt uns, dass Pascal sich der Principien der Perspective bedient habe, um die Kegelschnitte durch den Kreis zu erzeugen und so ihre Eigenschaften aus denen des Kreises abzuleiten. Diese Methode war nach Leibnitz die Grundlage des ganzen Werkes. Die *zweite* Abtheilung handelt von dem mystischen Sechseck. Leibnitz sagt: „Nachdem er den Kegelschnitt als die Projection eines Kreises auf eine Ebene, die den Kegel schneidet, erklärt hat, weist er die merkwürdigen Eigenschaften einer aus sechs Geraden zusammengesetzten Figur nach, die er das mystische Sechseck nennt." In der *dritten* Abtheilung finden sich Anwendungen dieses Sechsecks, die Eigen-

---

19) *Conicorum opus completum, et conica Apollonii et alia innumera unicà fere propositione amplectens; quod quidem nondum sex decimum aetatis annum assecutus excogitavi, et deinde in ordinem congessi.* (*Oeuvres de Pascal*, tom. IV, p. 410.)

schaften der harmonisch geschnittenen Sehnen und Durchmesser und wahrscheinlich die Sätze, welche die Theorie der Pole bilden.[20]) Die *vierte* Abtheilung enthält das, was sich auf die Segmente bezieht, welche auf Secanten, die mit zwei festen Geraden parallel gezogen sind, abgeschnitten werden, und ausserdem die Eigenschaften der Brennpunkte. In der *fünften* Abtheilung löst Pascal die Aufgaben, welche sich auf die Beschreibung eines Kegelschnitts, der fünf Bedingungen Genüge leistet, nämlich durch gegebene Punkte zu gehen und gegebene Gerade zu berühren, beziehen. Die *sechste* Abtheilung endlich wurde von Leibnitz *De loco solido* betitelt. Einige Worte führen uns auf die Vermuthung, dass darin von dem berühmten Problem des Pappus *ad tres aut quatuor lineas* die Rede sein dürfte. Einige Fragmente enthalten ausserdem noch verschiedene Probleme.

§. 17. Pascal hatte bei Gelegenheit dieses Werkes glücklicher Weise einige Haupt-Theoreme, welche es enthalten sollte, unter dem Titel eines *Essai pour les coniques* zusammengestellt, weil er sie erst der Prüfung der Geometer unterwerfen und ihr Urtheil darüber hören wollte, bevor er seine Arbeit weiter fortsetzte. Dieser *Essai* ist es, welcher 1640 erschien, als Pascal kaum 16 Jahre alt war, und von dem in einigen Briefen des Descartes, der ihn von Mersenne zugeschickt erhalten hatte, die Rede ist. Seitdem blieb er mehr als ein Jahrhundert hindurch begraben und kam erst 1779 durch die Sorge von Bossut in dessen vollständigen Ausgabe der Werke Pascal's ans Tageslicht.

---

20) Poncelet hat diese Meinung schon in seinem *Traité des propriétés projectives*, p. 101 ausgesprochen, und uns scheint sie leicht zu bestätigen. Denn wenn man in dem eingeschriebenen Sechseck zwei gegenüberliegende Seiten unendlich klein werden lässt, so stellt diese Figur ein eingeschriebenes Viereck und zwei an gegenüberliegenden Ecken gezogene Tangenten dar, und man erhält als unmittelbare Folgerung aus dem Theorem vom Sechseck folgendes: *Wenn man durch zwei gegenüberliegende Ecken eines in einem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks Tangenten an die Curve zieht, so schneiden sich diese auf der Geraden, welche die Durchschnittspuncte der gegenüberliegenden Seiten verbindet.* Dieses Theorem scheint den Worten *de quatuor tangentibus et rectis puncta tactuum jungentibus* zu entsprechen, welche sich in der Ueberschrift dieser dritten Abth. befinden, und scheint einer von den Sätzen gewesen zu sein, welche Pascal aus seinem Sechseck abgeleitet hat. Man erkennt aber leicht, dass dies Theorem die ganze Theorie der Pole enthält, so dass es als erwiesen angenommen werden kann, dass diese Theorie in den Anwendungen mitbegriffen war, welche Pascal von dem Sechseck machte.

Diese Schrift von sieben Octavseiten ist ein kostbares Fragment von den Entdeckungen und der Methode des grossen Pascal. Eine gedrängte Uebersicht davon ist folgende: Zunächst findet sich das berühmte Theorem von dem mystischen Sechseck als Lehnsatz ausgesprochen, aus dem sich alles Uebrige ableiten soll. Der nächstfolgende Satz bezieht sich auch noch auf das einem Kegelschnitt eingeschriebene Sechseck: er ist eine Relation zwischen den Segmenten, die auf zweien Seiten von zwei andern Seiten und von zwei Diagonalen gebildet werden. Diese Relation ist im Grunde nichts Anderes, als der Satz des Desargues über die Involution von 6 Punkten, aber unter anderm Gesichtspunkte vorgetragen, wodurch er zu neuen Anwendungen fähig wird. — Wir wollen diese Idee in der XVten Note weiter durchführen. — Der darauf folgende Satz, der durch eine doppelte Gleichheit von Verhältnissen ausgedrückt ist, schliesst zwei verschiedene Sätze in sich. Der erste ist der 129ste Satz im 7ten Buch der Mathematischen Sammlungen des Pappus, welcher uns zur Einführung der Benennung, anharmonisches Verhältniss, Gelegenheit gab und von dem wir schon sagten, dass er die Grundlage für einen beträchtlichen Theil der neuern Geometrie bilden könne; der zweite ist der Ptolemäische Satz über ein Dreieck, das durch eine Transversale geschnitten wird. — Hierauf kommt ein Satz, welcher sich mit Berücksichtigung des Ptolemäischen Theorems auf die schöne und wichtige Eigenschaft der Kegelschnitte reducirt, welche die Segmente auf den Seiten eines Dreiecks, die von einer solchen Curve abgeschnitten werden, betrifft, und welche die neuere Zeit dem berühmten Verfasser der *Géométrie de position* verdankt. Der nächstfolgende Satz ist dieselbe Eigenschaft der Kegelschnitte, nur ausgedehnt auf ein Viereck, welches man in die Stelle des Dreiecks setzt. [21]) Dieses durch Carnot verallgemeinerte Theorem, welches er für irgend welches Polygon oder für irgend welche geometrische Curven, ja selbst für krumme Oberflächen [22]) bewiesen hat, ist eines

21) Wenn man annimmt, dass zwei Ecken des Vierecks in der Unendlichkeit liegen, so werden die Segmente, welche von diesen Ecken ausgehen, je zwei und zwei gleich sein, da sie unendlich gross sind und auf parallelen Geraden gemessen werden; alsdann aber folgt hieraus die schöne Eigenschaft der Kegelschnitte in Bezug auf das constante Verhältniss der Producte von Segmenten, welche auf zwei Transversalen liegen, die von irgend einem Punkte aus parallel mit zwei festen Geraden gezogen sind.

22) *Géométrie de position*, p. 437.

der fruchtbarsten aus der Theorie der Transversalen. — Endlich bemerkt man das berühmte Theorem über die Involution von 6 Punkten, „dessen erster Erfinder Desargues ist, einer der grössten Geister seiner Zeit, der in der Mathematik überhaupt und untern Anderm in den Kegelschnitten ganz vorzüglich bewandert war." Pascal fügt hinzu, „dass er sich bemüht habe, seine Methode bei diesem Gegenstande nachzuahmen, indem er sich nicht des Axendreiecks bediene, sondern allgemein die Schnitte am Kegel behandle." [23])

§. 18. Nach dem bewiesenen Reichthum in den angeführten Sätzen begreifen wir ganz gut, dass Pascal, wie er es selbst ausspricht, den Grund zu den vollständigen Elementen der Kegelschnitte gelegt habe und dass er, wie Mersenne in seinem Werk *De mensuris, ponderibus* etc. in fol., 1644, anführt, aus dem einzigen Princip über das mystische Sechseck 400 andere Sätze abgeleitet habe. [24]) (S. Note XIII.)

Man bemerkt, dass von den verschiedenen Haupt-Theoremen jedes eine bestimmte Eigenschaft von 6 Punkten, die auf einem Kegelschnitt liegen, ausdrückt. Dieses erklärt uns zugleich, wie Pascal dieselben aus dem mystischen Sechseck, welches ebenfalls eine allgemeine Eigenschaft dieser 6 Punkte ist, hat ableiten können. Aber jedes dieser Theoreme hat eine verschiedene Form erhalten, wodurch es zu den besonderen Anwendungen brauchbar wurde, welche eine grosse Zahl von Eigenschaften der Kegelschnitte umfassen.

Dieses ist eine unendlich nützliche Kunst, aus einem einzigen Princip eine grose Zahl von Wahrheiten abzuleiten, wovon man in den Schriften der Alten kein Beispiel findet und was den Vorzug unserer Methoden vor den ihrigen ausmacht.

§. 19. Pascal hat noch mehre andre Werke über die Geometrie in dem Style seines *Conicorum opus completum*

---

23) Als wir von Apollonius sprachen, haben wir erklärt, was man unter einem Axendreieck versteht, und wir haben auch erwähnt, dass dieser grosse Geometer des Alterthums zur Bildung der Kegelschnitte die schneidende Ebene senkrecht auf diesem Dreieck annahm. Desargues, wie man sieht, und nach seinem Beispiel Pascal behandeln die Kegelschnitte auf eine viel allgemeinere Weise, indem sie die schneidende Ebene in einer ganz willkührlichen Lage annehmen.

24) *Unica propositione universalissima*, 400 *corollariis armata, integrum Apollonium complexus est.*

geschrieben. Uns sind nur die Titel derselben durch eine Nachricht bekannt geworden, welche er 1654 [25]) an eine Gesellschaft Gelehrter schickte, die sich vor Gründung der Academie der Wissenschaften (welche 1666 stattfand) unter einander vereinigt hatten. Wir sehen daraus, dass er gleich Vieta, aber in grösserer Ausdehnung und nach einer höchst einfachen Methode, die Probleme über Berührung der Kreise und die analogen Fragen über Berührung der Kugeln gelöst hat; dass er ferner ein Werk über ebene Oerter schrieb, welches umfassender und wichtiger war als Alles was die Alten und Neuen für diesen Gegenstand gethan haben, und zwar nach einer neuen und sehr schnell zum Ziele führenden Methode; dass er endlich auch eine neue Methode der Perspective ausgedacht hat, welche so einfach als nur möglich ist, weil jeder Punkt des Bildes durch den Durchschnitt zweier Geraden construirt wird.

Diese geringe Andeutung, welche wir in der Nachricht des Pascal finden, reicht hin, uns den Verlust von Schriften betrauern zu lassen, worin das Erfindungsgenie dieses grossen Geometers und die bewunderungswürdige Kunst, mit welcher er eine erste Erfindung zu verallgemeinern und daraus alle darin enthaltenen Wahrheiten zu ziehen wusste, glänzend hervortreten müssen.

Desargues, 1593 — 1662.

§. 20. Desargues, welchen Pascal zu seinem Führer gewählt hatte und der gewiss eines solchen Schülers würdig war, hatte auch ein Jahr zuvor auf eine neue und originelle Weise über die Kegelschnitte geschrieben. Seine Methode beruhte wie die des Pascal auf den Principien der Perspective und auf einigen Sätzen aus der Theorie der Transversalen. [26])

---

25) *Oeuvres de Pascal*, Th. IV, S. 408.

26) Es ist die Frage, ob schon die Alten den Gebrauch der Perspective in der rationellen Geometrie gekannt haben; und diese Frage ist, wie ich glaube, noch nicht gründlich genug untersucht. Anfangs fühlt man sich versucht dieselbe bejahend zu beantworten, weil diese Methode so natürlich ist und mit ihrer Art, die Kegelschnitte an einem Kegel mit kreisförmiger Basis zu erzeugen, so enge verbunden scheint. Auch ist dieses die gewöhnliche Meinung der Geometer, welche in neuerer Zeit besonders durch das Urtheil von Poncelet über die Porismen des Euclid bestätigt zu werden schien, der diese als Sätze, welche nach dieser Methode zu beweisen wären, anführte. (*Traité des propriétés projectives*; *Introd.* p. 37.) Aber trotz aller Achtung, welche wir vor dem Urtheil dieses grossen Geometers haben, müssen wir doch gestehen, dass wir bei der Lec-

Es sind uns nur einige ziemlich dunkle Andeutungen über eine seiner Schriften, betitelt: *Brouillon projet d'une atteinte aux évênemens des rencontres du cône avec un plan*, übrig geblieben. Die übrigen, wenn es deren gegeben hat, wie man aus einer Stelle des *Essai* von Pascal annehmen kann, standen vielleicht in fliegenden Blättern, wie es bei Desargues Gebrauch gewesen zu sein scheint, entweder um seine Entdeckungen allgemein bekannt zu machen, oder um seinen zahlreichen Verläumdern zu antworten. Das erwähnte Werk erschien 1639, und Descartes spricht von demselben in mehren seiner Briefe. Es zeichnet sich durch einige neue Sätze und besonders durch den Geist der Methode aus, indem es sich auf die vernünftige und erfolgreiche Bemerkung gründet, dass die Kegelschnitte, weil sie durch die verschiedenen Schnitte eines Kegels mit kreisförmiger Basis entstehen, auch an den Eigenschaften dieser Figur Theil haben müssen.

Desargues führte also eine doppelte wichtige Neuerung in das Studium der Kegelschnitte ein. Erstlich betrachtete er sie auf dem Kegel bei jeder möglichen Lage der schneidenden Ebene, ohne wie die Alten das Axendreieck anzuwenden, und dann war er bemüht, die Eigenschaften des Kreises, welcher dem Kegel zur Basis dient, auf diese Curven zu übertragen. Diese Idee, welche uns heute so einfach und natürlich erscheint, weil wir uns schon an die Betrachtungsart der Perspective und an die anderen verschiedenen Manieren Figuren zu transformiren gewöhnt haben, war den Alexandrinischen Geometern durchaus nicht in den Sinn gekommen. Denn wir finden davon durchaus keine Spur in ihren Schriften, sondern sehen vielmehr, dass, während sie in ihrer Theorie der Kegelschnitte eine Eigenschaft des Kreises (die vom Producte der Abschnitte zweier sich schneidenden Sehnen) anwenden, sie doch gar nicht die Absicht gehabt haben, den analogen Satz für diese Curven aufzusuchen, sondern nur ihr Theorem vom *latus rectum* zu beweisen.

---

türe der Alten keine Spur oder entfernte Andeutung gefunden haben, welche uns berechtigen könnte, bei dieser Gelegenheit ihre Parthie zu ergreifen. Wir glauben im Gegentheil, dass die Methode der Perspective, wie wir sie gegenwärtig in der Geometrie anwenden, in der griechischen Schule durchaus nicht Gebrauch war. Auch wollen wir bis zu einer genauern und weitläuftigern Prüfung diese Methode den Neuern zuschreiben und sagen, dass Desargues und Pascal das Verdienst haben, die ersten gewesen zu sein, sie auf die Theorie der Kegelschnitte angewandt zu haben.

§. 21. Die Methode des Desargues erlaubte ihm in der Theorie der Kegelschnitte, so wie er es in andern Schriften that, neue *allgemeine* Ansichten beizubringen, welche den Begriff und die Metaphysik der Geometrie erweiterten. So betrachtete er die verschiedenen Schnitte auf dem Kegel (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel und das System zweier Geraden) als Unterarten einer einzigen Curve, während sie bis dahin getrennt behandelt wurden, indem man für jeden dieser Schnitte besondere Hülfsmittel anwandte. [27])

Von Descartes erfahren wir noch, dass Desargues auch ein System von mehren unter sich parallelen Geraden als eine Varietät eines Systems von Geraden, die in einen Punkt zusammenlaufen, betrachtet, indem er den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt in unendlicher Entfernung annimmt. „Was die Art betrifft, Parallellinien so zu betrachten, als kämen sie in einer unendlichen Entfernung zusammen, so dass sie zu derselben Gattung gehören, als die, welche sich wirklich in einem Punkte schneiden, so ist es sehr vortheilhaft ...." [28]) (Briefe des Descartes, Th. III, S. 457, Ausgabe in 12.)

Leibnitz erwähnt auch diese Idee von Desargues in einem Memoire über die Art, eine Curve zu bestimmen, welche eine unendliche Anzahl von Linien einhüllt (*Acta erud.* Jahr 1692, S. 168); und an einer andern Stelle führt er sie auf sein Gesetz der Continuität zurück (*Comm. epist.* Th. II, S. 101). Newton nahm diese Definition der Parallellinien in den Sätzen 18 und 22 seiner *Principia phil. nat.* auf, wo er parallele als gerade Linien betrachtet, welche in einem unendlich entfernten Punkte zusammenkommen.

Desargues wandte die Eigenschaften der Curven auf Systeme von Geraden an, was heute eine ganz natürliche und gebräuchliche Sache ist, weil ein System von Geraden wie eine geometrische Curve durch eine einzige Glei-

---

27) *Desarguesius primus sectiones conicas universali quadam ratione tractare, ac propositiones multas sic enuntiare coepit, ut quaecunque sectio subintelligi posset* (*Act. erud.* Jahr 1685, S. 400.).

28) Diese Neuerung machte in damaliger Zeit Aufsehn. Bosse führt als Beispiel der allgemeinen Methode des Desargues in der Geometrie Folgendes an: „Er zeigt in einem Briefe an einen seiner Freunde, den gelehrten Pascal den Sohn, dass parallele Linien durchaus ähnlich mit denen sind, welche von *einem* Punkte ausgehen und dass kein Unterschied zwischen ihnen stattfinde." (*Traité des pratiques geométrales et perspectives*; in 12., 1665.)

chung dargestellt werden kann, was aber damals ein ganz neuer und origineller Gedanke war. Descartes sagt darüber in einem Briefe an Mersenne Folgendes: „Die Art und Weise, wie er sein Raisonnement anstellt, indem er es zu gleicher Zeit auf gerade Linien und auf Curven anwendet, ist um so ausgezeichneter, je allgemeiner sie ist, und scheint dem anzugehören, was ich die Metaphysik der Geometrie zu nennen pflege, von welcher Wissenschaft, so viel ich bemerkt habe, Niemand, ausser vielleicht Archimedes, Gebrauch gemacht hat. Ich für meine Person bediene mich stets derselben, wenn ich im Allgemeinen beurtheilen will, ob Dinge auffindbar sind und an welcher Stelle ich sie finden muss ....." (Briefe, Th. IX, S. 379.)

§. 22. Desargues's Vorstellungen von den Systemen gerader Linien im Vergleich mit krummen Linien mussten ihm nothwendig zu dem Versuche führen, die bekannten Eigenschaften eines Systems zweier Geraden auf die Kegelschnitte anzuwenden. Eine von diesen Eigenschaften, welche Pascal in seinem *Essai pour les coniques* eine wunderbare nennt und welche in der That ausserordentlich fruchtbar ist, ist uns aufbehalten. Es ist dieses die Relation zwischen den Segmenten, welche von einem Kegelschnitt und den vier Seiten eines darin eingeschriebenen Vierecks auf einer Transversale, welche willkührlich in der Ebene der Curve gezogen ist, abgeschnitten werden. Die Relation selbst ist folgende: „Das Product der Segmente, welche auf der Transversale zwischen einem Punkt des Kegelschnitts und zweien gegenüberliegenden Seiten des Vierecks enthalten sind, und das Product der Segmente zwischen demselben Punkt des Kegelschnitts und den beiden andern Seiten des Vierecks stehen unter einander in demselben Verhältniss, als die Producte, welche ganz analog mit dem zweiten Punkte des Kegelschnitts gebildet werden."

Dieses Theorem wird von Pascal in seinem *Essai pour les coniques* und auch von Beaugrand in einem beurtheilenden Briefe über das Werk von Desargues, betitelt: *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan*, angeführt. Aus diesem Briefe erfahren wir auch, dass Desargues die Relation, welche sein Theorem bildet, eine *Involution von sechs Punkten* nannte.

Man sieht, wie die sechs Punkte sich entsprechen oder je zwei und zwei einander *conjugirt* sind. Desargues untersuchte auch den Fall, wenn zwei conjugirte

Punkte zusammenfallen, wodurch er die Involution von fünf Punkten erhielt [29]); sodann auch, wenn ausserdem noch zwei andre conjugirte Punkte zusammenfallen, wo man alsdann nur vier Punkte hat und die Relation ein hormonisches Verhältniss wird.

Die Relation der Involution von sechs Punkten, so wie wir sie angegeben haben, enthält 8 Segmente; man kann sie aber durch eine andre ersetzen, in welche nur 6 Segmente eingehen, und dieses ist dieselbe, welche Pappus für die Segmente, die von den vier Seiten und den beiden Diagonalen auf einer Transversale gebildet werden, gegeben hat. (Der 130ste Satz im VII. Buch der Mathematischen Sammlungen.) Wenn man die beiden Diagonalen als eine Linie zweiter Ordnung betrachtet, welche durch die vier Scheitelpunkte des Vierecks geht, so sieht man, dass das Theorem des Desargues eine Verallgemeinerung des Satzes von Pappus ist, in welchem nur statt der beiden Diagonalen des Vierecks irgend ein durch die vier Scheitelpunkte gehender Kegelschnitt gesetzt ist.

§. 23. Eine ausgezeichnete Schrift von Brianchon, *Memoire sur les lignes du deuxième ordre* (Paris 1817), gründet sich auf dieses Theorem und zeigt dessen ganzen Reichthum und Nutzen. Aber es scheint, als habe Desargues selbst gewusst, daraus Vieles für den Beweis mehrer Eigenschaften der Kegelschnitte zu entnehmen. Denn eines Theils sagt Beaugrand in seinem Briefe [30]), dass ein Theil des *Brouillon projet* etc. dazu benutzt sei, die Folgerungen aus dem in Rede stehenden Theorem zu prüfen; und zweitens finden wir in den *Pratiques géométrales et perspectives* des Graveur Bosse folgende Stelle, welche sich wahrscheinlich auf dasselbe Theorem bezieht. Bosse antwortet den Verläumdern des Desargues und fügt hinzu: „Unter Andern hat das, was er über die Kegelschnitte drucken liess, worin *ein* Satz als besondere Fälle 60 Sätze aus den vier ersten Büchern der Kegelschnitte von Apollonius umfasst, ihm die Achtung der Gelehrten erworben, welche ihn für einen der eigentlichsten Geo-

---

29) Man gelangt auch noch auf anderm Wege zu der Involution von fünf Punkten, wenn nämlich der sechste Punkt in der Unendlichkeit liegt, wobei sein conjugirter eine höchst merkwürdige Lage hat. Ich weiss nicht, ob man diesen Fall besonders geprüft hat, der sich oft darbietet ohne dass man an die Theorie der Involution denkt.

30) Man sehe Note XIV.

meter unserer Zeit halten, welches Urtheil z. B. der vorzüglichste unsres Jahrhunderts, der verstorbene Pascal, aussprach."

Wir finden auch noch einige Bemerkungen, welche sich auf dieses Theorem beziehen und welche beweisen, dass Desargues bedeutende Anwendungen davon zu machen gewusst hat, in einem Werke des Graveur Gregoire Hurat, betitelt: *Optique de portraiture et peinture*, Paris 1670, in fol.

Auf diese Weise wird es gewiss, dass das Theorem des Desargues das Fundament seiner Theorie der Kegelschnitte war und dass die zahlreichen Eigenschaften dieser Curven, welche wir seit einigen Jahren aus diesem Theorem abzuleiten gelernt haben, dem Verallgemeinerungsgeist eines Desargues nicht verborgen geblieben sind.

Aber auch die ausserordentliche Fruchtbarkeit dieses Theorems abgerechnet, so hatte es noch einen andern nicht weniger wichtigen Character, nämlich den, die Verfahrungsart und den Geist der Methode bei den Kegelschnitten einer philosophischen Prüfung zu unterwerfen. Gerade dieses Theorem gestattete es Desargues, auf einem Kegel mit kreisförmiger Grundfläche ganz willkührliche Schnitte zu betrachten, ohne vom Axendreieck Gebrauch zu machen, während die Alten und alle spätern Schriftsteller den Kegel nur durch Ebenen schnitten, welche auf dem Axendreieck senkrecht standen. Diese bedeutende Neuerung scheint uns das Hauptverdienst der Behandlung der Kegelschnitte von Desargues zu sein.

§. 24. Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass das Werk von Desargues in der That gut und originell war und in die Geometrie der Kegelschnitte Allgemeinheit und neue Erleichterungen einführte. Als ein solches wurde es auch von den grössten Geistern jenes Jahrhunderts geschätzt. Die Bewunderung Pascal's für dieses Werk haben wir schon angeführt und wir finden, dass dieselbe von Fermat getheilt wurde, welcher sich in einem Briefe an Mersenne also ausdrückt: „Ich achte Desargues ausserordentlich und vorzüglich, weil er der alleinige Erfinder der Kegelschnitte ist. Sein Büchelchen, welches Andere für ein Geschwätz halten, scheint mir sehr verständig und geistreich." (*Fermati opera*, p. 173.)

Was die Fruchtbarkeit des Theorems und die ungewöhnliche Leichtigkeit, welche dadurch in die Theorie der Kegelschnitte gekommen ist, betrifft, so sieht man leicht, worin der erste Grund dazu liegt. Er giebt nämlich eine ganz allgemeine Relation zwischen 6 willkührlich

auf einem Kegelschnitt gewählten Punkten an. Die Alten haben solche Relationen nur für bestimmte Lagen der 6 Punkte gekannt, z. B. wenn vier von diesen Punkten die Endpunkte zweier parallelen Sehnen sind (die hierbei von ihnen angeführte Relation war: die Producte der auf diesen Sehnen durch die Verbindungssehne der beiden andern Punkte gebildeten Abschnitte verhalten sich unter einander wie die Producte der auf der letztern durch die beiden ersten Sehnen gebildeten Abschnitte). Sie brauchten also immer verschiedene Zwischensätze, um von der directen oder impliciten Betrachtung der fünf Punkte eines Kegelschnitts zu der Betrachtung eines sechsten Punktes zu gelangen. Hieraus entstand die grosse Menge von Sätzen, welche in einer Abhandlung über die Kegelschnitte nothwendig zu sein schien, und eben daher kam auch die Länge ihrer Beweise. Zwar muss man zugestehen, dass die Lösung des Problems *ad quatuor lineas* eine vollkommen allgemeine Eigenschaft von 6 Punkten eines Kegelschnitts angiebt, aber bis auf Apollonius wurde dieses Problem nicht vollständig gelöst, und auch dieser Geometer, welcher sagt, dass er es vermöge der Principien, die in seinem dritten Buche stehen, gelöst habe, hat vielleichtt nicht Zeit gehabt, die Natur desselben gehörig zu ergründen, so dass er es nicht für passend hielt, dasselbe in seine Elemente der Kegelschnitte einzuführen, woraus man erkennt, dass dieser Satz bei den Alten durchaus ohne Anwendung blieb.

§. 25. Wir haben schon gesagt, dass Fermat unter einigen als Porismen dargestellten Sätzen das Theorem des Desargues aufgeführt hatte, und man kann nicht daran zweifeln, dass dieser grosse Geometer durch sich selbst darauf gekommen ist. Aber ausser dem, dass Desargues es mehr als 25 Jahre früher kannte, hat dieser auch noch den Nutzen aller Hülfsmittel gezeigt, welche dieses Theorem in der Theorie der Kegelschnitte darbietet.

R. Simson scheint bis auf die letzte Zeit der einzige gewesen zu sein, welcher sich dieses Theorems bedient hat, das er in dem 5ten Buch seines *Traité des Coniques* (Satz 12) bewiesen hat. Er hat den darin verborgenen Reichthum gespürt; denn nachdem er 6 Folgesätze daraus abgeleitet, fügt er hinzu, dass sie natürliche und leichte Beweise einiger Sätze aus dem ersten Buch der *Principia* Newton's enthalten. Simson entlehnte dieses Theorem aus den Werken Fermat's, wie man aus seinem *Traité des Porismes* sieht, wo er es auch in Nr. 8 beweist.

§. 26. Man hat bis heute das Theorem des Desargues nur in der Ausdrucksweise betrachtet, wie wir es angeführt haben, und es lassen sich auch von ihm in dieser Gestalt viele Anwendungen machen; wenn man aber den Begriff des anharmonischen Verhältnisses mit einführt, so kann man es noch unter einem andern Gesichtspunkte betrachten und ihm eine andre Form geben, welche aus ihm einen andern Satz macht, der neue Anwendungen zulässt. Dieser Satz kann als Centralpunkt in der Theorie der Kegelschnitte betrachtet werden; denn eine grosse Menge verschiedener Eigenschaften dieser Curven, welche unter einander fremd und ohne Verbindung zu sein scheinen, leiten sich auf ganz natürliche Weise aus ihm als Mittelpunkt ab, und er zeigt einen einfachen Weg, von dem Theorem des Desargues zu dem des Pascal zu gelangen und umgekehrt, und dann von jedem dieser beiden zu den verschiedenen andern allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte, wie z. B. zu dem herrlichen Theorem Newton's über die organische Beschreibung dieser Curven. (S. Note XV.)

§. 27. Die Alten haben bei der Bildung der Kegelschnitte nur Kegel mit kreisförmiger Basis betrachtet, und Desargues und Pascal folgten ihnen in diesem Punkte, weil sie diese Curven durch das perspectivische Ansehen des Kreises bildeten. Es bot sich nun die Frage dar, ob alle Kegel, deren Basis irgend ein Kegelschnitt ist, gleichbedeutend mit Kegeln von kreisförmiger Basis seien, oder mit andern Worten, ob ein Kegel, dessen Basis eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, in einem Kreise geschnitten werden kann, und für den Fall, in welchem es geschehen könne, die Lage der schneidenden Ebene zu bestimmen. Mersenne [31]) berichtet uns, das es Desargues war, welcher diese Frage aufstellte, die wegen ihrer Schwierigkeit eine gewisse Berühmtheit erlangt hat; denn sie gehört zu denjenigen, welche drei Lösungen zulassen, indem sie in der Analysis von einer Gleichung des dritten Grades und in der Geometrie von den Kegelschnitten abhängen. Descartes hat sie durch die Principien seiner neuen analytischen Geometrie gelöst, und zwar auf eine höchst elegante Weise für den Fall, dass die Basis des Kegels eine Parabel ist, wobei man nur einen Kreis braucht, dessen Schnitt mit der Parabel die verlangte Lö-

---

31) *Universae geometriae mixtaeque mathematicae synopsis*, p. 331, fol., 1644.

sung giebt.[32]) Seitdem hat dieselbe Frage mehre andre berühmte Geometer beschäftigt: den Marquis von Lhopital[33]), Hermann[34]), Jaquier[35]), welche denselben analytischen Weg verfolgten als Descartes, nur mit Anwendung einiger Vereinfachungen. So viel ich glaube hat noch Niemand eine rein geometrische und graphische Lösung dieses Problems gegeben, und dennoch verschwindet die Schwierigkeit vor den neuen Lehren der Geometrie, welche mehre verschiedene Lösungen desselben liefern kann.[36])

§. 28. Von Desargues haben wir auch noch eine Eigenschaft der Dreiecke, welche in der neuern Geometrie ein Fundamental-Satz von ausserordentlicher Anwendung geworden ist. Nämlich: Wenn von den Scheiteln zweier Dreiecke, die sich im Raum oder in einer Ebene befinden,

32) *Lettres de Descartes*, Ausgabe in 12., Th. VI, S. 328.

33) *Traité analytique des sections coniques*, B. 10, S. 407.

34) *Commentarii Academiae Petropolitanae*, Th. VI, Jahr 1732 und 1733.

35) *Elementi di perspectiva*, Rom 1755, S. 140.

36) Es reicht hin, die drei Hauptaxen des Kegels zu bestimmen; denn wenn man diese kennt, kann man unmittelbar auf die Lage der Ebenen der Kreisschnitte schliessen. Um diese drei Axen zu bestimmen, lege ich durch die grosse Axe des Kegelschnitts C, welcher dem Kegel zur Basis dient, eine Ebene senkrecht auf diese Curve, und in dieser Ebene denke ich mir einen zweiten Kegelschnitt, welcher zu Scheiteln und zu Brennpunkten bezüglich die Brennpunkte und Scheitel des ersten hat. Diesen zweiten Kegelschnitt betrachte ich als die Basis eines zweiten Kegels, welcher mit dem ersten den Scheitel gemein hat. Dieser neue Kegel schneidet die Ebene des Kegelschnitts C in einem andern Kegelschnitt. Diese beiden Curven schneiden sich in vier Punkten, welche die Scheitel eines Vierecks sein werden, in welchem die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten und der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen den gesuchten drei Axen angehören. —

Zweite Lösung: Durch den Scheitel des gegebenen Kegels ziehe man gerade Linien, welche senkrecht auf den Tangenten-Ebenen desselben stehen, so bilden diese einen zweiten Kegel vom zweiten Grade, welcher die Ebene des Kegelschnitts, der die Basis des ersten Kegels bildet, in einem zweiten Kegelschnitt schneidet. Diese beiden Curven treffen sich in vier Punkten, welche wie vorhin zur Lösung des Problems dienen.

Wir müssen noch allgemeiner hinzufügen, dass es in der Ebene der beiden Curven drei solche Punkte giebt, dass jeder von ihnen dieselbe Polaire in Bezug auf die beiden Kegelschnitte hat, welche drei Punkte den drei gesuchten Hauptaxen angehören.

Wir haben noch verschiedene andre Lösungen dieses Problems gefunden, welche aber alle die Construction eines Kegelschnitts erfordern, was auch nothwendig ist, da das Problem drei Lösungen zulässt.

zwei und zwei auf drei in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden liegen, so schneiden sich ihre Seiten in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen, und umgekehrt.

Dieses Theorem findet sich mit zwei andern, wovon eines das reciproke davon ist, am Ende des *Traité de perspective*, welcher von Bosse[37]) nach den Principien und der Methode des Desargues zusammengestellt und 1636 herausgegeben ist. Wenn die beiden Dreiecke in zwei verschiedenen Ebenen liegen, so ist dieses Theorem, wie Desargues bemerkt, eine anschauliche Wahrheit; wenn sie in derselben Ebene liegen, so hat der Beweis das Merkwürdige, dass dabei von dem Ptolemäischen Satz über das von einer Transversale geschnittene Dreieck Gebrauch gemacht wird. Es gehört dies zu den ersten Beispielen bei den Neuern, dass dieses berühmte Theorem, welches seitdem die Grundlage für die Theorie der Transversalen geworden ist, in Anwendung gebracht wurde.

In letzter Zeit wurde das Theorem des Desargues zum ersten Male wieder von Servois hervorgerufen in seinem Werke: *Solutions peu connues* etc. und hernach von Brianchon (*Correspondance polytechnique*, t. III, p. 3), von Poncelet (*Traité des propriétés projectives*) und von Sturm und Gergonne (*Annales de mathématiques*, t. XVI und XVII) vielfältig angewandt. Poncelet hat es zur Grundlage seiner schönen Theorie der *homologischen Figuren* (*figures homologiques*) gemacht, indem er die beiden in Rede stehenden Dreiecke *homologische* nennt, den Durchschnittspunkt der drei Geraden, welche zwei und zwei ihrer Scheitel verbinden, den *Mittelpunkt der Homologie* (*centre d'homologie*), und die Gerade, auf welcher sich zwei und zwei ihrer Seiten schneiden, die *Axe der Homologie* (*axe d'homologie*).

§. 29. Man hat sich bisher nur der beschreibenden Eigenschaften der beiden genannten Dreiecke bedient und ihre metrischen Verhältnisse oder die der Grösse, welche nicht weniger wichtig als die der Lage sind, noch nicht allgemein betrachtet. Man kennt nur einzelne besondre Fälle davon, so z. B. wenn die beiden Dreiecke ähnlich sind und ähnlich liegen, für welchen Fall die Axe der Homologie in der Unendlichkeit ist; sodann weiss man, dass die Entfernungen des Aehnlichkeitspunktes von irgend

---

37) *Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral.*, in 8, 1648, p. 403.

zwei homologen Punkten in einem constanten Verhältniss stehen; und wenn der Mittelpunkt der Homologie zweier Dreiecke in der Unendlichkeit liegt, dann weiss man, dass die Entfernungen zweier homologen Punkte von der Axe der Homologie in constantem Verhältniss stehen. Man sicht leicht, dass diese beiden Relationen nur besondere Fälle von einer gewissen allgemeinen Relation sind, welche sich auf irgend zwei homologische Dreiecke bezieht, wobei weder der Mittelpunkt noch die Axe der Homologie in der Unendlichkeit liegen; diese besteht in Folgendem: „Das Verhältniss der Entfernungen zweier homologen Scheitel der beiden Dreiecke von ihrem Mittelpunkt der Homologie steht zu dem Verhältniss der Entfernungen derselben beiden Scheitel von der Axe der Homologie in constantem Verhältniss." Dieses Theorem ist von ausserordentlichem Nutzen, indem sich daraus viele neue Eigenschaften der homologischen Figuren ableiten lassen, besonders für ein System zweier Kegelschnitte, von denen man nur beschreibende Eigenschaften allgemein untersucht hat.[38])

Wir bemerken noch von dem Theorem des Desargues, dass es ganz einfach auf ein hübsches Princip der Perspective führt, welches gewisser Maassen seine ursprüngliche Bestimmung gewesen zu sein scheint. „Wenn von zwei Figuren im Raum die eine die Perspective der andern ist, und man dreht die Ebene der ersten um die Durchschnittslinie derselben mit der Ebene der zweiten, so laufen die Geraden, welche die correspondirenden Punkte beider Figuren verbinden, immer in einem Punkte zusammen[39]); was selbst dann noch der Fall sein wird, wenn beide Figuren auf einander gelegt werden." Dieses Theorem gewährt ein leichtes Einsehn in gewisse practische Anwendungen der Perspective.

§. 30. Desargues hat sich auch mit den Anwendungen der Geometrie auf die Künste beschäftigt und diesen Gegenstand als ein Mann von überlegenem Geiste behandelt, indem er mit einer Genauigkeit, die oft sogar den Künstlern fremd war, die Principien der Allgemeinheit an-

---

38) Die bis jetzt bekannt gewordenen metrischen Verhältnisse zweier Kegelschnitte reduciren sich, wie ich glaube, auf einige harmonische Relationen.

39) Dieser Vereinigungspunkt verändert seine Lage im Raum, und man sieht leicht, dass er einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht auf der Durchschnittslinie der Ebenen beider Figuren steht.

wandte, welche wir in seinen Untersuchungen über die reine Geometrie erkannt haben.

Verschiedene Schriften über die Perspective, über den Schnitt der Steine und über die Verfertigung der Sonnenuhren sind von ihm ins Publicum gekommen; sie scheinen aber sehr kurz und so zu sagen nur Entwürfe gewesen zu sein, welche das Wesentliche von Werken enthielten, die noch erst entwickelt und vollständig ausgearbeitet werden sollten. Einige Jahre später wurde der berühmte Graveur Bosse, welcher zwar nur ein mittelmässiger Geometer war, aber doch Scharfsinn genug besass, um den Geist des Desargues zu schätzen, von diesem in seine neuen Ideen eingeweiht, welche er von Neuem beschrieb, aber auf eine ganz merkwürdig weitschweifige Weise, von der er zwar glaubte, dass sie dem Bedürfniss eines Künstlers angemessen wäre, welche aber einem Geometer nicht genügen kann. Da jedoch die Originalschriften von Desargues verloren gegangen sind, so haben die von Bosse eine gewisse Wichtigkeit erlangt. Denn einem Geometer, welcher sie mit Aufmerksamkeit lesen will, genügen sie, um die theoretischen Principien wieder herzustellen, welche den verschiedenen practischen Erfindungen des Desargues in seinen Originalwerken zum Grunde gelegen haben. Die Titel derselben sind folgende:

1) *Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement, ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignemens, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage, par G. D. L.* (Girard Desargues Lyonnois), Paris 1636. Das Privilegium war von 1630.

2) *Brouillon projet de la coupe des pierres.* 1640.

3) *Les cadrans, ou moyen de placer le style, ou l'axe,* am Ende des genannten *Brouillon.* [40])

Die von Bosse umgearbeitete Abhandlung über die Perspective enthält ein Fragment des ursprünglichen Werks von Desargues, in welchem man die Grundlage und das wirklich Wesentliche des ganzen Werks von Bosse erkennt. Das, was Desargues beabsichtigte, bestand darin,

---

40) Den Titel des ersten dieser Werke haben wir in der *Perspective de Nicéron* (in fol., 1652) und in der von *Lambert* (2r Theil, Zürich 1773, in 8.) gefunden; die Titel der beiden andern, welche gegenwärtig ganz unbekannt zu sein scheinen, da sie nirgends erwähnt werden, in einem sehr seltenen Werke von J. Curabelle: *Examen des Oeuvres du sieur Desargues*; Paris 1644, in 4. (81 S.)

dass er die Perspective in Anwendung bringen wollte, ohne ein Bild des Gegenstandes dabei zu benutzen, indem er nur mit Hülfe der Gesichtslinien die Lage jedes seiner Punkte im Raum angab, so wie diese Gesichtslinien in der Baukunst dazu dienen, den Grundriss und die Durchschnitte des Gegenstandes zu construiren. Bei dieser Gelegenheit dachte er sich auch den jetzt so sehr gebräuchlichen *verjüngten Maassstab* aus, welcher noch in einigen Werken über die Perspective den Namen des Desargues führt. (S. das von Ozanam, S. 62 in der Ausgabe von 1720, in 8.)

Nach dem Zeugniss Fermat's war dieses Werk höchst angenehm und mit grossem Scharfsinn geschrieben. Auch Descartes fällte darüber ein ähnliches Urtheil, indem er an Mersenne schrieb: „Ich habe vor einigen Tagen die mir zugeschickten beiden kleinen Bücher in fol. erhalten, von denen das eine, welches von der Perspective handelt (*und dieses war von Desargues*), noch seiner sorgfältigen und zierlichen Sprache wegen besonders zu schätzen ist." (*Lettres*, tom. IV, p. 257.)

Das Buch über die *Quadranten*[41]) erhielt auch die Billigung des Descartes, welcher fand, dass „die Erfindung ganz vorzüglich wäre, und um so geistreicher, je einfacher sie wäre." (*Lettres*, tom. IV, p. 147.) Dieser grosse Geist sprach nicht sein Urtheil über das Werk vom Schnitt der Steine aus, weil die Figuren dazu fehlten.[42])

Es scheint, dass die Erfindung der Epicycloiden und ihrer Anwendung in der Mechanik, wovon Leibnitz die Ehre für den berühmten Astronomen Römer in Anspruch nimmt, dem Desargues gebührt. Denn De La Hire berichtet uns in der Vorrede zu seinem *Traité des épicycloïdes*, dass er im Schlosse zu Beaulieu bei Paris ein Rad mit epicycloidischen Zähnen gemacht habe, *in Stelle eines andern ihm ähnlichen, welches früher von Desargues*

---

41) Eine Art Schraubenstock, die Edelsteine beim Schleifen damit festzuhalten.

42) Baillet sagt in seinem Leben Descartes's, dass diese beiden Bücher des Desargues erst 1643 veröffentlicht wären. Dieses ist aber ein Fehler, Baillet verwechselt sie mit denen von Bosse, welche wirklich 1643 erschienen. Dieser Schriftsteller wusste nicht, dass Desargues 1640 seinen *Brouillon projet de la coupe des pierres* herausgegeben hatte, zu dem die *Quadranten* gefügt waren; und dieses ist das einzige Werk, von welchem Descartes in seinem Brief an Mersenne, 1641, hat sprechen können.

construirt wäre. De La Hire wiederholt sogar in der Vorrede zu seinem *Traité de mécanique* (1695), dass er die Construction eines Rades mit unmerklicher Reibung gegeben habe, *dessen erste Erfindung von Desargues herrühre, einem der bedeutendsten Geometer des Jahrhunderts.*

§. 31. Der Hauptcharacter in den Schriften des Desargues ist eine grosse Allgemeinheit in den theoretischen Principien und in ihren Anwendungen, wie man sie in der ausgezeichneten und anerkannten *Géométrie descriptive* von Monge findet. So sagt er im Anfang seines Entwurfs über das Schneiden der Steine, dass seine Manier, die Steine zu schneiden, denselben Grund habe, als seine Art, die Perspective in Anwendung zu bringen. [43]) Und in einem Briefe, der 1643 geschrieben und der von Bosse bearbeiteten Abhandlung über die Quadranten beigefügt ist, spricht Desargues von seinem Vorsatz und von seiner Art und Weise, diese Materien im Allgemeinen aufzufassen, da sie nur unter dieser Form den Gelehrten zugänglich ist. Wir führen noch eine Stelle gemäss den *Pratiques géométrales et perspectives* von Bosse an: „Desargues führte seine Beweise ganz allgemein vermittelst der Körper (*par les solides*), was nicht der gewöhnliche Gebrauch bei denen ist, welche sich Geometer oder Mathematiker nennen." Sollen diese Worte des Bosse, *par les solides*, nur andeuten, dass Desargues bei seinen Beweisen die Betrachtung der Figuren von drei Dimensionen anwandte, um dadurch zu den Eigenschaften der ebenen Figuren zu gelangen, was heut zu Tage die Schule des Monge in der speculativen Geometrie characterisirt?

Mehre Stellen in den Briefen Descartes's zeigen, dass Desargues seine mathematischen Untersuchungen nicht auf die Geometrie allein und ihre Anwendungen einschränkte, sondern dass er auch über Analysis schrieb, ja man sieht sogar, dass er mit philosophischen Materien nicht weniger vertraut war.

Diese Details beweisen das Genie des Desargues, welchen die ausgezeichnetsten Zeitgenossen, Descartes, Pascal, Fermat, ausserordentlich hochschätzten, während die mittelmässigen Köpfe, für deren Fassungskraft die Neuheit und Allgemeinheit seiner Betrachtungs-Weisen zu hoch waren, ihn verfolgten und verläumdeten. Ponce-

---

43) Diesen Ausspruch des Desargues berichtet uns Curabelle S. 70 seines vorhin erwähnten Werkes.

let war der erste, welcher in seinem *Traité des propriétés projectives* diesen wahrhaft gelehrten Geometer schätzen lehrte und ihn unter dem verdienten Namen „eines Monge seines Jahrhunderts" als einen der Begründer der neuern Geometrie anerkannte.

Wir werden in Note XIV noch einiges Nähere über Desargues beibringen.

Erst mehr als ein Jahrhundert später finden wir den Geist der Methoden des Desargues und Pascal wieder. De La Hire hat sie uns in seinem ersten Werke über Kegelschnitte (1673) mitgetheilt, welcher von dem *Brouillon projet des coniques* des Desargues Kenntniss gehabt haben muss, weil er den Titel desselben anführt, während der *Essai pour les coniques* des Pascal schon vergessen gewesen zu sein scheint. 44)

§. 32. Wenn man in historischer Hinsicht von den Arbeiten des Desargues und Pascal über die Kegelschnitte spricht, so muss man auch eines dritten gleichzeitigen Geometers erwähnen, welcher ihnen in diesem Theil der Wissenschaft um einige Jahre zuvorgekommen ist. Mydorge, der als Gelehrter und als Freund des berühmten Descartes bekannt ist, hat das Verdienst, der erste in Frankreich gewesen zu sein, welcher eine Abhandlung über die Kegelschnitte schrieb und welcher die Beweise der Alten zu vereinfachen und über deren Leistungen in Bezug auf diesen Gegenstand hinauszugehen versuchte. Sein Werk erschien zuerst 1631 in zwei Büchern und dann 1641 in vier Büchern, worauf noch vier andre folgen sollten, die aber Manuscript geblieben sind. Mersenne hat uns die Titel davon in seinen Collectaneen über die gesammte Geometrie S. 329 mitgetheilt. Bei Mydorge war es nicht wie bei Desargues und Pascal der Hauptzweck, die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises durch die Perspective oder durch beständige Betrachtung des Kegels, auf welchem sie erzeugt werden, abzuleiten. Sein Werk war ganz im Styl der Alten geschrieben. Da er aber mehr als diese

Mydorge, 1585 — 1647.

---

44) *Cum nihil de his Pascalii, Desarguesii autem pauca sint edita, eo gratior fuit labor doctissimi geometrae Ph. de La Hire, qui vestigiis istorum insistens, multaque perpulchra de suo adjiciens, jam ante 12 annos libellum titulo Novae methodi sectiones conicas et cylindricas explicandi edidit ....* (*Acta Erud.*, ann. 1685, p. 400.)

von der Betrachtung des Kegels Gebrauch machte [45]), so konnte er Sätze, für die Apollonius drei Beweise brauchte, in einen einzigen zusammenfassen, wodurch er diesen Gegenstand bedeutend vereinfachte.

Bemerkenswerth ist in dem Werke von Mydorge eine elegante Lösung des Problems: „einen gegebenen Kegelschnitt suf einen gegebenen Kegel zu legen", welches Apollonius in seinem sechsten Buch nur für den geraden Kegel löste. (3tes Buch, Sätze 39, 40, 41.)

Das zweite Buch ist für die Beschreibung der Kegelschnitte durch Punkte in der Ebene bestimmt, ein Gegenstand, mit dem sich Apollonius gar nicht beschäftigt hat, der sich aber in den *Locis solidis* des Aristäus findet; denn dieses Werk betrachtet die Kegelschnitte in der Ebene und will auf sie aus ihren Eigenschaften kommen, welche keinen Theil der *Elementa conica* des Apollonius ausmachen, da Aristäus selbst ein ähnliches Werk, welches von seinen *Locis solidis* verschieden ist, geschrieben hat.

Von den Beschreibungsarten des Mydorge führen wir an, dass die Ellipse durch einen Punkt einer Geraden, deren beide Endpunkte auf zwei festen Geraden hingleiten, beschrieben wird [46]), und dass man dieselbe Curve erhält, wenn man in einem Kreise alle Ordinaten in einem constanten Verhältniss verlängert, welche letztere Constructionsmethode schon Stevin angewandt hatte (*Oeuvres mathématiques*, p. 348). In demselben Buch findet man, dass, wenn man von einem Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Radien nach den Punkten der Curve zieht und diese in einem gegebenen Verhältniss verlängert, ihre Endpunkte auf einem neuen Kegelschnitt liegen werden, welcher dem ersten ähnlich ist. Diesen so höchst einfachen Satz, der seinem Wesen nach im 6ten Buch des Apollonius, welches von ähnlichen Kegelschnitten handelt, enthalten ist, führen wir hier nur an, weil er nebst der vorher genannten Beschreibungsart (vermöge der Ver-

45) Wir werden über die Methode der Alten einiges Genauere anführen, wenn wir von dem grossen *Traité des coniques* des De La Hire sprechen werden.

46) Die Richtigkeit dieser Beschreibungsart war schon von Stevin bewiesen, der ihre Erfindung dem Guido Ubaldi zuschreibt, welcher sie in seinem Werk *Planisphaericorum universalium Theoria* (in 4., 1579) in der That gegeben hatte; aber diese Beschreibung der Ellipse war schon den Alten bekannt, wie uns Proclus in seinem Commentar zum 2ten Satz des 1sten Buchs des Euclid lehrt.

längerung der Ordinaten in einem bestimmten Verhältniss) der Ausgangspunkt und der einfachste Fall einer Methode der Deformation der Figuren ist, welche von De La Hire und Newton erweitert und von Poncelet in seinem *Traité des figures projectives* auf Figuren von drei Dimensionen ausgedehnt wurde und welche wir im Zustand des Wachsthums, wie wir sie in unserm Memoire über die Geometrie unter dem Titel der *homographischen Deformation* darstellen, als eine der wirksamsten Methoden der neuern Geometrie betrachten.

§. 33. Die Ausführlichkeit, mit welcher wir die Werke von Desargues und Pascal analysirt haben, hat uns von dem andern Theil der Geometrie, der sich auf die Messung bezieht und der direct oder mittelbar, mit mehr oder weniger Künstlichkeit die Betrachtungen des Unendlichen in Anwendung bringt, entfernt. Wir kehren daher zu diesem Theil der Wissenschaft zurück, als deren Erfinder wir bereits Kepler, Guldin, Cavalleri, Fermat, Roberval und Pascal genannt haben. Als Nachfolger dieser geistreichen Männer finden wir Gregoire von St. Vincent, der ihnen im Range nicht nachsteht.

Gregoire von St. Vincent, 1584 — 1667.

Dieser in der alten Geometrie so ausserordentlich bewanderte Geometer wandte, wie Cavalleri und Roberval, nur auf eine ihm eigenthümliche Art, die Methoden Archimed's auf die Quadratur von Flächen an, die von krummen Linien begrenzt werden. Seine Methode, die er *Ductus plani in planum* betitelte, ist wie die des Cavalleri und Roberval eine Vervollkommnung der Exhaustionsmethode und eben so streng als diese, nur dass sie sich viel leichter als die andern in Anwendung bringen lässt. Die verschiedene Lage der in und um Curven beschriebenen Polygone verstattet einen ausgedehnteren Gebrauch, woraus Gregoire von St. Vincent bedeutenden Nutzen zu ziehen wusste. Dieser Unterschied zwischen der Methode des Archimedes und der des Gregoire von St. Vincent hat noch einen andern sehr bedeutenden Vortheil gebracht; denn man kann mit Recht annehmen, dass das kleine Differential-Dreieck, welches in den Figuren des Gregoire von St. Vincent zwischen der Curve und zwei auf einander folgenden Seiten eines der beiden in- oder umbeschriebenen Polygone erscheint, Barrow, Leibnitz und Newton zum Infinitesimalcalcul geführt habe. Dieses findet man aber in jeder Wissenschaft, dass alle Wahrheiten sich an einander reihen und erweitern, und dass die grössten Entdeckun-

gen, weit davon entfernt, unmittelbare Inspiration zu sein, schon durch viele Vorgänger vorbereitet sind.

Gregoire von St. Vincent, dessen Verdienste ungeachtet der gewichtigen Urtheile von Huygens und Leibnitz nicht genug anerkannt werden [47]), bereicherte auch die Geometrie mit unzähligen Entdeckungen über die Kegelschnitte. So schreibt sich von ihm die Kenntniss der merkwürdigen Eigenschaft her, dass die hyperbolischen Räume zwischen den Asymptoten den Logarithmen der Abscissen gleich sind.

Von seinen zahlreichen Methoden, die Kegelschnitte in der Ebene, den einen durch den andern zu erzeugen, wollen wir hier zwei Verfahrungsarten anführen, die seitdem vielfältige practische Anwendung gefunden haben und die der Ausgangspunkt für eine Reihe von Methoden zur Umformung von Figuren geworden sind, welche die Haupt-

---

47) Leibnitz schreibt: *Majora (nempe Galileanis et Cavallerianis) subsidia attulerunt triumviri celebres, Cartesius ostensa ratione lineas Geometriae communis exprimendi per aequationes; Fermatius inventa methodo de maximis et minimis: ac Gregorius a sancto Vincentio multis praeclaris inventis.* (*Acta erud.*, 1686, und *Oeuvres de Leibnitz*, tom. III, p. 192.) Funfzehn Jahre darauf schrieb Leibnitz noch: *Etsi Gregorius a S. Vincentio quadraturam circuli et hyperbolae non absolverit, egregia tamen multa dedit.* (*Oeuvres de Leibnitz*, tom. VI, p. 189.)

Montucla sagt in seiner *Histoire des mathématiques*: „Das Werk des Gregoire von St. Vincent ist ein wahrer Schatz, eine reiche Fundgrube von geometrischen Wahrheiten und wichtigen Entdeckungen."

Wenn die Werke des Gregoire von St. Vincent nicht so berücksichtigt werden, wie sie es verdienen, so liegt der Grund davon ohne Zweifel nur in der beinahe gleichzeitigen Entdeckung der Geometrie des Descartes und der Infinitesimalrechnung, welche alle Untersuchungen auf diese Rechnungsart lenkten. Wir glauben mit Recht, nach dem doppelten Zeugniss, welches wir so eben über diesen Geometer angeführt haben, die jungen Mathematiker, die in die Hülfsquellen und in die Ausbildung der Geometrie Vertrauen setzen, auf dessen Werke hinweisen zu können. Mehre seiner schönen Entdeckungen werden ihnen noch neu erscheinen.

Eine interessante Notiz von Quetelet über Gregoire von St. Vincent benachrichtigt uns, dass dieser viele Manuscripte hinterlassen hat, welche sich in 13 Folio-Bänden im Besitz der Bibliothek von Brüssel befinden. „Es wäre zu wünschen", fügt Quetelet hinzu, „dass ein Freund der Wissenschaften sich der Mühe unterziehen möchte, dieses kostbare Denkmal näher zu prüfen. Er dürfte vielleicht Sachen finden, welche wir selbst gegenwärtig noch nicht kennen. Denn die Kegelschnitte bieten eine unversiegbare Quelle von Eigenschaften dar, so dass man nicht ohne Vermessenheit behaupten ann, dass diese Materie bereits erschöpft sei." (*Correspondance mathématique et physique*, tom. I, p. 162.)

lehren der neuern Geometrie ausmachen. Die erste, welche schon von Stevin und Mydorge angewandt wurde, bestand darin, die Ordination einer Curve in einem bestimmten Verhältniss wachsen zu lassen, während nach der zweiten die Ordinaten sich um ihre Fusspunkte um eine constante Winkelgrösse drehen, so dass sie stets parallel unter einander bleiben.

Gregoire von St. Vincent transformirte den Kreis in eine Ellipse nach jeder von diesen Methoden, oder nach beiden, indem er sie auf verschiedene Weise combinirte.

Man muss gewiss sagen, dass beide Transformationsarten eigentlich nur eine ausmachen und identisch dieselben Figuren erzeugen, aber sie stellen sich unter verschiedener Form dar, weshalb jede ihre besondern Vortheile gewährt. Und es ist jeder Zeit vortheilhaft, dieselbe Wahrheit unter mehren Gesichtspunkten zu betrachten, um alle Anwendungen von ihr zu machen und alle Folgerungen aus ihr zu ziehen, deren sie fähig ist. Hiervon liefert uns die Theorie der Kegelschnitte einen sehr schlagenden Beweis. Denn wir haben gesehen, dass die verschiedenen Transformationen, denen man das Theorem des Desargues oder das des Pascal unterwerfen kann, letztere in den Stand setzen, in ihren unendlichen Folgerungen den grössten Theil der Eigenschaften der Kegelschnitte zu umfassen. (S. Note XV.)

Gregoire von St. Vincent schrieb über die gegenseitige Beziehung der Spirale und Parabel, mit welchem Gegenstand sich seiner Seits auch Cavalleri beschäftigt hatte, ein tiefsinniges Werk, welches die wunderbare Uebereinstimmung dieser beiden Curven, deren zahlreiche Eigenschaften sich gegenseitig entsprechen, darstellt. Die Gleichheit zweier sich entsprechenden Bögen beider Curven, welche auch von Roberval, aber auf eine schwierige Manier durch seine Lehre von der zusammengesetzten Bewegung bewiesen war, wurde späterhin der Gegenstand eines herrlichen Memoirs von Pascal, welches das erste Beispiel von der Vergleichung zweier verschiedenartigen Curven durch die reine Geometrie der Alten ist, durchaus frei von der Betrachtung des Untheilbaren.[48])

§. 34. Wenn wir eine vollständige Geschichte der Geometrie und nicht blos einen Abriss von der allmähligen Ausbildung ihrer Methoden und hauptsächlich derer,

---

48) *Egalité des lignes spirale et parabolique* (*Oeuvres de Pascal*, tom. V, p. 426—452).

welche sich auf die neue Geometrie beziehen, schreiben wollten, so müssten wir, um in Bezug auf diese Epoche vollständig zu sein, noch die Werke mehrer anderer Geometer anführen, welche auch die reine Geometrie der Alten und die neue Lehre von dem Untheilbaren mit Erfolg cultivirten und zu den bedeutenden Fortschritten, welche die Geometrie damals machte, nicht wenig beitrugen. An ihrer Spitze würden dann die beiden berühmten Schüler Galiläi's, Torricelli und Viviani, stehen, deren schöne und wichtige Untersuchungen wir mit besonderm Vergnügen schildern würden; sodann Leotaud, La Loubern, Gregory, Etienne de Angelis, Michel-Ange Ricci, Mercator, Schooten, Ceva, Huygens, Sluze, Wren, Nicolas, Lorenzini, Guido-Grandi, u. A. Mehre dieser Geometer beschäftigten sich auch schon mit der Geometrie des Descartes, welche in dieser Epoche entstand und in der folgenden unter ihren Ausbildnern zu besonderm Ansehn gelangte.

Drittes Kapitel.

Dritte Epoche.

§. 1. Der ausgezeichnetste Dienst, welcher der Geometrie überhaupt geleistet wurde, kommt von Descartes her. Dieser Philosoph verschaffte sich durch seine unschätzbare Erfindung der Anwendung der Algebra auf die Theorie der Curven die Mittel, die Hindernisse, welche bis dahin dem grössten Geometer unübersteiglich gewesen waren, aus dem Wege zu schaffen und dadurch den mathematischen Wissenschaften eine wesentlich neue Gestalt zu geben. 1)

Descartes, 1596 — 1650.

Diese Lehre des Descartes, von der sich in den Schriften der alten Geometer nicht die geringste Spur findet und welche vielleicht die einzige ist, welche den Namen *Proles sine matre creata*, den Montesquieu seinem *Esprit des lois* gab, verdient, diese Lehre, sag' ich, hat zur Folge gehabt, dass die Geometrie einen Character von Allgemeinheit erhielt, der sie wesentlich von der alten Geometrie unterscheidet. Die Methoden von Cavalleri, Fermat, Roberval und Gregoire von St. Vincent trugen auch in ihren metaphysischen Principien das Gepräge dieser Allgemeinheit, jedoch fehlte sie ihnen in den Anwendungen. Nur die Erfindung des Descartes verschaffte die Mittel, diese Methoden auf eine gleichförmige und all-

1) Die Anwendung der Algebra auf die Theorie der Curven ist der Gegenstand der *Géométrie* des Descartes, welche 1637 zu Leyden nebst seinem *Traité des Météores* und seiner *Dioptrique* erschien, als Ergebniss und als Probe seiner berühmten *Methode*, auf welcher die neuere Philosophie beruht. Und gewiss war noch nie ein System erzeugt, welches solche Proben wie die der Methode des Descartes geliefert hätte.

gemeine Weise anzuwenden und bildete die nothwendige Einleitung zu den neuen Rechnungsarten des Leibnitz und Newton, welche auch nicht gezögert haben, aus diesen herrlichen Methoden hervor zu gehen.

Die Geometrie des Descartes zeichnet sich mit Ausnahme dieses hervorstechenden Characters der Allgemeinheit noch in einer besondern, bemerkenswerthen Beziehung vor der alten Geometrie aus, dass sie nämlich durch eine einzige Formel allgemeine Eigenschaften ganzer Gruppen von Curven ausdrückt, so dass man auf diesem Wege keine Eigenschaft einer einzelnen Curve entdecken kann, ohne zugleich ähnliche oder analoge Eigenschaften einer unendlichen Menge von andern Linien kennen zu lernen. Bis dahin hatte man nur specielle Eigenschaften einzelner Curven erforscht und immer durch verschiedene Mittel, welche durchaus keine Verbindung zwischen den verschiedenen Curven erkennen liessen.

Von jetzt an nahm die Geometrie einen rapiden Flug, und ihre Fortschritte erstreckten sich auf alle andere Wissenschaften, welche mit ihr in Verbindung stehn. Selbst die Algebra erhielt von ihr nützliche Unterstützung, ihre symbolischen Operationen wurden leichter zu fassen, ihre Wichtigkeit wuchs; und diese beiden Hauptzweige unserer positiven Kenntnisse gingen einen gleichmässig sichern Schritt.

Was die Algebra betrifft, begnügen wir uns zu sagen, dass einer der ersten nnd wichtigsten Vortheile, die sie der Geometrie verschaffte, die Angabe der Bedeutung und der Anwendung der negativen Wurzeln war, welche man bis dahin als Nichts bezeichnend betrachtet hatte, und welche den alten Analysten so sehr hinderlich war.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten, welche Descartes in seiner Geometrie erschuf und wovon er bei der Construction der körperlichen Oerter einen so glücklichen Gebrauch machte, ist auch eine der sinnreichsten und fruchtbarsten Entdeckungen in der Analysis.

§. 2. Der Geist und das Verfahren in der Geometrie des Descartes sind Jedem, der sich nur mit den ersten Grundlehren der Mathematik vertraut gemacht hat, zu bekannt, als dass wir in irgend eine Entwickelung derselben eingehen dürften. Wir wollen im Gegentheil sogleich eine Uebersicht über die Werke der vorzüglichsten Schriftsteller geben, welche zur Zeit des Descartes lebten und zuerst die Geometrie desselben ausbildeten, indem sie mit deren Hülfe den Kreis der mathematischen Wahrheiten besonders in der Theorie der Curven erweiterten.

Vor allem sind hier Fermat und Roberval zu nennen. Ersterer hatte schon vor dem Erscheinen der Geometrie des Descartes selbst ähnliche analytische Verfahrungsarten angewandt. Aber die Natur und der besondere Character seiner Schriften, die meistentheils auf seiner schönen Methode *de maximis et minimis* basirten, näherten sich bedeutend mehr den Vorschriften der alten Geometrie, als die von Descartes.

Fermat.

Roberval dehnte die eifersüchtige Rivalität, welche zwischen ihm und dem grossen Philosophen bestand, so weit aus, dass er dessen neueste Geometrie bis ins Kleinlichste gehend critisirte, wodurch er aber gerade zur Verbreitung derselben wesentlich beitrug. Andrer Seits gab er aber noch dadurch gewisser Maassen eine Ehrenerklärung, dass er uns eine geschickte Anwendung dieser Methode auf die Construction von *Oertern* vermittelst ihrer Gleichungen unter dem Titel *De resolutione aequationum* hinterlassen hat.

Roberval.

§. 3. Nach dem Erscheinen der Geometrie von Descartes durchdrang deren Geist und Bedeutung besonders De Beaune und erleichterte ihre Lectüre durch Anmerkungen, die von Descartes selbst sehr geschätzt wurden und welche er bei solchen Stellen hinzufügte, die wegen ihrer Kürze und wegen der Neuheit des Gegenstandes selbst den vorzüglichsten Geometern Schwierigkeit machten.

De Beaune, 1601 — 1651.

De Beaune war der erste, welcher die Idee hatte, in die Theorie der Curven die Eigenschaften ihrer Tangenten als ein Element, das sich zu ihrer Construction eignete, einzuführen, und welcher auch bei Gelegenheit einer Aufgabe dieser Art, die von Descartes gestellt wurde, die umgekehrte Tangentenmethode erfand. Es handelte sich darum, eine solche Curve zu construiren, dass der Quotient ihrer Subtangente (auf der Abscissenaxe genommen) und der Ordinate ein constantes Verhältniss zu dem Theil der Ordinate habe, welcher zwischen der Curve und einer festen Axe liegt, die einen Winkel von 45° mit der Abscissenaxe macht und durch den Anfangspunkt der Curve geht. [2])

Dieses Problem, welches selbst noch mit Hülfe der Integralrechnung schwierig ist und nach Erfindung der letztern Leibnitz und die Gebrüder Bernoulli beschäftigt

2) *Lettres de Descartes*, tom. VI, p. 215.

hat, wurde von Descartes aufgelöst, welcher, gewöhnt die grössten Schwierigkeiten in der Geometrie zu überwinden, auch diese Aufgabe auf geometrische Oerter zurückzuführen wusste, indem er jeden Punkt der Curve als den Durchschnitt zweier unendlich nahen Tangenten betrachtete. Auf diesem Wege entdeckte er, dass die Curve eine Asymptote habe, die parallel mit der festen Axe geht und dass die Subtangente auf dieser Asymptote genommen constant sei. Diese Eigenschaften führten Descartes zur Construction aller Tangenten der Curve und zur Construction der Curve selbst vermittelst zweier Lineale, die sich mit bestimmten Geschwindigkeiten fortbewegen. Die Incommensurabilität dieser beiden Bewegungen zeigten ihm, dass die Curve eine mechanische sei und zu denen gehöre, auf welche sich seine Analyse nicht anwenden liesse. Auch gab er nicht ihre Gleichung. (*Lettres de Descartes*, t. VI, p. 137.) [3]

Descartes hatte in seine Geometrie nur die Curven aufgenommen, deren Gleichungen nach seinem Coordinatensystem von einem bestimmten endlichen Grade waren, welche er *geometrische* Curven nannte, während er den übrigen den Namen der *mechanischen* gab. Leibnitz führte dafür die Namen *algebraische* und *transcendente* Curven ein. Jetzt gebraucht man ohne Unterschied beide Ausdrücke, *geometrische* und *algebraische*, zur Bezeichnung derjenigen Curven, welche Descartes in seiner Geometrie behandelt hat. Wir werden stets die erste Benennung anwenden, weil sich die Curven, auf welche sie sich bezieht, eben so durch gewisse geometrische Eigenschaften, welche ihnen gemeinschaftlich sind, von allen andern unterscheiden, als durch die Natur ihrer Gleichungen, und weil man ausserdem diese Eigenschaften mit Hülfe der Geometrie allein beweisen kann, ohne dass man das Coordinatensystem und die algebraischen Formeln des Descartes anwenden darf.

Schooten, 16.. — 1659.

§. 4. Schooten schrieb einen ausführlichen Commentar zur Geometrie des Descartes und wandte dessen Methode in mehren Parthieen seiner *Exercitationes geometricae* vielfältig an, hauptsäch-

3) Der Brief, in welchem Descartes an De Beaune seine Ideen über diese Untersuchung von ganz neuer Art schreibt, indem er sie als das Umgekehrte seiner Tangentenregel betrachtet, scheint uns als eines der wichtigsten Documente eine bedeutende Stelle in der Geschichte des neuen Calculs einnehmen zu müssen.

lich im dritten Buch, welches die *ebenen Oerter* des Apollonius wieder herstellen soll, und im fünften Buch, welches den Titel *De lineis curvis superiorum generum, ex solidi sectione ortis* führt. Hier ist es, wo man das erste Beispiel von der Anwendung der Coordinatenmethode auf Curven im Raume betrachtet findet, obgleich in der That nur von ebenen Curven die Rede ist und Schooten nur zwei Coordinaten anwenden darf. Aber diese Betrachtungsweise war damals nichts desto weniger neu und der erste Schritt in der analytischen Geometrie zu der Betrachtung der drei Dimensionen, welche, wie wir am Ende dieser dritten Periode sehen werden, erst 50 Jahre später gehörig angewandt wurde.

Schooten schrieb einen *Tractatus de organica conicarum sectionum in plano descriptione*, worin er verschiedene Arten dieser Curven durch eine continuirliche Bewegung zu beschreiben angab. Die Beschreibung einer Ellipse durch einen Punct einer Geraden, deren Endpunkte auf den Schenkeln eines Winkels hingleiten, war schon früher bekannt; Guido Ubaldi und Stevin hatten sie bereits gegeben und sie leitet sich sogar von den alten Geometern her, wie wir bei Gelegenheit des Proclus erwähnt haben. Schooten verallgemeinerte nur diese Methode, indem er den beschreibenden Punkt ausserhalb der beweglichen Geraden annahm. Dieses Werk enthält ausser der Beschreibung der Kegelschnitte noch deren Quadratur nach der Methode des Untheilbaren von Cavalleri.

§. 5. Das zweite Buch der *Exercitationes geometricae* ist eine Sammlung von Aufgaben, welche durch die gerade Linie allein aufgelöst werden können. Diese sind die ersten Beispiele, welche wir von dieser Gattung der Geometrie finden, die in neuerer Zeit besonders von Servois und Brianchon unter dem Titel der *Géométrie de la règle* behandelt ist. Am Ende dieses Buchs löst Schooten unter dem Titel eines *Appendix* zwölf Aufgaben, in welchen er annimmt, dass Punkte oder Linien in gewissen Lagen durch hindernde Gegenstände unsichtbar oder unzugänglich werden. Er sagt, dass er auf diese Gattung von Untersuchung durch die Lectüre eines Werkes, *Geometria peregrinans*, geführt sei, in welchem der Verfasser sich vorgesetzt hatte, nur mit Hülfe der Messstange die Aufgaben der practischen Geometrie, wie sie sich hauptsächlich im Kriege darbieten, aufzulösen. Dieses Werk ohne Namen und ohne Jahrzahl scheint für Schooten nicht alt gewesen zu sein und wurde wahrscheinlich in Polen gedruckt.

§. 6. Die Hülfe, welche die Analysis der Geometrie leistete, war so wesentlich und so wunderbar, dass Schooten sich zu den Mathematikern bekannte, welche *dieser* Methode die Klarheit und Eleganz beimessen wollen, die sich in den Beweisen und Constructionen von Lehrsätzen und Aufgaben bei den Alten finden, indem er sie beschuldigt, den wahren Weg, welchen sie verfolgten, verschwiegen zu haben, um ihre Entdeckungen von der Nachwelt desto mehr bewundern zu lassen. Um diese Meinung zu unterstützen, behandelt Schooten viele Sätze auf beide Arten [4]) und zeigt an ihnen, dass sich wirklich die synthetische Methode immer aus der analytischen ableiten lasse. Schooten band sich aber nicht genug an die wahre Bedeutung, welche die Alten dem Wort Analysis unterlegten, und an die Beispiele für diese Methode, welche uns vorzüglich Pappus hinterlassen hat; und hierin allein ist der Grund seines Irrthums zu suchen. Denn weil er keine andre Analysis als die, welche auf der Anwendung der Algebra beruht, anerkannte und weil er davon vor Diophantus keine Spur fand, so schloss er, dass die Alten ihre Analysis verheimlicht hätten. Diese von Schooten erhobene Anklage wurde zuerst von Nonius in seine Algebra aufgenommen und im zweiten Kapitel der Algebra von Wallis wiederholt; seit dieser Zeit aber blieb sie ohne Glauben und wurde für thöricht gehalten.

Sluze, 1623 — 1685.

Hudde, 1640 — 1704.

§. 7. Sluze und Hudde vervollkommneten die Methoden des Descartes und Fermat, um die Tangenten zu ziehen und die *maxima* und *minima* zu bestimmen. Ersterer beschäftigte sich mit der schönen Construction, welche Descartes von den Gleichungen des dritten und vierten Grades mittelst des Kreises und der Parabel gegeben hatte, und erwarb sich den Ruhm, dieselbe zu vervollständigen, indem er sich eines Kreises und irgend eines Kegelschnitts von gegebener Grösse bediente; eine Verallgemeinerung, die damals den Geometern sehr erwünscht war.

De Witt, 1625 — 1672.

§. 8. Der berühmte Pensionair von Holland, Johann De Witt, vereinfachte die analytische Theorie der geometrischen Oerter des

---

4) *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico.* Ein hinterlassenes Werk, in dem man einen analytischen Beweis des Ptolemäischen Satzes über die Segmente, welche durch eine Transversale auf den drei Seiten eines Dreiecks gebildet werden, findet.

Descartes und erdachte eine neue und sinnreiche Theorie der Kegelschnitte, die sich auf die verschiedenen Beschreibungsarten dieser Curven in der Ebene ohne Hülfe des Kegels gründet, und woraus er mit vieler Geschicklichkeit auf rein geometrischem Wege ihre hauptsächlichsten Eigenschaften ableitete. Die Beschreibungen des De Witt werden durch die Durchschnitte gerader Linien gebildet, welche im Allgemeinen Schenkel von beweglichen Winkeln sind. Bis dahin hatte man nur die Parabel auf diese Weise beschrieben, während die Ellipse und Hyperbel ihre Entstehung aus dem Kreise entweder direct ableiteten oder doch bei den verschiedenen Beschreibungsarten zur Anwendung desselben nöthigten. Inzwischen müssen wir erwähnen, dass auch Cavalleri schon die Idee gehabt hatte, für die Ellipse und Hyperbel eine Beschreibungsart durch die gerade Linie, die der für die Parabel analog war, aufzusuchen, und dass seine Untersuchungen einen so günstigen Erfolg gehabt haben, dass dieser Geometer selbst gesteht, er habe eine lebhafte Freude darüber gehabt.[6]) Das Princip seiner Methode wollen wir allgemeiner aussprechen, wodurch es sich leichter auffassen lässt. „Für irgend einen gegebenen Winkel ziehe man Transversalen, die unter einander parallel sind, durch die Durchschnittspunkte jeder Transversale mit den beiden Schenkeln des Winkels ziehe man zwei Gerade, welche respective von zwei festen Punkten ausgehen, so werden sich diese beiden Geraden in einem Punkte schneiden, welcher zum geometrischen Ort einen Kegelschnitt hat, der durch die beiden festen Punkte geht." Cavalleri bewies nicht dieses allgemeine Theorem, sondern nur einen speciellen Fall davon, indem er den Winkel als einen rechten annahm, die beiden festen Punkte auf dessen Schenkeln und die Richtung der Transversalen so, dass diese beiden Punkte die Scheitel der Curve wurden. So war also die Idee, von welcher De Witt bei seiner Beschreibung der Kegelschnitte durch die gerade Linie geleitet wurde, nicht durchaus neu; da aber Cavalleri bei einem einzigen und zwar einem der eingeschränktesten Theoreme stehen blieb, so behauptet das Werk von De Witt den Character der Neuheit, welcher in der Geschichte der Geometrie beachtet zu werden verdient. Ausser diesem Character der Neuheit aber finden

---

5) *Exercitationes geometricae sex.* Bononiae 1647, in 4 — *De modo facili describendi sectiones conicas, et in omnibus uniformi.* (*Exercitatio sexta.*)

wir auch noch in den Constructionen des De Witt den Keim zu der berühmten organischen Beschreibung der Kegelschnitte, welche Newton in dem ersten Buch seiner Principien gegeben und in seiner Aufzählung der Linien dritter Ordnung und in der allgemeinen Arithmetik wiederholt hat. Denn man erhält in der That mehre Theoreme des De Witt, wenn man in dem von Newton einen Winkel = 0 und seinen Scheitel in der Unendlichkeit annimmt.

In der Vorrede zu seinem Werke sagt uns De Witt, dass er dasselbe als eine Einleitung zu einer allgemeinen Theorie und zu einer Aufzählung der Curven höherer Ordnung betrachtet wissen will: eine fruchtbare Idee, welche funfzig Jahre später voon Newton, Maclaurin und Braikenridge realisirt wurde.

Wallis, 1616 — 1703.

§. 9. Wallis schrieb zuerst eine *analytische Behandlung der Kegelschnitte* nach den Lehren der Geometrie des Descartes, während seine Vorliebe sich besonders jenem andern Theile der Geometrie zuwandte, welcher sich auf die Entdeckungen Archimed's stützt. Indem er nun in seiner Arithemetik des Unendlichen die kräftige cartesische Analysis auf die Methode des Untheilbaren von Cavalleri anwandte, brachte er die Geometrie in allen Untersuchungen, welche heute Gegenstand der Integralrechnung sind, unendlich viel weiter.

VanHeuraet, Neil.

§. 10. Huygens, Van Heuraet und Neil waren ebenfalls Beförderer der Geometrie des Descartes. Beide letztere theilen sich in den Ruhm, dass sie die ersten waren, die das Problem über die Rectification der Curven lösten, welches einigen Geometern seiner Natur nach unlösbar schien und welches in jener Zeit Schwierigkeiten ganz neuer Art darbot.

Huygens, 1629 — 1695.

§. 11. Huygens hat so vielfältige Verdienste und seine Werke haben so ausserordentlich zur Ehre der Geometrie beigetragen, dass wir bei ihm durchaus mehr ins Einzelne eingehen müssen.

Dieser grosse Geometer war nicht allein mit der Methode des Descartes und deren Gebrauch vollkommen vertraut, sondern er vervollkommnete sie sogar in mehren ihrer Anwendungen. Aber seine unüberwindliche Vorliebe fesselte ihn an die Methode der Alten, durch welche die Kraft seines Genies die grössten Schwierigkeiten zu überwinden wusste.

Wenn es sich nur darum handelte, die Stelle anzugeben, welche Huygens in der Geschichte der Mathematik einzunehmen berechtigt ist, so würde es hinreichend sein, anzuführen, dass Newton seiner nie ohne den Beinamen des *Grossen* (*Summus Hugenius*) erwähnt und von dessen Entdeckung immer mit grosser Bewunderung spricht. „Er hielt ihn für den gewandtesten Schriftsteller unter den damaligen Mathematikern und für den ausgezeichnetsten Nachahmer der Alten, die nach seiner Meinung wegen ihres Geschmacks und wegen der Form ihrer Beweise Bewunderung verdienen." 6) Wir fügen hier einen Abriss der Entdeckungen bei, welche Huygens der Geometrie der Alten verdankt und welche zeigen, wie viele Hülfsmittel diese Methode demjenigen darzubieten hat, der in ihren Geist einzudringen und die ihr eigene Anschauungsweise aufzudecken versteht.

Indem sich Huygens mit der näherungsweisen Quadratur des Kreises und der Hyperbel beschäftigte, fand er neue und merkwürdige Relationen zwischen diesen Curven. — Er gab die Rectification der Cissoide, während man bis dahin nur zwei Curven, die kubische Parabel und die Cycloide rectificirt hatte. — Er bestimmte die Oberfläche der parabolischen und hyperbolischen Conoide; das erste Beispiel von solcher Bestimmung der krummen Oberflächen. — Ihm verdankt man ausgezeichnete Theoreme über die logarithmische Linie und über die Körper, welche diese erzeugt. Alle diese Eigenschaften, welche Huygens nur im Verlauf seiner Abhandlung über die Ursache der Schwere angeführt hatte, wurden ven Guido-Grandi in der Weise der Alten bewiesen. — Huygens löste auch sowohl das Problem von der Kettenlinie, welches von Galiläi, der aber daran scheiterte, ausgedacht und von Jacob Bernoulli wieder angeregt wurde, als auch die berühmte Aufgabe über die Curve der gleichen Entfernungen, welche Leibnitz bei Gelegenheit seines Streits wegen des Maasses der lebendigen Kräfte den Schülern des Descartes als Ausforderung gestellt hatte. Diese beiden Untersuchungen schienen den beiden berühmten Geometern, welche sie stellten, unumgänglich nothwendig die Integralrechnung zu erfordern. Huygens aber löste sie nur mit Hülfe der alten Geometrie.

---

6) Pemberton in der Vorrede zu den Elementen der newtonschen Philosophie.

Man kann zu dem Glauben kommen, dass diese verdiente Bewunderung für die geometrische Schreibart des Huygens den grossen

§. 12. Das berühmte Werk *De horologio oscillatorio* verdient in der Geschichte der grossen Erzeugnisse des menschlichen Geistes an die Seite der *Principia* gesetzt zu werden; es bildet die nothwendige Einleitung dazu, welche Newton hätte erschaffen müssen, wenn ihm nicht das Genie von Huygens zuvorgekommen wäre. Jedes einzelne Kapitel darin genügt, um die grösste Bewunderung zu erregen. Das erste enthält die Beschreibung der Pendeluhren, welche zum ersten Male ein genaues Maass der Zeit gaben. Das zweite, unter der Ueberschrift *De descensu gravium*, vervollständigt die wichtige Entdeckung Galiläi's von der beschleunigten Bewegung, wenn Körper frei fallen oder auf geneigten Ebenen hingleiten. Huygens betrachtete ihre Bewegung auf gegebenen Curven, wobei er die wichtige Eigenschaft der Cycloide nachwies, dass diese Curve im leeren Raum eine tautochrone sei. Das dritte Kapitel (*De evolutione et dimensione linearum curvarum*) ist die berühmte Theorie der Evoluten, ein Hauptgewinn für die Theorie der Curven, von dem die Anwendungen in allen übrigen Theilen der mathematischen Wissenschaften eben so häufig als ausgedehnt sind. Diese wichtige Entdeckung war in den Händen von Huygens nicht eine einfache geometrische Speculation, sondern er wusste daraus die glücklichsten Folgerungen zu ziehen. Er bewies dadurch eine Menge von neuen und merkwürdigen Sätzen, z. B. verschiedene Theoreme über die Rectification der Curven, so wie auch die Eigenschaft der Cycloide, dass sie zur Evolute eine zweite gleiche Cycloide hat, welche man als die nämliche Cycloide betrachten kann, die nur aus ihrer Stelle gerückt ist, und zwar im Sinne ihrer Basis um die ganze Länge der halben Peripherie des erzeugenden Kreises, und in dem zur Basis senkrechten Sinne um die Länge des Durchmessers dieses Kreises. 7) Im vierten Kapitel seines *Horologium*

Newton zu einer Art von Nacheiferung veranlasst hat, welche ihn dieselbe Manier in der Darstellung und in der Methode bei seinem unsterblichen Werke, den *Principiis*, annehmen liess, obgleich er schon alle Hülfsmittel der ausgebildetsten Analysis besass.

Wir führen diese Meinung nach dem Baron Moritz an, welcher sie in seiner vortrefflichen Notiz über das Leben und die Werke von Huygens aussprach.

7) Bei dieser Anordnung bilden die Cycloide und ihre Evolute eine Brücke mit doppelten Bögen, bei welcher die Widerlage des obern Bogens auf dem Schlussstein des untern ruht. Man sagt gewöhnlich, dass die Evolute der Cycloide eine zweite gleiche Cycloide

oscillatorium löst Huygens ganz allgemein und vollständig das berüchtigte Problem über die *Mittelpunkte der Schwingung* auf, welches von Mersenne vorgelegt war und zu vielen Verhandlungen zwischen Descartes und Roberval Veranlassung gegeben hatte. In dieser Lösung erblickt man zum ersten Male eines der schönsten Principien der Mechanik, welches seitdem unter dem Namen des *Princips von der Erhaltung der lebendigen Kräfte* bekannt ist. An das fünfte Kapitel endlich, in welchem Huygens eine zweite Construction seiner Uhren giebt, schliessen sich die dreizehn berühmten Sätze über die Centrifugalkraft bei der Kreisbewegung. In dem zweiten, dritten und fünften dieser Sätze war dem Wesen nach die Anwendung dieser Theorie auf die Bewegung der Erde um ihre Axe und des Mondes um die Erde enthalten, und hierdurch geleitet entdeckte Newton das Gravitationsgesetz des Mondes gegen die Erde. Diese nämliche Theorie zeigt sich auch als Ergänzung der Theorie der Evoluten, um auf ganz natürlichem Wege zur Kenntniss der Centralkräfte bei der krummlinigen Bewegung zu gelangen, welche ebenfalls eine der grossen Entdeckungen Newton's ist und welche ihm für die bekannten Kepler'schen Gesetze den Beweis *a priori* gab. Diese Zusammenstellung jedoch war dem Geiste Huygens's, der mit zu vielen andern grossen Gedanken beschäftigt war, entgangen.

§. 13. Das Werk über das Licht ist eines der herrlichsten Denkmäler von dem Geiste Huygens's, welcher mit bewunderungswerthem Scharfsinn die Geometrie auf seine sinnreiche Wellentheorie anzuwenden wusste. Auch findet man darin das schöne mathematische Gesetz, welches er in den Erscheinungen der doppelten Strahlenbrechung beim Isländischen Feldspath entdeckte. Dieses ist übrigens, wie ich glaube, das erste Mal, dass Oberflächen des zweiten Grades in einem Phänomen der Natur erschienen. Diese bedeutende Entdeckung wurde von Fresnel vervollständigt, welcher, um die Erscheinungen der Polarisation des Lichts zu erklären, statt der ellipsoidischen Wellen des Huygens eine Oberfläche vom

sei, welche sich in *umgekehrter Lage* befindet oder welche in *entgegengesetztem Sinne* liegt. (S. die *Analyse des infinimens petits* vom Marquis von Lhopital S. 92, und *Histoire des Mathématiques* von Montucla Th. II, S. 72 u. 154.) Diese Art sich auszudrücken ist aber unrichtig, weshalb wir die gegenseitige Lage der Cycloide und ihrer Evolute so genau beschrieben haben.

vierten Grade annahm. [8]) Fresnel, welcher durch einen zu frühen Tod den physikalischen und mathematischen Wissenschaften, in die er schon so ausserordentlich tief eingeweiht war, entrissen wurde, gab durch diese bedeutende Arbeit der Theorie von Huygens ein neues Leben. Nachdem sie mehr als ein Jahrhundert hindurch in unerklärlicher Vergessenheit gelegen hatte, erhob er sie wieder zu dem Range, welchen sie unter den Wahrheiten der Physik einzunehmen berechtigt ist.

Hier dürfte es auch noch an der richtigen Stelle sein, eine schöne mathematische Deduction anzuführen, welche Huygens aus seiner Theorie des Lichts ableitete, welche aber in neuerer Zeit von Neuem erschaffen werden musste,

---

8) Fresnel gab für diese Oberfläche des vierten Grades folgende geometrische Construction, welche ausserordentlich merkwürdig ist und dabei in dieser ganzen Theorie den Oberflächen zweiten Grades die Hauptrolle bewahrt. *Man denke sich ein Ellipsoid* (dessen Hauptaxen proportional sind den Quadratwurzeln aus den drei Hauptelasticitäten des Mittels oder auch den Geschwindigkeiten des Lichts nach den Axen dieser Elasticitäten), *ziehe durch den Mittelpunkt dieser Oberfläche irgend eine Transversale*, *trage von dieser Geraden vom Mittelpunkt aus zwei Segmente auf*, *welche den beiden Halbaxen jener Ellipse gleich sind*, *die durch den Schnitt der Oberfläche mit einer Diametral-Ebene*, *die senkrecht auf der Transversale steht*, *erhalten wird*; *dann werden die Endpunkte dieser Segmente auf der in Rede stehenden Oberfläche vierten Grades liegen.* (S. das Memoire von Fresnel über die doppelte Strahlenbrechung im VII. Bande der *Mém. de l'Acad.*; das Memoire von Ampère über die Bestimmung der krummen Oberfläche der Lichtwellen in einem Mittel, dessen Elasticität nach den drei Hauptdirectionen verschieden ist, in den *Annal. de chimie et de phys.* 1828; und die Abhandlung über das Licht von Herschel.)

Nach dieser Theorie liefern die schönen Gesetze der Polarisation, die in der neuesten Zeit von den berühmtesten Physikern, namentlich von Biot und Brewster entdeckt sind, unmittelbar geometrische Eigenschaften des Ellipsoids und allgemein der Oberflächen zweiten Grades. So können also diese optischen Erscheinungen, welche schon so viel Licht auf Alles, was sich auf die genaue Structur kristallisirter Körper bezieht, geworfen haben, selbst Hülfe beim Studium der rationellen Geometrie leisten.

Man kann kein schöneres Beispiel für die Verkettung sämmtlicher Wissenschaften, noch einen evidenteren Beweis finden, dass die gegenseitige Unterstützung ihnen zur sichern und schnellen Verfolgung ihres Weges nothwendig ist.

Man kann übrigens aus dieser Zusammenstellung sehen, dass die Oberflächen des zweiten Grades bestimmt sind, bei der Ableitung der allgemeinsten Naturgesetze eine wichtige Rolle zu spielen, und dass man sich nicht zu viel beeilen kann, die unzähligen geometrischen Eigenschaften, welche diese Oberflächen entweder einzeln für sich oder in ihren Beziehungen unter einander darbieten, zu ergründen.

um die Aufmerksamkeit der Geometer zu fesseln und die Früchte zu tragen, deren sie fähig war. Huygens fand durch die Anwendung seines Undulationssystems Folgendes: „Wenn einfallende Strahlen, welche entweder von einem festen Punkte ausgehen oder unter einander parallel sind, sich auf einer Curve brechen, und man denkt sich die Peripherie eines Kreises, der um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt beschrieben ist, oder auch eine Gerade, die auf der Richtung der Parallelstrahlen senkrecht steht, und man denkt sich ferner um jeden Punkt der störenden Curve als Mittelpunkt einen Kreis beschrieben, dessen Radius in einem constanten Verhältniss zur Entfernung dieses Punkts von der ersten Peripherie oder von der Geraden steht, so werden alle diese neuen Kreise eine einhüllende Curve haben, für welche die gebrochenen Strahlen Normalen sind." Diese Curve ist die Form der gebrochenen Welle. Und hieraus schloss Huygens auf das Gesetz des constanten Verhältnisses der Sinusse des Einfalls- und Refractionswinkels.

Ebenso nun wie Tschirnhausen später[9]) die Curve betrachtete, welche die gebrochenen Strahlen einhüllt, ebenso betrachtete Huygens die Curve, welche auf diesen Strahlen senkrecht steht. Die erste allein hat die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen und nur die Betrachtung dieser Curve haben sie bei ihren Arbeiten in der Optik zu Grunde gelegt. Die zweite ist spurlos an ihnen vorübergegangen, als wenn sie nicht ebenso wie die erste auf einer rein geometrischen Construction beruht hätte, unabhängig von einem damals noch zweifelhaften System, welches die Veranlassung dazu gegeben hatte. Gleichwohl ist die Curve von Huygens im Allgemeinen viel einfacher als die von Tschirnhausen und schliesst sich besser den optischen Eigenschaften der Curven an. Es wird hinreichen als Beispiel anzuführen, dass die Brennlinie des Tschirnhausen, die durch die Strahlenbrechung an einem Kreise entsteht, sich bis jetzt allen Mitteln der

9) Tschirnhausen theilte seine ersten Ansichten und Resultate aus der Theorie der Brennlinien der Academie der Wissenschaften zu Paris im Jahre 1682 mit; Huygens hatte derselben Academie seinen *Tractatus de lumine* schon drei Jahre vorher überreicht. Schon seit langer Zeit war er im Besitz seiner Theorie der Evoluten und hätte also nur einen einfachen Schritt zu thun gehabt, um *seinen* Namen den berühmten Brennlinien zuzutheilen, deren Erfindung und deren Anwendung in der Optik sowohl als in der Geometrie bei der Rectification gewisser Curven den Ruhm von Tschirnhausen begründet haben.

Analysis widersetzt hat, so dass man noch nicht ihre Gleichung hat geben können, während die analoge Curve von Huygens ganz einfach eine Ovale des Descartes (eine Curve vom vierten Grade) ist, deren Natur oder Gleichung durch einige geometrische Betrachtungen oder durch eine kurze Analysis erkannt werden kann. [10]) Nichts desto weniger sind die Curven von Huygens unbeachtet geblieben, bis vor 10 Jahren Quetelet die analytischen Schwierigkeiten, welche die Untersuchung der Strahlenbrechung darbietet, zu beseitigen suchte und dabei auf die Idee kam, in dieser Theorie statt der Brennlinien des Tschirnhausen Curven zu substituiren, welche die Evolventen derselben waren. In Folge dieser glücklichen Idee kam er durch rein geometrische Betrachtungen zur Construction dieser Evolventen vermittelst der Enveloppe eines beweglichen Kreises, und nannte diese Curven, welche augenscheinlich den gebrochenen Wellen von Huygens entsprechen, die secundären Brennlinien. Auch dehnte dieser gewandte Geometer dieselbe Doctrin auf den Fall aus, wenn die einfallenden Strahlen senkrecht auf einerlei Curve oder im Raume normal gegen einerlei Oberfläche sind. [11])

Diese Ausdehnung war gleichfalls schon in der Theorie von Huygens mitbegriffen. Es folgt nämlich unmittelbar aus derselben jenes schöne Gesetz für die Brechung der Lichtstrahlen, dass „einfallende Strahlen, welche senkrecht gegen ein und dieselbe Oberfläche sind, dieselbe Eigenschaft behalten, nachdem sie durch irgend eine Oberfläche gebrochen sind und sich folglich nach der Brechung in zwei Gruppen theilen, die zwei Reihen von Developpabeln bilden, die sich rechtwinklig durchkreuzen": ein Theorem, welches zuerst Malus an einem Strahlenbüschel bemerkte, bei dem die Strahlen entweder von *einem* Punkte ausgehen oder unter einander parallel sind, von dem er aber nach dem Resultate einer sehr verwickelten Rechnung

---

10) Bei der Brechung an einer geraden Linie tritt der Unterschied zwischen den Curven von Tschirnhausen und Huygens nicht weniger merklich hervor: erstere ist eine Curve vom sechsten Grad, deren Berechnung bedeutend lang ist, während die andere ganz einfach eine Ellipse oder Hyperbel ist, wie es zuerst Gergonne fand. (*Annales de Math.* tom. XI, p. 229.) Dieser gelehrte Geometer hat auch schon die Vermuthung ausgesprochen, dass es möglich sein könnte, dass die Brennlinien zu ihren Evolventen einfachere Curven, als sie selbst sind, haben dürften. (*Annal. de Math.* tom. V, p. 289.)

11) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, tom. III et V.

nicht glaubte, dass es auf ein System von Strahlen, die senkrecht gegen eine Oberfläche sind, ausgedehnt werden könne.[12]) Dupin gab zuerst dem Theorem des Malus und zwar durch rein geometrische Betrachtungen die ganze Allgemeinheit, welche es gestattet.[13])

Aus dem hier Beigebrachten ersieht man, welche nützliche und fruchtbare Entdeckungen das Werk von Huygens über das Licht den Geometern dargeboten hätte, wenn sie den Ansichten dieses grossen Geistes früher Vertrauen geschenkt hätten. Ein merkwürdiges Beispiel von der Langsamkeit, mit welcher unsre positiven Kenntnisse fortschreiten und sich vervollständigen, und eine ernste Zurechtweisung für den Hochmuth des menschlichen Geistes.

Diese Abschweifung war vielleicht den eigentlichen Fortschritten der geometrischen Methoden fremd, aber gewiss behandelte sie eine der schönsten Anwendungen der Geometrie auf die Physik und könnte vielleicht dazu beitragen, einige unsrer jüngern Leser für diese Gattung geometrischer Untersuchungen, welche noch neu ist und reichliche Ausbeute verspricht, zu gewinnen.[14])

§. 14. Der bewunderungswürdige Scharfsinn, welchen Huygens in allen den grossen Fragen, die er der Geometrie unterwarf, gezeigt hat, fehlt auch keineswegs in seinen Untersuchungen über Mechanik, wie z. B. die berühmte Aufgabe über den Stoss der Körper beweist, welche er zu gleicher Zeit mit Wallis und Wren löste; und ebenso untrennbar ist in den astronomischen Entdekkungen sein Name von denen eines Kepler, Galiläi und Newton.

---

12) *Mémoire de l'optique*, Art. 22 und 27, im 14ten Heft des *Journal de l'Ecole Polytechnique.*

13) *Applications de Géométrie et de Mécanique*; *Mémoire sur les routes de la lumière*, p. 192.

14) Hamilton, Director des Observatoriums zu Dublin, setzte die schönen Arbeiten von Fresnel fort, und gelangte dahin, alle noch so zusammengesetzten und delicaten Phänomene des Lichts einem neuen analytischen Calcul zu unterwerfen, welcher zu mathematischen Gesetzen führen zu müssen scheint, die diese ganze weitläufige und wichtige Theorie beherrschen.

Wir haben von Quetelet zu unserer besondern Freude erfahren, dass ein andrer gelehrter Geometer, Mac Cullagh, dieselben Untersuchungen als Hamilton verfolgt, aber mit Hülfe ganz rein geometrischer Betrachtungen. Möchten doch die Arbeiten von Mac Cullagh wieder Männer von gerechtem und unpartheiischem Geiste der Geometrie zuführen und den Methoden von Huygens und Newton das Ansehn wiedergeben, welches sie verdienen!

Obgleich die Methode der Alten beinahe beständig die einzige Norm für seine Betrachtungen und Untersuchungen war, so kannte er doch alle Hülfsmittel, nicht allein die der Geometrie des Descartes, sondern auch die des neuen Calculs von Leibnitz, welchen er seit seiner Entdekkung studirt hatte und dessen Vorzüge er zu schätzen wusste. [15])

Barrow, 1630 — 1677. §. 15. Unter den Zeitgenossen des Wallis und Huygens, welche am meisten zur Förderung der Geometrie beitrugen, müssen wir noch Barrow nennen, den Lehrer Newton's auf der Universität zu Cambridge. Dieser Geometer gab 1669 seine *Lectiones geometricae* heraus, ein Werk voll der tiefsten Untersuchungen über die Eigenschaften der Curven, hauptsächlich über deren Ausmessung. Ausserdem findet man in der zehnten Vorlesung seine Tangentenmethode, die in der That wenig von der des Fermat verschieden ist, welche aber durch die Betrachtung des kleinen Differential-Dreiecks und durch die Einführung zweier unendlich kleinen Quantitäten statt einer, schon ein Schritt weiter zur Lehre und zum Algorithmus des Leibnitz war.

Seine Kenntnisse in der griechischen und arabischen Sprache setzten Barrow in den Stand, dass er der Wissenschaft dadurch einen wesentlichen Dienst leisten konnte, dass er sehr geschätzte Uebertragungen ins Lateinische lieferte von den Elementen und den Daten des Euclid, von den vier ersten Büchern des Apollonius, von den Werken des Archimedes und von der Sphärik des Theodosius. In allen diesen Werken finden sich die Beweise grossen Theils umgearbeitet und ausserordentlich vereinfacht.

Man hat im Jahr 1684 unter dem Titel *Lectiones mathematicae* die Vorlesungen gesammelt, welche Barrow an der Universität zu Cambridge über Philosophie und Mathematik in den Jahren 1664, 1665 und 1666 gehalten hat, wozu noch vier andre Vorlesungen von unbestimmtem Datum kommen, die zum Zweck hatten, die Methode anzugeben, durch welche Archimedes zur Entdeckung sei-

15) Die Universität zu Leyden ist reich an Manuscripten, welche ihr von Huygens vermacht sind, und worunter sich ausser den Productionen dieses bedeutenden Mannes eine Sammlung von Briefen befindet, die er von allen Gelehrten empfing. Die Vorsteher dieser Universität hatten vor einigen Jahren die Absicht, einen Theil dieses kostbaren Schatzes drucken zu lassen. Ein Vorhaben, welches nicht früh genug zur Ausführung gebracht werden kann.

ner vorzüglichen Theoreme gekommen sei, und nachzuweisen, wie wenig diese von der modernen Analysis abweiche.[16] Man kann diesen Gegenstand nicht mit mehr Genauigkeit und Klarheit behandeln, als es Barrow gethan hat; aber bei seinen andern mathematischen Vorlesungen muss man es bedauern, dass sie von griechischen Citaten strotzen, wodurch ihre Lectüre sehr erschwert wird.

Endlich hat Barrow in seinen *Lectiones opticae* mit Gewandtheit verstanden, die Geometrie auf eine grosse Anzahl von Fragen anzuwenden, die sich auf die Reflexion und Refraction bei krummen Oberflächen beziehen. Er construirt die Punkte, in welchen sich unendlich nahe Strahlen treffen, aber trotz seinem richtigen Tact und trotz seiner Fertigkeit in geometrischen Speculationen hat er doch noch nicht daran gedacht, die Curve, welche aus der Aufeinanderfolge dieser Punkte entsteht, oder die Enveloppe dieser Strahlen zu betrachten; gleich Huygens, der auch so nahe an der Entdeckung dieser Curve war, überliess er Tschirnhausen diese Ehre.

§. 16. Hier wird es auch an der richtigen Stelle sein, über den eben genannten Geometer Etwas beizubringen.

Tschirnhausen, 1651 — 1708.

Tschirnhausen erwarb sich eine grosse Berühmtheit durch seine bekannten *Brennlinien*, deren Erfindung sogleich die Basis mehrer physikalisch-mathematischen Theorien wurde. Wenn man sie als rein geometrische Speculation betrachtet, so hatte sie den doppelten Vortheil, nach den Evoluten von Huygens das nächste Beispiel für die Erzeugung von Curven als Enveloppen einer beweglichen Geraden darzubieten und einer grossen Zahl von rectificirbaren Curven die Entstehung zu geben.

Diese Brennlinien so wie die Evoluten waren gewisser Maassen eine practische Anwendung der Idee De Beaune's, welcher die Natur der Curven durch eine ihren Tangenten gemeinschaftliche Eigenschaft bestimmen wollte. Aber Huygens und Tschirnhausen sind nicht durch diese abstracte Betrachtung zu der Auffindung ihrer Curven gekommen, sondern Leibnitz war es, der die Idee De Beaune's verfolgte und sie sogar verallgemeinerte, indem er die einhüllende Curve für unendlich viele gerade Linien oder

---

16) *Quo planius appareat qualem ille subtilissimus vir (Archimedes) analysin usurparit et quam hodiernae nostrae parum dissimilem.*

für bestimmte und unter einander durch eine gewisse Eigenschaft verbundene Curven aufsuchte.[17])

§. 17. Tschirnhausen, ein Mann von Genie und der ganz besonders für die Wissenschaft, welche er cultivirte, eingenommen war, hat, abgesehen von der Erfindung seiner Brennlinien, auch noch anderweitiges Recht auf eine ausgezeichnete Stelle in der Geschichte der Geometrie. In einem Werke, betitelt *Medicina mentis*[18]), dessen Hauptzweck in der Angabe der Regeln, die uns bei der Aufsuchung der Wahrheit leiten müssen, bestand, gab Tschirnhausen eine neue und allgemeine Erzeugung der Curven. Er dachte sich dieselben durch einen Griffel beschrieben, der einen Faden spannt, welcher an seinen zwei Endpunkten befestigt ist und über mehre andre feste Punkte hingleitet oder sich über eine oder mehre Curven von bekannter Natur umwickelt. Es war dieses, wie man sieht, eine Verallgemeinerung der Art, wie man die Kegelschnitte vermittelst ihrer Brennpunkte beschreibt, eine Verallgemeinerung, welche schon Descartes auf die Beschreibung seiner Ovalen zu übertragen im Sinne gehabt hatte.[19]) Tschirnhausen theilte seine Curven in mehre Geschlechter nach der grössern oder geringern Anzahl ihrer Brennpunkte und nach der Natur der festen Curven. Er lehrte, Tangenten an die auf solche Weise beschriebenen Curven ziehen, worin man den Ursprung des Problems erkennt, Tangenten an eine Curve zu ziehen, welche durch eine Gleichung, deren Variabeln die Entfernungen irgend eines Punkts der Curve von mehren festen Punkten sind, ausgedrückt ist.

§. 18. Dieses Problem erlangte einige Berühmtheit und wurde von den ersten Mathematikern jener Epoche auf verschiedene originelle Arten aufgelöst; zuerst von Fatio de Duiller, welcher einen von Tschirnhausen begangenen Fehler rügte und dessen Lösung, da sie sich

17) *Acta Erud. Lips.* ann. 1692 u. 1694, und *Leibnitzii opera*, tom. III.

18) *Medicina mentis, sive tentamen genuinae logicae, in qua disseritur de methodo detegendi incognitas veritatis*, in 4., Amst. 1686. — Im dritten Bande der *Bibliothèque universelle et historique* (J. 1686) findet man eine sehr genaue Analyse dieses merkwürdigen Werkes von Tschirnhausen.

19) *Géométrie de Descartes*, Buch 2. Diese von Descartes erdachten Curven haben in der Dioptrik eine bedeutende Rolle gespielt. Wir werden von ihnen in unsrer vierten Epoche sprechen, wo wir sie im ersten Buche der Principien von Newton wieder hervorgerufen finden werden.

nur auf einfache Betrachtungen aus der Geometrie gründet, uns ein heute so sehr seltenes Beispiel von der Methode der Alten bei der Tangenten-Construction darbietet [20]; sodann gab der Marquis von Lhopital durch die Betrachtung des unendlich Kleinen eine elegante und sehr allgemeine Lösung [21]; und zu derselben Zeit Leibnitz, dessen Lösung, „welche den Vortheil hat, dass der Geist dabei Alles ohne Rechnung und Zeichnung macht", auf einem interessanten Satz der Mechanik beruht, den er bei dieser Gelegenheit ausdachte. [22] Einige Jahre darauf vervollständigte Herman gewisser Maasen diese Theorie, indem er eine sehr einfache Construction des Krümmungshalbmessers für die Curven des Tschirnhausen gab, den er direct und nach rein geometrischer Betrachtung berechnete, ohne sich der Hülfscoordinaten des Descartes zu bedienen. [23]

Poinsot dehnte diese Erzeugungsart der Curven und die Construction ihrer Normalen auf die Oberflächen aus und wandte dieses mit Nutzen in einem ausgezeichneten Memoire über Mechanik an. [24]

---

20) *Reflexions de M. Fatio de Duiller sur une méthode de trouver les tangentes de certaines lignes courbes*, in der *Bibliothéque universelle et historique*, tom. V, ann. 1688. Tschirnhausen hat auf die Betrachtungen des Fatio geantwortet und seinen Irrthum im 10ten Bande derselben Sammlung von demselben Jahr anerkannt.

21) *Analyse des infinemens petits*, sect. 2, propos. 10.

22) Leibnitz spricht die Aufgabe so aus: Man soll die Tangente für eine durch gespannte Fäden beschriebene Curve ziehen. Seine Construction gründet sich auf eine allgemeine Regel über die Zusammensetzung der Bewegungen, welche man in folgender Weise aussprechen kann, wenn man statt der Idee der Bewegung die der Kraft setzt, wie es Lagrange that, als er in seiner analytischen Mechanik das Gesetz des Gleichgewichts, welches aus dem Princip des Leibnitz folgt, reproducirte: „Wenn beliebig viele Kräfte, welche auf *einen* Punkt wirken, ihrer Grösse und Richtung nach durch gerade Linien dargestellt werden, so geht ihre Resultante durch den Schwerpunkt der Endpunkte dieser Geraden und wird der Grösse nach gleich der Entfernung dieses Punkts von dem sollicitirten Punkt multiplicirt mit der Anzahl der Kräfte." (*Journal des Savans*, Sept. 1693, und *Leibnitzii Opera*, tom. III.) — Dieses Theorem kann auch auf den Fall, wenn die Kräfte an verschiedenen Punkten eines im Raume freien Körpers angebracht sind, ausgedehnt werden. (*Correspondance mathématique de Bruxelles*, tom. V, p. 106.)

23) *Methodus inveniendi radios osculi in curvis ex focis descriptis. Act. Erud.*, ann. 1702, p. 106.)

24) *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes*; 13tes Heft des *Journ. de l'école polyt.* Dieses Memoire wurde in der 6ten Ausgabe der Statik von Poinsot wieder aufgenommen.

§. 19. Wir kehren zu Tschirnhausen zurück. Im Jahr 1701 kündigte dieser Geometer der Akademie der Wissenschaften eine neue allgemeine Methode an, welche geeignet wäre, die Infinitesimalrechnung bei mehren Fragen der höhern Geometrie, wie die Construction der Tangenten und der Krümmungshalbmesser, zu ergänzen.[25]) Aber seine Lösung, welche auf der Analysis des Descartes beruhte, war nur eine Nachahmung der beiden Methoden, welche dieser grosse Geometer in Bezug auf das Problem der Tangenten gegeben hatte und welche darin bestanden, anzunehmen, dass zwei Punkte einer Curve, welche zuerst um eine endliche Quantität von einander entfernt sind, dahin kommen, zusammen zu fallen.

Folgender Titel: *Versuch einer Methode, die Berührenden der mechanischen Curven zu finden, ohne irgend eine Grösse unendlich klein anzunehmen*, unter welchem Tschirnhausen eine seiner Entdeckungen bekannt machte, erregte damals grosses Aufsehn; und es musste in der That dieses Werk die Neugierde der Geometer lebhaft reizen und seinem sonst schon berühmten Verfasser einen unsterblichen Ruhm sichern, wenn er sein Versprechen vollständig erfüllte. Aber diese Methode, weit davon entfernt, für jede mechanische Curve zu passen, liess sich nur auf die Gattung von Curven anwenden, welche Bögen einer geometrischen Curve, an welche man die Tangenten zu ziehen wusste, zu Abscissen und Parallele mit einer festen Geraden zu Ordinaten hatte; ausserdem war der von Tschirnhausen angewandte Calcul derselbe, als der für den gewöhnlichen Fall, wenn die Abscissen auf einer Geraden statt auf einem Curvenbogen gezählt werden. Inzwischen hatte diese Methode immer das Verdienst, eine Erweiterung der des Descartes zu sein, welcher, wie man weiss, um die Allgemeinheit und die Zulänglichkeit seiner Geometrie aufrecht zu erhalten, die *mechanischen* Curven ausgeschlossen hatte, indem er mit diesem Worte diejenigen bezeichnete, welche sich nicht nach einem genauen und bekannten Maass bestimmen liessen. Schon im Jahr 1682 hatte Tschirnhausen seine Tangentenmethode für geometrische Curven in den Leipziger *Actis Erudit.* unter dem Titel *Nova methodus tangentes curvarum expedite determinandi* aus einander gesetzt, und versprochen, dass er sie später auf mechanische Curven anwenden würde.

---

25) *Histoire et Mémoires de l'Académie des Sciences*, ann. 1701.
26) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, ann. 1702.

§. 20. Das Ziel, welchem Tschirnhausen in allen seinen geometrischen Speculationen nachstrebte, war, die Geometrie leichter darzustellen, indem er davon überzeugt war, dass die wahren Methoden auch leicht seien, dass selbst die geistreichsten nicht die richtigsten seien, sobald sie zu sehr complicirt sind, und dass die Natur für jede Sache Etwas Einfachstes darbiete.

Betrachtungen über die Methoden in der Geometrie.

Wir führen diese Meinung von Tschirnhausen hier absichtlich an, weil wir bestimmt glauben, dass alle geometrischen Wahrheiten dieselbe Eigenschaft haben und dass sie alle gleich empfänglich für leichte und anschauliche Beweise sind. Denn in der That, wie viele Beispiele hat man nicht, dass gerade die, welche anfänglich die grössten Schwierigkeiten darboten und sich allen Mitteln der bekannten Methoden widersetzten, später die einfachsten und klarsten geworden sind? Dieses liegt nur darin, dass sie von Theorien abhingen, welche noch nicht vorhanden oder nicht genugsam ausgebildet waren, oder welche noch nicht auf ihren richtigen Grundlagen ruhten. Hierin scheint uns, beiläufig gesagt, der Hauptvorzug der modernen Analysis vor der Geometrie zu liegen. Erstere hat das wunderbare Vorrecht, die Zwischensätze ganz vernachlässigen zu dürfen, welche die Geometrie beständig nöthig hat und welche sie neu erschaffen muss, wenn die Untersuchung eine neue ist. Aber dieser Vorzug der Analysis, so schön und kostbar er auch ist, hat doch seine schwache Seite, wie alle menschlichen Erfindungen; denn dieser penetrante und schnelle Schritt erklärt nicht immer hinreichend den Sinn desselben, man bleibt dabei im Unklaren über die vermittelnden Wahrheiten, welche die gefundene Wahrheit mit dem Ausgangspunkt verknüpfen und welche erst mit einander vereinigt werden müssen, um ein vollständiges Ganzes und eine wirkliche Theorie zu bilden. Ist es denn bei dem philosophischen und gründlichen Studium einer Wissenschaft hinreichend, zu wissen, dass eine Sache wahr sei, wenn man nicht weiss, weshalb sie es ist und welchen Platz sie in der Reihe der Wahrheiten, zu denen sie gehört, einnehmen muss?

Wenn man der bis ins Unbestimmte fortschreitenden Vervollkommnung der Geometrie, wie es Tschirnhausen vorgesetzt hatte, nachstreben will, so scheint es mir bei dem gegenwärtigen Standpunkt dieser Wissenschaft nothwendig, dass man bei allen darauf bezüglichen Speculationen beständig folgende beide Regeln beobachte:

1) Man verallgemeinere immer mehr und mehr die besondern Sätze, um allmählig zu einem allgemeinsten zu kommen, welcher zu gleicher Zeit immer der einfachste, natürlichste und leichteste sein wird.

2) Man begnüge sich bei dem Beweis eines Satzes oder bei der Lösung einer Aufgabe nicht gleich mit dem ersten Resultat, welches hinreichend ist, wenn es sich um eine specielle Untersuchung unabhängig von einem allgemeinen System einer Parthie der Wissenschaft handelt; sondern man sei nicht früher mit einem Beweis oder einer Lösung zufrieden, als bis ihre Einfachheit oder ihre offenbare Herleitung aus irgend einer bekannten Theorie zeigt, dass man die Untersuchung auf die wichtige Doctrin, von welcher sie auf natürliche Weise abhängig ist, zurückgeführt hat.

Um ein Erkennungsmittel anzugeben, ob die Anwendung dieser beiden Regeln zu dem erwünschten Ziel geführt habe, d. h. ob man den richtigen Weg zur Erlangung der Wahrheit getroffen habe und bis zu ihrem Ursprung durchgedrungen sei, glauben wir sagen zu können, dass es immer eine Hauptwahrheit geben und als solche anerkannt sein muss, aus der sich die übrigen als einfache Transformationen oder als natürliche Folgerungen leicht ableiten lassen, und dass diese einzige Bedingung, wenn sie erfüllt ist, das Merkmal der wahrhaften Vollkommenheit der Wissenschaft sein wird. Wir wollen noch mit einem der neuern Geometer, die ganz vorzüglich über die Philosophie der Mathematik Betrachtungen angestellt haben, hinzufügen, „dass man sich nicht schmeicheln darf, mit einer Theorie vollständig fertig zu sein, so lange man nicht im Stande ist, dieselbe Einem auf der Strasse in wenigen Worten zu expliciren." [27]) In der That haben die grossen Grundwahrheiten, aus denen sich alle andern ableiten und welche die wahren Grundpfeiler der Wissenschaft bilden, stets das characteristische Attribut der Einfachheit und Anschaulichkeit. [28])

---

27) Eine Meinung von Gergonne, der davon die Anwendung auf die neue Theorie der Brennlinien machte. *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, tom. IV, p. 88.

28) Diese für die positiven Wissenschaften angenommene Meinung ist ein Resultat der Erfahrung, auf welches die Ausbildung jeder derselben führt. Aber man kann sie auch *a priori* rechtfertigen. Denn die allgemeinsten Principien, d. h. die, welche sich auf den grössten Theil der besondern Fälle erstrecken, müssen frei sein von den besondern Umständen, welche jedem dieser besondern Fälle,

§. 21. In der bisherigen gedrängten Uebersicht der wunderbaren Fortschritte, welche die Geometrie in einem Zeitraum von 30 Jahren gemacht hat, bemerkt man, dass es vorzüglich zwei grosse Ideen waren, aus denen diese Fortschritte hervorgingen, nämlich das Untheilbare des Cavalleri und die auf krumme Linien angewandte Analysis des Descartes. Erstere schloss sich an die gewöhnten Formen und Verfahrungsarten der alten Geometrie an und man betrachtete die Entdeckungen, zu welchen diese Methode des Cavalleri führte, als zur alten Geometrie gehörig. Die zweite, ein wirklich analytisches Hülfsmittel, machte aus der Geometrie eine ganz neue Wissenschaft, welche bei einem Archimedes und Apollonius Staunen und Bewunderung erregen würde, da man in ihren Schriften auch nicht den geringsten Keim dazu findet; man nannte sie *gemischte Geometrie* oder *analytische Geometrie* oder *Geometrie des Descartes.*

Eintheilung der Geometrie in drei Theile.

Während sich aber auf diese Weise eine Art von Eintheilung in den Methoden der Geometrie bildete, entstand noch eine dritte Verfahrungsart, so zu sagen eine dritte Art der Geometrie. Es ist die, welche, wie wir angeführt haben, von Pascal und Desargues angewandt wurde und wovon sich die ersten Anfänge in den Porismen Euclid's finden und die uns in den mathematischen Sammlungen des Pappus aufbewahrt sind.

Auf diese Weise sehen wir, dass die Geometrie in drei Theile zerfällt. Der erste umfasst die Geometrie der Alten, unterstützt durch die Lehren von dem Untheilbaren und der zusammengesetzten Bewegung. Der zweite ist die Analysis des Descartes, eine Erweiterung der Vorschriften, welche Fermat in seiner Methode *de maximis et minimis* zur Berechnung des Unendlichen gegeben hatte. Der dritte ist die reine Geometrie, welche sich wesentlich durch ihre Abstraction und ihre Allgemeinheit auszeichnet, wovon Pascal und Desargues in ihren Werken über die Kegelschnitte die ersten Beispiele gegeben haben

für sich betrachtet, einen unterscheidenden und verschiedenartigen Character zu geben scheinen, bevor man ihr gemeinsames Band und ihren gemeinsamen Ursprung erkannt hat. Denn wenn sie aus allen diesen besondern Umständen und Eigenschaften zusammengesetzt wären, so würden sie alles das aus den Folgesätzen Entlehnte enthalten und im Allgemeinen nur äusserst beschränkte und dabei complicirte Wahrheiten ausdrücken. Die allgemeinsten Principien sind also nothwendig ihrer Natur nach die einfachsten.

und worauf Monge und Carnot im Anfange dieses Jahrhunderts weitläufige und fruchtbare Principien gegründet haben.

Diese dritte Branche der Geometrie, welche heute das, was man die *neue Geometrie* nennt, ausmacht, ist frei von jeder algebraischen Rechnung, obgleich sie einen ebenso glücklichen Gebrauch von den metrischen Verhältnissen der Figuren als von ihren Relationen in Bezug auf die Lage macht; aber sie betrachtet nur Verhältnisse der geradlinigen Entfernungen einer gewissen Art, welche weder die Symbole noch die Operationen der Algebra erfordern. Sie ist eine Fortsetzung der geometrischen Analyse der Alten, von der sie sich weder durch den Zweck noch durch die Natur ihrer Speculationen unterscheidet, vor der sie aber unendliche Vorzüge errungen hat, theils durch die Allgemeinheit, Gleichförmigkeit und Abstraction ihrer Auffassung und ihrer Methoden, wodurch die einzelnen, unvollständigen und ohne Verbindung an einander gereihten Sätze, welche die ganze Wissenschaft der Alten bildeten, verdrängt sind, theils aber und vorzüglich durch die so nützliche Anwendung der Betrachtung über Figuren dreier Dimensionen bei den einfachen Untersuchungen der ebenen Geometrie. Hier in diese Geometrie gehören jene Theorien mit ihren Anwendungen, denen man in neuerer Zeit die Namen der Geometrie des Lineals und Geometrie der Lage (*Géométrie de règle et Géométrie de situation*) gegeben hat, je nachdem man nur von den Durchschnitten gerader Linien oder von den Durchschnitten der Curven und Oberflächen im Raume Gebrauch macht, um die beschreibenden Eigenschaften der Curven zu entdecken.

Von den drei hier unterschiedenen Arten der Geometrie ist die zweite, die Analysis des Descartes, so anziehend und bietet so viele Vortheile dar, dass sie von den grössten in dieser dritten Epoche erwähnten Geometern mit besondrer Vorliebe cultivirt wurde. Und es ist wahr, dass diese Geometrie des Descartes ein allgemeines Hülfsmittel war, welches sich allen geometrischen Vorstellungen, den alten wie den neuen, anpassen liess.

De La Hire, 1640 — 1718.

§. 22. Einige Mathematiker blieben aber dennoch der Methode der Alten treu, unter denen besonders De La Hire hervorzuheben ist. Obgleich dieser Geometer mit der Analysis des Descartes vertraut war, so bereicherte er dessen ungeachtet die reine Geometrie mit mehren Werken, die im Style der Alten geschrieben waren und dabei viel Glück machten. Er bildete die Lehren des Desargues und Pascal in wür-

diger Weise weiter aus und führte hauptsächlich durch eine Art, die Kegelschnitte in der Ebene zu erzeugen, in die Geometrie mehre Neuerungen ein, welche mit den neueren Methoden in Verbindung standen. Wir müssen also in doppelter Hinsicht diesen berühmten Mathematiker hier anführen.

Seine hauptsächlichsten nach Art der alten Geometrie geschriebenen Werke sind: das grosse Werk über Kegelschnitte unter dem Titel *Sectiones conicae in novem libros distributae* (fol., Paris 1685); sein *Memoire sur les épicycloïdes*, worin ihre Ausmessungen, ihre Evoluten und ihre Anwendung in der Mechanik auf die Construction der gezähnten Räder enthalten ist [29]); ein zweites Memoire über denselben Gegenstand, der nur verallgemeinert und auf alle Arten von Curven angewandt ist, unter dem Titel *Traité des roulettes où l'on démontre la manière universelle, de trouver leurs touchantes, leurs points d'inflexion et de rebroussement, leurs superficies et leurs longeurs, par la Géométrie ordinaire* [30]); und ein Memoire über die *Conchoiden* im Allgemeinen, welches die Bestimmung ihrer Tangenten, ihrer Ausmessung, ihrer Länge und ihrer Beugungspunkte enthält (in den Memoiren der Academie der Wissenschaftnn vom Jahr 1708). Hierzu müssen wir noch den *Traité de Gnomonique* fügen, welcher 1682 erschien und welches ein wahrhaft neues Werk war, in welchem De La Hire alle Aufgaben graphisch auflöste, selbst ohne Hülfe der ebenen Trigonometrie nur mit Hülfe des Zirkels, Lineals und Lothes.

§. 23. Das Werk über die Kegelschnitte hat ein sehr bedeutendes Ansehn bei dem ganzen gelehrten Europa erlangt und lässt De La Hire als einen Originalschriftsteller über diesen Gegenstand betrachten. Denn obgleich seine Methode rein synthetisch wie die der Alten ist, so unterscheidet sie sich doch wesentlich von dieser. Die Alten

---

29) Dieses Memoire erschien 1694 unter andern mathematischen und physikalischen Memoiren von De La Hire und wurde im 9ten Bande der alten Memoiren der Acad. der Wiss. wieder abgedruckt. De La Hire sagt darin, dass er schon vor 20 Jahren die Epicycloiden und ihren Gebrauch in der Mechanik entdeckt habe. Später hat Leibnitz die Ehre dieser doppelten Erfindung für den berühmten Astronomen Roemer in Anspruch genommen, welcher es 1674 während seines Aufenthalts in Paris ausgedacht haben soll. Aber uns scheint es nach De La Hire selbst, dass wenigstens der mechanische Theil dieser Erfindung bis auf Desargues zurückgeht.

30) Gedruckt im Jahr 1704 in den Mem. d. Acad. d. Wiss.

hatten die Kegelschnitte am Kegel selbst betrachtet, aber nur um deren Entstehung aufzufassen und einige Haupteigenschaften derselben nachznweisen (worunter die vorzüglich bemerkenswerthe das constante Verhältniss des Quadrats der Ordinate zum Product aus den Segmenten der Axe war) [31]) und sodann diese ersten Eigenschaften zur Aufsuchung und zum Beweis aller übrigen anzuwenden, so dass sie ihre Theorie der Kegelschnitte bildeten, ohne die Natur oder irgend eine Eigenschaft des Kegels zu kennen, und unabhängig von dem Kreise, welcher ihm zur Basis dient; selbst Apollonius beweist oft die Eigenschaften des Kreises auf dieselbe Art und zu gleicher Zeit als die der Ellipse. De La Hire wählte einen mehr rationellen und mehr methodischen und folglich kürzeren und lichtvolleren Weg. Er fängt damit an, die Eigenschaften des Kreises, welche sich beim Kegel herausstellen müssen, aufzuführen, vorzüglich die, welche sich auf die harmonische Theilung beziehen, darauf erst macht er die Anwendung davon auf die Entdeckung und den Beweis der analogen Eigenschaften in den verschiedenen Schnitten des Kegels. Ausserdem war diese Methode damals noch deshalb merkwürdig, dass sie keinen Gebrauch vom Axendreieck machte und sich ohne Unterschied auf alle Schnitte des Kegels anwenden liess. Diese Verfahrungsart war,

---

31) Wenn man nach dem Grunde fragt, weshalb diese Eigenschaft der Kegelschnitte so fruchtbar ist, so muss man, um in der Weise der analytischen Geometrie zu sprechen, sagen, dass sie nichts Anderes ist, als die *Gleichung* der Curve, weshalb man sich auch nicht wundern darf, dass sich diese Eigenschaft allen den Transformationen unterwirft, welchen diese Gleichung unterworfen ist. Aber in der reinen Geometrie muss man zu einem directeren, aus der Natur der Sache selbst gewonnenen Verhältniss zurückgehen, welches nicht aus einem künstlich zur Hülfe genommenen Coordinaten-System entlehnt ist, woraus man alsdann erkennt, dass dieses Verhältniss dasselbe ist, was die in Rede stehende Relation ausdrückt, nämlich eine Eigenschaft von 6 Punkten, welche auf einem Kegelschnitt liegen. Diese 6 Punkte besitzen die vollkommene Allgemeinheit in Bezug auf ihre mögliche Lage, nur liegen von 4 Punkten je 2 auf zweien Parallelen. Aber ungeachtet dieser beschränkenden Bedingung reicht die genannte Relation hin, um durch willkührlich gegebene Punkte, deren fünfe bekannt sind, einen Kegelschnitt zu construiren. Jedoch muss man oft einen weniger directen Weg verfolgen, welcher einige Umwege mehr erfordert, als wenn man eine allgemeine Relation zwischen 6 Punkten eines Kegelschnitts kennt. Diese Bemerkung erklärt es, weshalb die schönen Theoreme von Desargues und Pascal, welche diese ganz allgemeine Relation zwischen den 6 Punkten eines Kegelschnitts ausdrücken, in diese Theorie eine den Alten unbekannte Leichtigkeit hineingebracht haben.

wie man sieht, ganz in dem Sinne der von Desargues und Pascal, welche vermittelst der Perspective die Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte übertrugen. Auch hat De La Hire aus dem *Brouillon projet des Coniques* von Desargues den glücklichen Gebrauch, welchen dieser Schriftsteller darin von der harmonischen Proportion und von einigen Relationen der Involution macht, entlehnen können. Aus dieser doppelten Rücksicht haben wir gesagt, dass dieser Geometer die Lehren des Desargues und Pascal weiter ausgebildet habe.

§. 24. Wir müssen noch erwähnen, dass diese neue Methode, die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises und aus der Betrachtung des Körpers, auf welchem diese Curven entstehen, abzuleiten, schon von zwei Geometern des vorhergehenden Jahrhunderts angewandt worden war, zuerst von Verner aus Nürnberg, welcher auf diese Weise mehre elementare Eigenschaften der Kegelschnitte bewiesen hat [32]), und sodann in grösserer Ausdehnung und in wissenschaftlicherer Form von Maurolicus von Messina, welcher zuerst mehre Schriften der Alten übersetzt hatte und dann unter vielen andern eigenen Werken ein Werk über die Kegelschnitte herausgab, worin er diesen neuen Weg verfolgte, indem er dem, welchen die Alten verfolgten, die Weitschweifigkeit in den Beweisen vorwarf. [33])

Auch ist es noch billig, bei vorliegendem Gegenstande den Zeitgenossen De La Hire's, Guarini, anzuführen, welcher 1671 ein Werk über die Kegelschnitte herausgab, worin er zum Beweise der Eigenschaften derselben vielfältig Gebrauch von der Betrachtung des Kegels macht. Man findet darin einen sehr einfachen, auf alle drei Kegelschnitte zugleich anwendbaren Beweis für die Eigenschaft, dass die Producte aus den Segmenten paralleler Sehnen ein constantes Verhältniss haben, wozu man sonst immer mehre Präliminar-Sätze kennen musste. Diese Methode war ein Fortschritt in der Theorie der Kegel-

---

32) *J. Verneri Libellus super viginti duobus elementis conicis*, etc.; in 4., 1522.

33) *Quoniam Apollonius omnia fere conicorum demonstrata conatus est in planum redigere, antiquioribus insignior, neglecta conorum descriptione, et aliunde quaerens argumenta, cogitur persaepe obscurius et indirecte demonstrare id, quod contemplando solidae figurae sectionem, apertius et brevius demonstratur.* (*D. Francisci Maurolici Opuscula mathematica*, in 4., Venetiis, 1575, p. 280.)

schnitte, aber Guarini, der übrigens in allen Theilen der Geometrie ausserordentlich bewandert war, verfolgte diesen nicht so systematisch und nicht mit dem Talente des De La Hire. (Ueber Maurolicus und Guarini siehe die XVIIte Note.)

§. 25. Wir wollen noch beiläufig sagen, dass wir ausser der Methode der Alten und der von De La Hire angenommenen noch eine dritte kennen, welche noch nicht angewandt worden ist und welche, wenn wir nicht irren, dazu geeignet ist, die Beweise ausserordentlich zu vereinfachen und die Principien und den wahren Ursprung der verschiedenen Eigenschaften der Kegelschnitte in ihr richtiges Licht zu stellen; denn in dieser Hinsicht darf man sich nicht verhehlen, dass die Methode der Alten sehr im Dunkeln bleibt. Diese Methode besteht darin, die Eigenschaften des Kegels selbst zu erforschen, unabhängig von denen der Kegelschnitte, welche sich aus jenen mit der grössten Leichtigkeit und in ihrer vollkommnen Allgemeinheit ableiten lassen. Ueberall, wo die Alten drei verschiedene Beweise für dieselbe Eigenschaft an den drei Kegelschnitten, der Ellipse, Hyperbel und Parabel, brauchen, weil sie sich auf den besondern Character jeder einzelnen dieser Curven stützen, reicht ein einziger Beweis für die analoge Eigenschaft am Kegel selbst hin, woraus sich dann als aus ihrem wahren und gemeinsamen Ursprung die der drei Kegelschnitte ableiten lassen. Auf diese Weise hat man im Kegel mehre Eigenschaften entstehen sehn, wie die der Brennpunkte, welche schon Apollonius geahnt zu haben scheint, welche aber dieser Geometer eben so wenig als seine Nachfolger weder an die Eigenschaften des Kreises noch an die des Kegels angeknüpft haben, so dass der erste Ursprung dieser ausgezeichneten Punkte, der in der Natur des Kegels, auf welchem die Curve gebildet wird, begründet ist, gänzlich unbekannt blieb.

Ein andrer Vortheil der erwähnten Methode liegt darin, dass sie zu gleicher Zeit mit der Theorie der Kegelschnitte auch die der Kegel mit kreisförmiger Basis bildet, von welchen nur wenige Eigenschaften bis auf die neueste Zeit bekannt waren. Dieses bietet durchaus keine Schwierigkeit dar und wir glauben als Beweis dafür den Versuch anführen zu können, welchen wir von dieser Methode in einem Memoire gemacht haben, in welchem wir nur die meistens evidenten Eigenschaften des Kreises als gültig zuliessen und doch dadurch zu einer grossen Zahl von neuen Eigenschaften der Kegel zweiten Grades

gelangten, die einem grossen Theil nach analog sind denen der Brennpunkte bei den Kegelschnitten und auf diese führen, woraus sich ergiebt, dass die Existenz dieser Punkte und ihre Eigenschaften sich an die des Kegels anschliessen.[34] — Man könnte beim Lesen der ersten Worte in dem Werke über Kegelschnitte von Wallis auf die Vermuthung kommen, dass die angeführte Methode dieselbe sei, als die, welche dieser grosse Geometer befolgte. Denn er sagt: dass, weil er die Theorie der Kegelschnitte als schwer erkannt, er sich vorgesetzt habe, dieselbe zu vereinfachen und deshalb die Natur des Kegels genauer, als die Alten es gethan, untersuchen wolle, um hieraus, als aus ihrer wahren Quelle, die Eigenschaften dieser Curven abzuleiten. Aber Wallis fügt hinzu, dass er sich auf die hauptsächlichsten dieser Eigenschaften beschränken werde, auf die, welche zur Entdeckung aller übrigen führen können. Und in der That, nachdem er die, welche dazu dient, die Kegelschnitte durch eine Gleichung zwischen zwei Coordinaten nach der Weise des Descartes auszudrücken, bewiesen hat, verfolgt er einen andern Weg und giebt eine analytische Behandlung dieser Curven.

§. 26. Wir wollen zu dem Werk des De La Hire zurückkehren, welches in 9 Bücher getheilt ist. Das erste, welches die Grundlage für alle übrige ist, behandelt nach einander: die Eigenschaften der harmonischen Theilung einer geraden Linie, die eines harmonischen Bündels und endlich die Linien, welche beim Kreise harmonisch getheilt werden. Auch finden sich einige besondere Fälle für die Beziehung der Involution von 6 Punkten, obgleich diese Beziehung nicht in ihrer ganzen Allgemeinheit ausgesprochen ist. Dieses Buch ist eine Enleitung, woraus sich später leichte und allgemeine Beweise für Theoreme ergeben, welche den Alten lange und mühsame Entwickelungen kosteten. Hierin ist das enthalten, was die Neuheit und das Verdienst der Methode De La Hire's ausmacht.

Mit Ausnahme des Problems *ad tres et quatuor lineas* und der schönen allgemeinen Theoreme, welche die Grundlage der Werke von Desargues und Pascal bilden, finden sich alle bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte zum ersten Mal in dem Werke von De La Hire vereinigt und auf gleichmässige und elegante Weise synthetisch bewie-

---

34) *Mémoire de Géométrie pure sur les propriétés générales de cônes du second degré*, in 4., 1830.

sen. Unter diesen führen wir zuerst die Theorie der Pole an, welche in folgenden drei Sätzen besteht:

1) Wenn man um einen festen Punkt eine Transversale sich drehen lässt, welche einen Kegelschnitt in zwei Punkten trifft, so kreuzen sich alle Tangenten, welche man an diese Punkte zieht auf einer geraden Linie. (Satz 27 u. 28 im 1sten B. und 24 u. 27 im 2ten B.) Ebenso umgekehrt: Wenn man von jedem Punkt einer Geraden zwei Tangenten an einen Kegelschnitt zieht, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch einen festen Punkt. (Satz 26 und 28 des 1sten Buchs und 23 und 26 des 2ten Buchs.)

Dieser Punkt ist in neuerer Zeit der *Pol* der Geraden und diese Gerade die *Poläre* des Punkts genannt worden.

2) Wenn man durch einen festen Punkt mehre Transversalen zieht, welche einen Kegelschnitt treffen, so werden sich die Geraden, welche je zwei Durchschnittspunkte irgend zweier Transversalen und der Curve verbindet, auf der Poläre des festen Punkts begegnen. (Satz 22 und 23 des 1sten Buchs und 30 des 2ten.)

3) Der Punkt, in welchem jede Transversale die Poläre eines festen Punkts trifft, ist für letztern der zugeordnete harmonische Punkt in Bezug auf jene beiden Punkte, in welchen die Curve von der Transversale geschnitten wird. (Satz 21 des 1sten Buchs und 23 und 26 im 2ten.)

Dieser letzte Satz war schon dem Apollonius bekannt. Im Werke De La Hire's bildet er den Fundamentalsatz, aus dem fast alle übrigen sich ableiten. Man sieht z. B. im dritten Satz des dritten Buchs, wie er auf ganz natürliche Weise zu der Eigenschaft des Quadrats der Ordinate verglichen mit dem Rechteck auf der Axe führt. Er spielt in diesem Werke dieselbe Rolle, als der Satz vom *latus rectum* im Apollonius, oder das Theorem der Involution von 6 Punkten im *Brouillon projet de Coniques* von Desargues, oder das mystische Sechseck im Werke von Pascal.

Man sieht leicht, dass von den angeführten drei Sätzen die beiden ersten in dem Theorem über das Viereck, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, enthalten sind, welches Theorem, wie wir angeführt haben, wahrscheinlich Pascal aus seinem Sechseck abgeleitet hat, und dass der dritte Satz ebenfalls eine Folge desselben Theorems ist vermittelst des 131sten Satzes im 7ten Buch der mathematischen Sammlungen von Pappus. Da aber das Werk

von Pascal niemals erschienen ist, so hat De La Hire das Verdienst, diese ausgezeichneten Sätze erfunden zu haben. Späterhin sind sie reproducirt von Maclaurin in seinem Werk über die Fluxionen und in seinem Werk über die geometrischen Curven, von R. Simson in seinen Kegelschnitten, von Carnot in seiner Theorie der Transversalen und von vielen andern Geometern.

Der erste Satz mit seinem reciproken finden sich in der beschreibenden Geometrie von Monge auf anschauliche Weise sehr elegant bewiesen und noch ausgedehnt auf die Oberflächen zweiter Ordnung. Aus dieser Epoche her datirt sich der Einfluss und die Anwendung der Theorie der Pole, welche früher in den tiefsinnigen Werken, die wir genannt haben, verborgen ruhte und den jungen Geometern, welche die Kegelschnitte nur aus analytischen Werken kennen lernten, unbekannt blieb.

Von den übrigen merkwürdigen Eigenschaften der Kegelschnitte, welche von De La Hire abzuleiten sind, wollen wir noch diese anführen, dass der geometrische Ort des Scheitels eines rechten Winkels, welcher einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, für die Ellipse und Hyperbel ein Kreis und für die Parabel eine gerade Linie ist (8tes Buch, Satz 26, 27, 28).[35] Auch diesen Satz verallgemeinerte Monge, indem er zeigte, dass der Durchschnittspunkt von drei unter einander rechtwinkligen Ebenen, welche eine Oberfläche des zweiten Grades berühren, immer auf einer Kugel liegt, welche in die Ebene übergeht, wenn die Oberfläche ein Paraboloid ist.

De La Hire bereicherte auch beträchtlich die Theorie der Brennpunkte und gab vermittelst der geraden Linie

---

35) De La Hire gab auch (in den *Mémoires de l'Académie des Sciences* vom Jahr 1704) den Ort der gleichen Winkel (spitz oder stumpf), die einem Kegelschnitt umgeschrieben werden, welches eine Curve vom vierten Grade wird, die sich auf den zweiten reducirt, und eine Hyperbel wird, wenn der vorgelegte Kegelschnitt eine Parabel ist. In demselben Memoire hat De La Hire dieselbe Untersuchung in Bezug auf die Cycloide angestellt und ist dabei zu dem merkwürdigen Resultate gekommen, dass alle gleichen Winkel, mögen sie rechte, spitze oder stumpfe sein, wenn sie dieser Curve umbeschrieben werden, ihre Scheitel auf einer zweiten verkürzten oder verlängerten Cycloide haben.

Wir haben gefunden, dass die Epicycloiden des Kreises sich derselben Eigenschaft erfreuen, d. h. wenn man um eine Epicycloide, welche durch einen Punkt in der Peripherie eines Kreises, der sich um einen andern festen Kreis herumbewegt, beschrieben ist, Winkel, die unter einander gleich sind, beschreibt, so werden ihre Scheitel auf einer verlängerten oder verkürzten Epicycloide liegen.

und des Kreises eine elegante und leichte Construction für einen Kegelschnitt, der durch drei gegebene Punkte geht und dessen Brennpunkt ebenfalls gegeben ist. Ein in der Astronomie nützliches Problem, für welches der berühmte Astronom und Geometer Halley, der es zuerst auflöste, eine Hyperbel anwandte. [36])

§. 27. Bis auf Descartes kannte man nur *eine* Art, sich die Entstehung der Kegelschnitte zu denken, und dieses war die auf dem Körper d. h. auf einem Kegel mit kreisförmiger Basis. Aber die Geometrie dieses berühmten Neuerers brachte wie in den übrigen Theilen der Geometrie, so auch in der Theorie dieser Curven eine vollständige Revolution hervor, man lernte daraus, sie in der Ebene entstehen zu lassen, ohne die Betrachtung des Kegels nöthig zu haben. Descartes begnügte sich zu bemerken, dass bei seinem Coordinatensystem alle Kegelschnitte durch die allgemeine Gleichung des zweiten Grades dargestellt würden. Diese analytische Ausdrucksweise, welche zur Aufsuchung und Entwickelung ihrer zahlreichen Eigenschaften besonders geeignet war, wurde zuerst von Wallis angenommen, der eine analytische Behandlung der Kegelschnitte herausgab, und sodann von den meisten Geometern, die über diese Curven schrieben. Indess blieb man doch noch ein Jahrhundert hindurch bei der Betrachtung der Kegelschnitte auf dem Kegel, so dass die Werke, welche in diesem Zeitraum erschienen sind, beide Methoden, die der Alten und die des Descartes, mit einander vereinigen.

Die Art des Desargues und Pascal, die Kegelschnitte zu betrachten, grenzt zwar mehr an die der Alten, indem sie diese Curven durch die Perspective des Kegels bilden; aber ihre Methode zieht einen ihrer hauptsächlichsten Vortheile aus der Anwendung der Theorie der Transversalen, welche die Alten nur bei Systemen von geraden Linien gebrauchten und durchaus nie in der Theorie des Kreises oder der Kegelschnitte. Gregoire von St. Vincent hat, wie wir gesagt haben, mannigfache Arten erdacht, die Kegelschnitte, den einen durch den andern zu bilden; Schooten gab verschiedene organische Beschreibungen derselben; De Witt ging einen Schritt weiter, indem er diese Curven auf verschiedene sehr allgemeine Weisen bildete, deren er

---

36) *Methodus directa et geometrica cujus ope investigantur Aphelia etc. Planetarum.* Philosophisical-Trsnsactions, Jahr 1676, Nr. 128.

sich sodann mit Gewandtheit bediente, um ihre Haupteigenschaften zu beweisen. Aber alle diese Beschreibungsarten waren nicht dieselben für alle drei Curven.

De La Hire nun, der die allgemeine aber analytische Methode des Descartes und die Versuche des De Witt vor Augen hatte, suchte auch eine allgemeine Beschreibungsart der Kegelschnitte in der Ebene, welche zum Beweise derselben Eigenschaften dienen konnte, wie sie am Körper stattfinden.

§ 28. Er führte seinen Vorsatz auf doppelte Art in zwei Werken aus, welche seinem grossem *Traité* von 1685 vorausgingen und seinen Ruf als Geometer begründeten, in den Jahren 1673 und 1679.

In dem Werk von 1679 definirt De La Hire die Kegelschnitte als Curven von der Beschaffenheit, dass die Summe oder die Differenz der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten constant ist, oder auch, dass jeder Punkt gleich weit von einem festen Punkt und von einer festen Geraden entfernt ist. Von diesem einzigen Ausgangspunkt schliesst er auf eine grosse Anzahl von Eigenschaften dieser Curven. Dieser Art, die Theorie der Kegelschnitte darzustellen, schlossen sich mehre Geometer an und machten sie zur Grundlage ihrer Werke, wohin der Marquis von Lhopital, R. Simson, Guisnee, Mauduit u. A. zu rechnen sind.

De La Hire vereinigte mit diesem Werke noch zwei andre hiervon verschiedene Theile: über die geometrischen Oerter, nach der Methode des Descartes behandelt, und über deren Gebrauch bei der Construction der Gleichungen. Diesen letztern Theil schliesst er damit, dass er nur mit Hülfe der geraden Linie und des Kreises eines der berühmtesten Probleme über Kegelschnitte löst, nämlich durch einen Punkt ausserhalb der Curve eine Normale für diese zu ziehen. Anderson [38]), Sluze und Huygens hatten es für die Parabel allein gelöst, was keine besondere Schwierigkeit darbot, weil die Aufgabe für diesen Fall nur drei Lösungen zulässt und dieses durch einen einzigen Kreis geleistet werden konnte. Aber der Fall der Ellipse und Hyperbel, welcher vier Lösungen zulässt, war eine bedeutend schwierigere Frage, welche genugsam den Scharf-

37) *Nouveaux élémens des sections coniques. Les lieux géométriques. La construction ou effection des équations* (in 12., 167).

38) *A. Andersoni Exercitationum mathematicarum Decas prima*, etc. Paris 1619, in 4.

sinn De La Hire's in der Analysis des Descartes beweist.

§. 29. Die Schrift von 1673, betitelt: *Nouvelle methode en Géométrie, pour les sections des superficies coniques et cylindriques*, ist die, in welcher De La Hire wahrhaft original und neu erscheint und welche uns berechtigt, diesen Geometer in die Klasse der Begründer der modernen Geometrie zu setzen. Dieses Werk zerfällt in zwei Theile, von denen jeder eine neue Methode enthält und sein besonderes Verdienst hat. Der angeführte Titel bezieht sich besonders auf den ersten Theil, worin der Verfasser die Kegelschnitte auf dem Kegel betrachtet; der zweite, wo er sie in der Ebene erzeugt, ist betitelt *Planiconiques.*

Der erste Theil kann als eine Probe der Methode betrachtet werden, welche De La Hire 12 Jahre später in seinem grossen *Traité* befolgt hat; denn er fängt denselben mit 20 Hülfssätzen an, welche von derselben Materie handeln, als das erste Buch seines *Traité*, und deren er sich bedient, um mit einer neuen Allgemeinheit und ohne das Axendreieck zu Hülfe zu nehmen, die Haupteigenschaften der Kegelschnitte zu beweisen. Aber diese Beweise sind weit von demselben Grade der Eleganz und Einfachheit entfernt, welchen wir in dem *Traité* von 1685 finden.

In seinen *Planiconiques* hat De La Hire eine allgemeine Beschreibung der Kegelschnitte vermittelst des Kreises, wie im Raume, ausgedacht, ohne irgend eine Eigenschaft dieser Curven als bekannt anzunehmen; darauf weiss er noch, dass die so erzeugten Curven in der That dieselben sind, als die, welche man im Raume auf dem Kegel ziehen kann. Diese Methode hat ausserdem noch das Vorzügliche, dass dieselben Hülfssätze, welche zur Uebertragung der Eigenschaften des Kreises auf die Schnitte des Kegels gedient hatten, sich ebenfalls auf die ebenen Kegelschnitte anwenden lassen und dass die Beweise dieselben bleiben, wie im ersten Theil.

§. 30. Da dieses erste Werk von De La Hire sehr selten ist und die Schriftsteller damaliger Zeit den Geist desselben nicht gehörig erkennen lassen[39]), so wird man

---

39) Die *Philosophical-Transactions* vom Jahr 1676 in Nr. 129 liefern einen günstigen Bericht über das Werk von De La Hire, sprechen aber gar nicht von dem Theil der *Planiconiques.* Das *Journal des Savans* vom Jahr 1764 (17. Dec.) sagt, nachdem es

es uns verzeihen, wenn wir hier in einige Entwickelungen eingehen, um das anzugeben, worin eigentlich diese vorzügliche Theorie der *Planiconiques* bestand, welche so lange Zeit hindurch ganz todt und ungekannt liegen geblieben ist und welche die erste hinreichend allgemeine Methode für die *Transformation der Figuren in andre derselben Gattung* darbietet.

Man denke sich in einer Ebene zwei parallele Gerade, von denen der Verfasser die eine *Formatrix*, die andre *Directrix* nennt, und einen Punkt, *Pol* genannt; durch jeden Punkt M einer in der Ebene gegebenen Curve ziehe man in einer beliebigen Richtung eine Transversale, so wird diese die Directrix in einem Punkte treffen, welchen man mit dem Pol durch eine gerade Linie verbinde, und die Formatrix in einem zweiten Punkt, durch welchen man eine Parallele mit dieser Geraden ziehe. Diese Parallele trifft die Gerade, welche von dem Punkt M nach dem Pol gezogen ist, in einem Punkt M^1, von welchem nun gesagt wird, dass er durch den Punkt M *gebildet* (*formé*) sei. Jeder Punkt der vorgegebenen Curve wird also einen entsprechenden Punkt einer zweiten Curve bilden. Die Punkte einer geraden Linie werden Punkte bilden, welche einer zweiten Geraden angehören, welche beide Linien sich auf der Formatrix schneiden. *Die Punkte eines Kreises bilden Punkte eines Kegelschnitts.*

Um den letztern Satz ohne Voraussetzung irgend einer Eigenschaft der Kegelschnitte zu beweisen, denkt sich De La Hire einen Kegel mit kreisförmiger Basis, welcher durch eine Ebene geschnitten ist, und legt die Ebene des Kreises auf die des Schnittes, indem er ersteren um die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen dreht; sodann nimmt er diese gerade Linie zur Formatrix; eine zweite Gerade (welche in der primitiven Lage des Kreises die Durchschnittslinie seiner Ebene mit einer andern Ebene

---

eine Analyse über den ersten Theil dieses Werkes gegeben hat, nur folgende Worte, die gerade hinreichten, es vor der Vergessenheit zu schützen: „Der Verfasser hat seiner neuen Methode eine Behandlung der ebenen Kegelschnitte hinzugefügt, welche sehr vorzüglich und sehr bequem ist, weil man sich dabei keinen Körper und keine Ebene, mit Ausnahme der, in welcher die Figur liegt, denken darf."

Wolf führt in seinem Commentar über die vorzüglichsten Schriften der Geometer die übrigen Werke von De La Hire an, lässt aber dieses in Rede stehende aus. Montucla sagt kein Wort darüber. Cornelius von Beughem erwähnt es in seiner *Bibliographia mathematica*, und Murhard hat es auch in seine *Bibliotheca mathematica* aufgenommen.

ist, die durch den Scheitel des Kegels parallel mit der Ebene des Schnitts gelegt wird) zur Directrix und zum Pol einen gewissen Punkt, welchen er passend bestimmt; und beweist dann endlich durch Vergleichung ähnlicher Dreiecke, dass der Schnitt durch den Kreis *gebildet* werden könne.[40])

Auf diese Weise erzeugt De La Hire die Kegelschnitte in *einer* Ebene, ohne Hülfe eines Körpers oder einer zweiten Ebene, und dieses ist das, was er die *Reduction des Kegels und seiner Schnitte auf die Ebene* nennt. *Ich wende bei diesen ebenen Schnitten*, sagt er in der Vorrede zu seinem Werk von 1679, *dieselben Beweise an, welche ich für die Körper gebraucht habe, und ich kann sagen, dass dieses Werk das Glück gehabt hat, sich den Beifall der ausgezeichnetsten Geometer zu erwerben.*

Das Aufsehn aber, welches diese erste Arbeit von De La Hire machte, war nur von kurzer Dauer, so dass dieses Werk ungeachtet seines unbestreitbaren Verdienstes seit mehr als einem Jahrhundert in Vergessenheit gerathen ist. Hierüber würden wir uns wundern müssen, wenn wir nicht wüssten, dass jede Epoche ihre momentanen Fragen hat und dass die herrlichsten und fruchtbarsten Ideen, um richtig aufgefasst und verarbeitet zu werden, auf die Zeit warten müssen, in welcher der Geist sich dem Gegenstand, auf welchen sie sich gerade beziehen, zugewandt hat. Das Studium der Wissenschaften liefert bei jedem Schritt einen Beleg für diesen Ausspruch.[41])

Le Poivre. §. 31. Die Methode De La Hire's wurde wieder hervorgerufen oder vielmehr von Neuem erfunden, im Jahr 1704 durch Le Poivre (von-Mons), einen heut zu Tage unbekannten Geometer, der aber in der Geschichte des Ursprungs und der Ausbildung der neuern Geometrie nur mit Unrecht nicht neben Desargues, Pascal und De La Hire genannt wird. Sein Werk führt den Titel: *Traité des sections du cylindre et du cône, considérées dans le solide et dans le plan, avec des demonstrations simples et nouvelles* (in 8., 60 S.). Das,

---

40) Dieser Beweis ist ziemlich schwierig; das Princip der Perspective, welches wir aus dem Theorem des Desargues abgeleitet haben, bietet einen ganz natürlichen und äusserst einfachen dar.

41) Wir fügen hier noch mit Montucla hinzu: „dass es selbst in der Geometrie Vorurtheile giebt und dass es selten ist, dass diejenigen, welche sich lange Zeit an eine gewisse Art zu raisonniren gewöhnt haben, die alte Gewohnheit aufgeben und sich an eine neue anschliessen." (*Histoire des Math.*, tom. II, p. 144.)

was sich hierin auf die Beschreibung der Kegelschnitte in der Ebene bezieht, ist im Grunde nichts Andres, als die Methode De La Hire's, nur auf eine so gänzlich abweichende Art dargestellt, dass deren Geist und das Verfahren hier näher aus einander gesetzt zu werden verdient. [42])

Zuerst scheint der Verfasser die Idee gehabt zu haben, auf einem Kegel einen ebenen Schnitt zu zeichnen, ohne die Ebene, welche ihn enthält, wirklich durch zu legen, was er auf zwei Arten that, entweder durch den Schnitt einer jeden Seitenlinie des Kegels mit einer passend gewählten geraden Linie, oder vermittelst einer Proportion, deren letztes Glied auf jeder Seitenlinie den Punkt des Schnittes bestimmt. Sodann bemerkt er, dass diese beiden Verfahren in der Ebene des Kreises, welcher die Basis des Kegels bildet, sich eben so gut anwenden lassen als im Raume und gleichfalls dieselben Curven erzeugen. Denkt man sich einen Kegel mit kreisförmiger Basis, so wird eine willkührlich gelegte schneidende Ebene auf dem Kegel einen Schnitt bestimmen, welcher die Curve ist, bei der es sich darum handelt, dass sie ohne Rücksicht auf die Ebene, in welcher sie sich befindet, construirt werde. Zu diesem Ende muss man zunächst die zur Bestimmung der Lage dieser Ebene im Raume nothwendigen Elemente annehmen, was auf verschiedene Arten geschehen kann. Le Poivre wählt die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und der Basis des Kegels und eine zweite Gerade, welche parallel mit der Durchschnittslinie geht und welche der Durchschnitt der Ebene der

---

42) Ueber dieses Werk ist Bericht erstattet in dem *Journal des Savans* vom Jahr 1704 und in den *Actis eruditorum* vom Jahr 1707.

Der sehr weitläufige Artikel im *Journal des Savans* scheint anzunehmen, dass die Methode des Le Poivre aus der des De La Hire entnommen sei; aber ihr beiderseitiger Gang ist zu sehr verschieden, als dass man dieses annehmen dürfte. Wir fügen noch hinzu, dass das Werk des Le Poivre ein Verdienst besitzt, welches man in dem des De La Hire nicht findet, und welches von dem Verfasser des Artikels in dem genannten Journal nicht angemerkt ist; dieses besteht darin, dass es eine zweite Beschreibungsart seiner Figuren enthält, die sich auf ihre metrischen Verhältnisse gründet, woraus der Verfasser viel Beträchtliches hätte ableiten können, wenn er diese glückliche Idee weiter verfolgt hätte.

Das Leipziger Blatt spricht sehr vortheilhaft von dem Werk des Le Poivre in folgenden Worten: „*Non solum intra paucas pagellas palmarias sectionum conicarum proprietates mira facilitate ac perspicuitate explicat; sed inter eas quoque aliquot proponit antea parum cognitas.*"

Basis und einer zweiten Ebene ist, die durch den Scheitel des Kegels parallel mit der schneidenden Ebene gelegt wird. Diese beiden Geraden und der Scheitel des Kegels bestimmen die Lage der schneidenden Ebene, es müssen also auch diese drei Stücke zur Construction der Curve hinreichen, welche durch den Schnitt des Kegels und der Ebene, wenn er reell ist, entsteht. Es ist aber auch leicht zu sehen, dass man, um diese Construction auszuführen, nur durch einen Punkt *M des* Kreises, der die Basis des Kegels bildet und *erzeugender Kreis* genannt wird, irgend eine Transversale ziehen darf, welche die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und ihre Parallele in zwei Punkten schneiden wird; darauf den zweiten dieser Punkte mit dem Scheitel *S* des Kegels durch eine Gerade verbinden und durch den andern Punkt eine Parallele mit dieser Geraden ziehen. Diese Parallele wird offenbar in der schneidenden Ebene liegen und die Seitenlinie *SM* des Kegels in einem Punkte M^1 treffen, welcher der gesuchten Curve angehört. Für einen andern Punkt des erzeugenden Kreises wird man einen andern Punkt des Schnitts erhalten. — Diese Construction ist allgemein, welches auch die Lage des Punktes *S* im Raume sein mag; und sie besteht selbst dann noch, wenn dieser Punkt in der Ebene des Kreises liegt. In diesem letztern Fall hat man zwar keinen Kegel, aber die durch den Punkt gebildete Curve ist doch noch ein Kegelschnitt. [43]) Man sieht hieraus, dass die Construction der Kegelschnitte dieses Verfassers sich eben so gut in der Ebene als im Raume anwenden lässt, und für die Ebene ist sie ganz dieselbe, als die des De La Hire. Der Punkt

---

43) Um sich hiervon zu überzeugen, ist es hinreichend, dass die Curve, wie sie im Raume construirt ist, mit allen Linien, die zu ihrer Construction erforderlich waren, auf die Ebene des Kreises projectirt zu denken. Man hat alsdann in der Projection eine Curve und verschiedene Gerade, welche zu ihrer Construction dienen, wie die Geraden im Raume zur Construction des Kegelschnitts, d. h. die Construction der projecirten Curve ist vollkommen gleich *der* der Curve im Raume, und wenn man die projecirenden Linien senkrecht auf der Durschnittslinie der Ebene des Schnitts mit der Grundfläche des Kegels und gleich geneigt gegen beide Ebenen annimmt, so wird die projecirte Curve dem Schnitt des Kegels vollkommen gleich, sie wird also ein Kegelschnitt.

Hieraus kann man auch schliessen, dass zur Uebertragung der Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte ein einziger Beweis hinreicht, mag man den Kegelschnitt in der Ebene des Kreises oder im Raume betrachten.

S ist der *Pol*, die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene ist die *Formatrix*, und ihre Parallele die *Directrix*.

§. 32. Bei den Fragen der Geometrie giebt es im Allgemeinen zwei Arten, die Lösungen, auf welche die Theorie geführt hat, anzuwenden. Nach der ersten bestimmt man die gesuchten Punkte durch die Construction von Linien, nach der zweiten durch Formeln, welche sich auf Zahlenrechnungen zurückführen. Es ist aber immer nützlich, beide Lösungsarten zu suchen, weil jede von ihnen auf Eigenschaften der Figur führt, welche die andre nicht erkennen lässt, und weil eine Aufgabe nur dann vollständig gelöst ist, wenn sie von allen Gesichtspunkten aus betrachtet worden und ihre verschiedenen graphischen und metrischen Eigenschaften, die sich auf die beiden erwähnten Lösungen beziehen, vollständig beleuchtet sind.

Die Construction, welche wir vorhin zur Beschreibung der Kegelschnitte, sei es im Raum oder in der Ebene, gegeben haben, gehört der ersten Lösungsart an. Um sie in eine numerische Formel umzuwandeln, vergleicht man zwei ähnliche Dreiecke, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel in dem Punkte *M* des erzeugenden Kreises haben, woraus man eine Proportion zwischen ihren an diesem Scheitel liegenden Seiten ableitet. Diese Proportion giebt die Entfernung des Punktes M^1 im Kegelschnitt von dem entsprechenden Punkt im Kreise, und dieses ist die gesuchte Formel. [44])

§. 33. Die Methode von De La Hire und Le Poivre war die glücklichste und fruchtbarste, welche man zur Entdeckung der zahlreichen Eigenschaften der Kegelschnitte vermittelst der des Kreises erdenken konnte; aber die

---

44) Es wäre zweckmässiger gewesen, die Entfernung des Punktes M^1 vom Punkte *S* als unbekannt anzunehmen, die Formel hätte dann ganz einfach auf die verschiedenen Eigenschaften der Kegelschnitte geführt, namentlich auf die ihrer Brennpunkte, von denen der Verfasser nichts sagt. Zu diesem Ende hätte es hingereicht, den Punkt *S* in den Mittelpunkt des erzeugenden Kreises zu legen.

Diese letzte Bemerkung in Bezug auf die Lage des Punktes *S* findet auch auf die Abhandlung des De La Hire ihre Anwendung, welcher zwar die Eigenschaft der Brennpunkte beweist, aber so, dass er diese Punkte als *a priori* bekannt annimmt, wie es in den Kegelschnitten des Apollonius geschieht, und ohne dass er auf deren Entdeckung geführt wird. Indem man den *Pol* in den Mittelpunkt des Kreises verlegt, während die *Formatrix* und die *Directrix* beliebig, nur parallel unter einander sind, bildet man einen Kegelschnitt, welcher den Pol zum Brennpunkt hat: verschiedene Eigenschaften des Kreises wenden sich dann unmittelbar auf den Kegelschnitt, in Bezug auf seinen Brennpunkt, an.

Vortheile, welche sie darbot, durften sich nicht auf diese besondere Anwendung beschränken; sie hatte eine ausgedehntere Bestimmung, indem sie ein allgemeines Mittel darbot, in der Ebene die Figuren in andre derselben Gattung zu *transformiren*, wie es die Perspective that.

Die Wichtigkeit dieser Methoden, welche eine der Hauptlehren der neuen Geometrie bilden, veranlasst uns, noch auf einige Betrachtungen über die des De La Hire und Le Poivre einzugehen, welche deren Beziehungen zu den Anwendungen der Perspective, zu einer gleichzeitig von Newton ausgedachten analogen Methode und zu mehren andern Methoden, die neuere Enfindungen sind und von denen wir in der Folge sprechen wollen, zeigen werden.

Die Art der Transformation eines Kreises in einen Kegelschnitt in der Ebene, wie sie von De La Hire und Le Poivre angewandt wurde, hat zur characteristischen Eigenschaft diese, dass jedem Punkt und jeder Geraden, die als zum erzeugenden Kreise gehörig betrachtet werden, ein Punkt und eine Gerade entsprechen, die zum Kegelschnitt gehören, und dass die Beziehung der Lage beider Figuren eine solche ist, dass zwei correspondirende Punkte mit einem festen Punkte *S* in gerader Linie liegen und dass zwei correspondirende Gerade auf einer festen Axe zusammenkommen, welche die gerade Linie ist, welche wir in der Methode des De La Hire *Formatrix* genannt haben und welche in der des Le Poivre die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene darstellt.

Dieser Punkt *S* und die feste Axe, als zum Kreise gehörig betrachtet, sind wieder selbst ihre correspondirende in Bezug auf den Kegelschnitt, so dass sie in Bezug auf jede dieser Curven dieselbe Rolle spielen. Wenn man von dem festen Punkt zwei Tangenten an den Kreis ziehen kann, so werden diese auch Tangenten für den Kegelschnitt sein, und wenn die feste Axe den Kreis in zwei Punkten trifft, so wird auch der Kegelschnitt durch diese beiden Punkte gehen.

Man beweist auch noch, dass die correspondirenden zweier parallelen Linien in einem Punkte zusammenkommen, welcher auf der von uns *Directrix* genannten geraden Linie liegt, so dass irgend ein Punkt, der in der einen Figur in der Unendlichkeit liegt, zu seinem correspondirenden in der andern Figur einen Punkt auf der Directrix hat, woraus zugleich hervorgeht, weil es nur *eine* gerade Linie geben kann, welche einer geraden Linie correspondirt, dass alle in der Unendlichkeit einer Ebene

liegenden Punkte als auf einer geraden Linie liegend betrachtet werden müssen.

§. 34. Man erkennt an diesen verschiedenen Eigenschaften die *homologischen* Figuren, deren Theorie zuerst Poncelet in seinem *Traité des propriétés projectives* gegeben hat. Der *Pol S* ist der *Mittelpunkt der Homologie* und die *Formatrix* ist die *Axe der Homologie.*

Diejenigen, welche sich an die Anwendung der Perspective gewöhnt haben, werden auch bei dieser Art der Deformation erkennen, dass diese Figuren, welche man in derselben Ebene zeichnet, von einander die perspectivischen sind. Wenn man nämlich die Formatrix (oder Axe der Homologie) als die Grundlinie (*la ligne de terre*), die Directrix als die Horizontallinie (*la ligne horizontale*), den Fusspunkt des Perpendikels, welcher vom Pol (oder dem Mittelpunkt der Homologie) auf diese Directrix gefällt ist, als Augenpunkt (*le point de vue*) annimmt und wenn man endlich, um den Grundpunkt (*le point de distance*) zu bestimmen, vom Augenpunkt ausgehend auf der Directrix ein Segment gleich diesem Perpendikel aufträgt, so findet man, wenn man mit diesen *Datis* die Perspective des von De La Hire beschriebenen Kegelschnitts construirt, genau den erzeugenden Kreis. (S. Note XVIII.)

Die sehr gewünschte allgemeine Beschreibung der Kegelschnitte in der Ebene existirte schon längere Zeit, obwohl ohne gehörig bekannt zu sein, aber sie diente hauptsächlich als einfache Anwendung der Perspective zum Behuf der Künstler. De La Hire hat das sehr bedeutende Verdienst, zuerst die Idee aufgefasst zu haben, eine solche Deformation der Figur als eine Methode der rationellen Geometrie anzuwenden und die verschiedenen Eigenschaften einer Curve direct auf eine andre in derselben Ebene zu übertragen.

Diese Methode war eine Verallgemeinerung der beiden andern Arten, wie man eine Figur in eine andre derselben Gattung transformirt. Die erste davon besteht darin, dass man von einem festen Punkt Radien nach allen Punkten einer Curve zieht und sie in einem constanten Verhältniss verlängert: die Endpunkte derselben bilden alsdann eine neue Curve, welche der ersten ähnlich und in Bezug auf den festen Punkt ähnlich gelegen ist. Nach der zweiten Art der Transformation fällt man von allen Punkten einer Curve Ordinaten auf eine feste Axe und verlängert dieselben über diese feste Axe hinaus in einem gegebenen Verhältniss; die Endpunkte gehören einer zweiten Curve

an, welche von demselben Grade und derselben Gattung ist, als die vorgegebene, und die Tangenten zweier entsprechenden Punkte beider Curven treffen sich auf der festen Axe. Dieses ist die Art, auf welche Stevin, Gregoire von St. Vincent und vor ihnen der berühmte Maler Albrecht Dürer die Ellipse vermittelst eines Kreises bildeten. Man kommt auf diese beide Arten der Deformation, wenn man bei der des De La Hire annimmt, dass die Durchschnittslinie (*la trace*) und die Directrix im ersten Fall, und der Punkt *S* im zweiten, in der Unendlichkeit liegen.

Wir finden in der Geometrie der Curven von John Lesli[45]) vermittelst des Durchschnitts zweier Geraden, die sich um zwei feste Pole bewegen, eine Construction der Kegelschnitte, welche auf die des De La Hire zurückkommt. Dieser berühmte Geometer leitete seine Construction aus der Anwendung der Perspective ab, wandte diese aber nicht wie De La Hire und Le Poivre dazu an, um dadurch die Eigenschaften der Kegelschnitte zu beweisen.

Newton, 1642 — 1727.

§. 35. In derselben Zeit, als De La Hire damit umging, die Kegelschnitte vermittelst eines Kreises zu beschreiben, erdachte auch Newton eine Methode von derselben Art, deren Hauptzweck der war, in der Ebene Transformationen von Figuren auszuführen, wobei den Punkten Punkte und den Geraden Gerade entsprächen, und wo gewisse convergirende Gerade parallel würden. Er gab diese Methode in dem ersten Buch seiner *Principia* und zeigte darin, wie sie zur Transformation irgend eines Kegelschnitts in einen Kreis und zur Vereinfachung schwieriger Probleme dienen könne.

Dieser ausgezeichnete Geometer gab eine sehr einfache geometrische Construction und einen eben so einfachen analytischen Ausdruck für die transformirten Figuren, ohne jedoch den Weg erkennen zu lassen, auf welchem er zu dieser Transformationsart der Figuren gekommen war, und in diesem Umstand liegt vielleicht auch der Grund, weshalb sie seit jener Zeit wenig bearbeitet ist; denn der Geist hat immer einige Bedenklichkeit und einigen Widerwillen gegen das, was zwar die augenscheinliche Gewissheit für sich hat, wobei man aber Nichts findet, wodurch das eigentliche Verhältniss der Sache erklärt und

---

45) *Geometrical analysis and Geometry of curve lines*, etc. Edinburgh 1821, in 8.

dargethan wird. Wir haben uns sorgfältig bemüht, diese Methode mit der des De La Hire zu vergleichen, um die Unterschiede aufzusuchen, welche sie characterisiren und vielleicht der einen vor der andern einen Vorzug geben könnten, indem wir dadurch den Faden aufzufinden hofften, an welchen Newton geleitet wurde; und wir haben dabei erkannt, dass seine Figuren keine andern, als die des De La Hire waren, nur in einer andern gegenseitigen Lage, und dass man sie auch durch die Perspective erzeugen kann, wenn man sie hernach in eine und dieselbe Ebene legt, nur in andrer Weise, als es De La Hire gethan hat. Diese Art ist es wahrscheinlich, auf welche Newton seine Methode erdacht hat. Denn dasselbe Verfahren ist auch in der That eine von den Anwendungen der Perspective, wie sie von einigen Autoren, von denen wir Vignole, Sirigati und Pozzo nennen, gelehrt werden. (S. Note XIX.)

§. 36. Es wäre uns leicht, die vielfachen Hülfsmittel nachzuweisen, welche diese Methoden der Transformation der Curven in einer Ebene den Geometern seit anderthalb Jahrhunderten hätten darbieten können, wenn nicht ein unglückliches und ungerechtes Vorurtheil sie aus der reinen Geometrie verbannt hätte. Aber es genügt uns, gezeigt zu haben, dass vorzüglich die Methode De La Hire's zu denselben Transformationen und zu demselben Ende geführt hätten, als die schöne Theorie der homologischen Figuren, woraus Poncelet eben so zahlreiche als merkwürdige Resultate abgeleitet hat. Diese Methode ist übrigens eben so wie die Newton's nur eine Folgerung aus unserm allgemeinen Princip der *homographischen Deformation*, und wir würden einen doppelten Gebrauch davon machen, wenn wir uns hier näher auf ihre Anwendungen einlassen wollten.

§. 37. Indem wir das Historische über die ersten Methoden der Transformation der Curven hiermit schliessen, bemerken wir nur noch, dass die geistreiche Art, auf welche Le Poivre zu der seinigen gekommen ist, gewiss nicht weniger die Beachtung der Geometer verdienen dürfte, weil sie auf einer Idee beruht, welche ein ganzes System der beschreibenden Geometrie oder der graphischen Darstellung von Körpern in einer Ebene in sich enthält. Diese Idee besteht darin, bei der Perspective eine im Raume liegende Ebene durch zwei parallele Gerade auf der Tafel zu repräsentiren, von denen die eine die Schnittlinie (*la trace*) der Ebene selbst und die andre die Schnittlinie einer durch den Gesichtspunkt parallel gelegten Ebene

ist. Nach dieser Art ist eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt, nämlich durch die, in welchen diese Gerade und eine durch den Gesichtspunkt gezogene Parallele die Tafel treffen. Auf diese Weise erhält man ein Mittel, alle Körper im Raume in einer Ebene darzustellen, wenn man nur ausserhalb dieser Ebene einen übrigens willkührlich gewählten Punkt fest annimmt. Diese neue Art der beschreibenden Geometrie wurde vor einigen Jahren von Cousinery (Ingenieur der Brücken und Chausseen) aufgefasst und ausgeführt. Wir kommen auf das Werk dieses Geometers zurück, wenn wir von der beschreibenden Geometrie des Monge sprechen werden.

§. 38. Die Arbeiten derjenigen Geometer, welche wir im Anfange dieser dritten Periode als Erweiterer der Geometrie von Descartes angeführt haben, bezogen sich im Allgemeinen nur auf die ebene Geometrie. Indem aber dieser berühmte Philosoph die ganze Wichtigkeit und Ausdehnung seiner Coordinaten-Methode begriff, hatte er sie nicht auf ebene Curven allein eingeschränkt, sondern auch ihre Anwendung in der Theorie der Curven doppelter Krümmung gezeigt. Zu diesem Ende fällte er von den Punkten einer Curve im Raume Perpendikel auf zwei gegen einander senkrechte Ebenen; ihre Fusspunkte bildeten dann zwei ebene Curven, von denen er jede auf zwei in ihrer Ebene liegende Coordinatenaxen, wovon die eine der Durchschnitt beider Ebenen war, bezog.

Diese Lehre von den Curven im Raume führte, wie man sieht, zu dem Coordinatensystem für drei Dimensionen und zu dem Ausdruck einer Oberfläche durch eine einzige Gleichung zwischen diesen drei Coordinaten. Aber die Untersuchungen der Geometer beschränkten sich lange Zeit hindurch nur auf ebene Curven, und die analytische Geometrie der drei Dimensionen entwickelte sich erst mehr als ein halbes Jahrhundert später.

Parent, 1666 — 1716.

Es ist, wie ich glaube, Parent der erste, welcher eine krumme Oberfläche durch eine Gleichung zwischeu drei Variabeln darstellte, und zwar in einem Memoire, welches er im Jahre 1700 in der Academie der Wissenschaften las.

Dieses Memoire, welches mit geringer Sorgfalt, wie die übrigen Werke dieses sonst gewandten und mit mannigfachen Kenntnissen ausgerüsteten Geometers, geschrieben ist, verdient dennoch beachtet zu werden, da es die erste Anwendung unsres Coordinatensystems im Raume zeigt und diese Anwendung auf ziemlich schwierigen Untersuchungen beruht. Man findet darin die Gleichung der

Kugel so wie die ihrer tangirenden Ebene, die Bestimmung der *grössten* und *kleinsten* Ordinaten in gewissen Schnitten der Kugel, die Gleichungen verschiedener Oberflächen des dritten Grades, und Curven doppelter Krümmung, welche durch Punkte gehen, denen die *grössten* und *kleinsten* Ordinaten entsprechen, endlich die Construction der Beugungspunkte gewisser Curven, die auf den Oberflächen gezogen sind. [46])

Später hat auch Johann Bernoulli die Oberflächen durch eine Gleichung zwischen drei Coordinaten ausgedrückt, bei Gelegenheit eines Problems über die kürzeste Linie, welche man auf einer Oberfläche zwischen zwei gegebenen Punkten ziehen kann.

Clairaut, 1713 — 1765.

Aber erst 1731 hat Clairaut in seinem berühmten *Traité des courbes à double courbure*, welches er in einem Alter von 16 Jahren schrieb [47]), die Lehre von den räumlichen Coordinaten, angewandt auf krumme Oberflächen und auf Curven doppelter Krümmung, die bei deren Durchschnitt entstehen, methodisch aus einander gesetzt.

Die Aufgaben, welche sich auf die Tangenten dieser Curven, auf ihre Rectification, auf die Quadratur der Räume, welche durch ihre Ordinaten begränzt werden,

---

46) Von den Eigenschaften der Oberflächen: 1) von ihren tangirenden Ebenen; 2) von den *maximis* und *minimis* der Oberflächen und von ihren absoluten *maximis* und *minimis*; 3) von den Curven, welche die *maxima* und *minima* der Oberflächen zu enthalten fähig sind oder wirklich enthalten; 4) von den Cuven, welche Beugungspunkte zu enthalten fähig sind oder wirklich enthalten. Siehe den zweiten Theil der *Essais et Recherches de mathématique et de physique de Parent*; 3 Vol. in 12., 2te Ausg. 1713.

47) Schon seit dem 12ten Jahre war Clairaut in der gelehrten Welt bekannt geworden, und zwar durch ein Memoire über vier geometrische Curven, welches für werth erachtet worden war, einem Memoire seines Vaters in den Schriften der Academie zu Berlin (*Miscellanea Berolinensia*, tom. IV, ann. 1734) beigefügt zu werden. Sein jüngerer Bruder, der in einem Alter von 16 Jahren starb, hatte ein eben so frühzeitig gereiftes Talent, er schrieb in seinem 14ten Jahre über *Diverses quadratures circulaires, elliptiques et hyperboliques*, wozu er eine durch continuirliche Bewegung erzeugte Construction der cubischen Parabeln und verschiedener anderer Curven fügte. Dieses kleine Werk, welches den Beifall der Academie der Wissenschaften von Paris im Jahr 1730 erhielt und 1731 gedruckt wurde, verdient eine Stelle neben dem *Essai pour les coniques* von Pascal und den *Recherches sur les courbes à double courbure* von dem ältern Bruder des Verfassers. Die Seltenheit dieses Buchs erhöht noch den Werth dieser von einem vierzehnjährigen Geometer gelieferten literarischen Arbeit.

beziehen, sind in diesem *Traité* mit einer Eleganz und Leichtigkeit gelöst, welche den gegenwärtigen Methoden nur in Hinsicht der Symmetrie der Formeln, wie sie von Monge in seinem grossen *Traité de l'application de l'Algèbre à la Géométrie* eingeführt ist, nachstehen. Die Benennung *Curve doppelter Krümmung*, welche von Clairaut deshalb angenommen wurde, *weil eine solche Curve an der Krümmug zweier ebenen Curven, welche ihre Projectionen sind, Theil hat*, ist von Pitot[48]) herzuleiten, der sie in einem Memoire anwandte, welches von der auf einen geraden Kreiscylinder gezogenen Schraubenlinie handelte und 1724 in der Academie der Wissenschaften gelesen wurde.

Pitot, 1695 — 1771.

§. 39. Wir haben bei Architas, Geminus und Pappus zu zeigen Gelegenheit gehabt, dass die Curven doppelter Krümmung den Alten nicht fremd waren. Auch in der Zeit nach diesen bis zu Clairaut hin, von welchem sich ihre Theorie und die Wichtigkeit datirt, welche sie in dem weiten Gebiet der Eigenschaften der Ausdehnung einnehmen, findet man sie noch in den Werken mehrer Geometer; und wir wollen zur Vollständigkeit der Geschichte dieser Curven noch kurz in chronologischer Ordnung die verschiedenen Umstände, bei welchen sich diese Curven zeigen, anführen.

Nonius, 1492 — 1577.

Im Jahr 1530 untersuchte der Portugiese Nonius und später Wrigt, Stevin und Snellius die *Loxodrome*, welche eine Curve doppelter

48) Indem Pitot sich vorsetzte, die Curve zu quadriren, welche zuerst *Gefährtin der Cycloide* (*cycloidis socia*) und hernach von Leibnitz die Linie der *Sinus* genannt wurde, weil ihre Abscissen den Sinus der auf den Umfang eines Kreises aufgelegten Ordinaten gleich sind, fand er 1) dass diese Curve das ist, was bei der Abwickelung eines geraden Kreiscylinders in seiner Tangenten-Ebene eine Ellipse wird, welche durch eine schneidende Ebene, die unter einem halben rechten Winkel gegen die Axe geneigt ist, auf diesem Cylinder gebildet wird, und 2) dass diese Curve auch aus einer Schraubenlinie entsteht, welche auf demselben Cylinder gezeichnet ist und auf eine mit der Axe des Cylinders parallele Ebene projectirt wird. — Diese beiden Sätze sind seitdem in mehren Werken bewiesen.

Diese Curve, um die es sich hier handelt, und zwar als aus der Ellipse bei der Abwickelung des Cylinders entstanden betrachtet, hat auch die Aufmerksamkeit Schubert's auf sich gezogen, welcher in in den *Novis Actis von Petersburg* (tom. XIII, Jahr 1795 — 1796) ihre Rectification und Quadratur gab.

Bürja hat in einem Memoire *über die mathematischen Kenntnisse des Aristoteles* bemerkt, dass dieser Fürst der Philosophen des Alterthums in der sechsten Aufgabe des zweiten Abschnitts seiner *Probleme* von derselben Curve gesprochen habe.

Krümmung ist, die auf dem Erd-Sphäroid von einem Schiff beschrieben wird, welches beständig nach demselben Windstrich gesteuert wird. Halley entdeckte die wunderbare Eigenschaft der *Loxodrome*, dass sie die stereographische Projection der logarithmischen Spirale ist.

Um 1630 betrachtete Roberval in seinem *Traité des indivisibles* die Curve doppelter Krümmung, welche durch den einfachen Zug eines Zirkels auf der Oberfläche eines Kreis-Cylinders beschrieben wird, und bewies verschiedene Eigenschaften theils dieser Curve, theils derjenigen, welche aus ihr durch die Abwickelung des Cylinders in einer Ebene entsteht. Bald darauf beschäftigte sich auch La Loubère mit dieser Curve und nannte sie die *cylindrische*.

La Loubère, 1600 — 1664.

Descartes sagt auch am Ende des zweiten Buchs seiner Geometrie (1637) einige Worte über die Curven doppelter Krümmung, ohne auf eine insbesondere einzugehen; aber in diesen wenigen Worten umfasst er die ganze Lehre. 49)

Pascal löste ein Problem über die conische Spirale, welche eine Curve doppelter Krümmung auf einem geraden Kegel ist. (*Oeuvres de Pascal*, tom. V, p. 422.)

Courcier hat in seinem *Opusculum de sectione superficiei sphaericae per superficiem sphaericam, cylindricam atque conicam*, etc., in 4., 1633, auf eine besondre Art die Curven doppelter Krümmung betrachtet. Es waren dieses diejenigen, welche durch den Schnitt einer Kugel mit einem Kegel oder Cylinder von kreisförmger Basis oder durch den gegenseitigen Schnitt dieser beiden letzten Oberflächen, in beliebiger Lage, entstehen. Wenn auch der Gegenstand keine ernstlichen

Courcier.

49) Descartes giebt auch die Construction der Normalen an Linien doppelter Krümmung, aber er begeht hierbei einen Fehler; denn er nimmt an, dass die Normalen der ebenen Curven, welche die Projectionen der Curve doppelter Krümmung sind, auch die Projectionen einer Normale dieser Curve sind. Das gilt zwar von den Tangenten, aber nicht von den Normalen.

So wenig Einfluss auch dieser Fehler hat und so fremd er auch der Methode ist, welche die Geometrie des Descartes begründet, so ist es doch höchst wunderbar, dass er sowohl den Neidern als den Bewunderern, welche dieses unsterbliche Werk hervorrief, und selbst Roberval, der seinen Geist förmlich abmarterte, um einen Fehler darin zu entdecken, entgangen ist. Ja, noch mehr, Rabuel bewies sogar in seinem *Commentar* die Construction des Descartes. Jedoch ist es wahr, dass er bei diesem beabsichtigten Beweis unterlassen hat, die Elemente des Euclid zu citiren, was er sonst beinahe in jeder Zeile zu thun pflegt.

Schwierigkeiten darbietet, so verdient doch dieses Werk mehr bekannt zu sein, als es wirklich ist. [50])

Viviani, 1622 — 1703. Ein von Viviani vorgelegtes Problem, in dem es sich darum handelt, in einem hemisphärischen Gewölbe vier Fenster durchzubrechen, so dass der Rest des Gewölbes quadrirbar ist, wurde durch Linien doppelter Krümmung gelöst und wurde für Wallis, Leibnitz und Bernoulli Veranlassung, über solche Curven Untersuchungen anzustellen.

Herman, 1678 — 1733. Herman beantwortete die in den Leipziger *Actis* von 1718 über das Ziehen rectificirbarer Curven auf der Kugel gestellte Frage und wurde dabei auf die Betrachtung der sphärischen Epicycloide geführt, welche durch einen Punkt der Oberfläche eines Revolutions-Kegels, der auf einer Ebene rollt, während sein Scheitel fest bleibt, beschrieben wird.

Guido-Grandi, 1671 — 1742. Guido-Grandi betrachtete 1728 auf der Kugel zwei Curven doppelter Krümmung, welche er *clélies* nannte und deren Quadratur er gab. Die eine dieser Curven ist ganz einfach der Durchschnitt der Kugel und einer schraubenförmigen Oberfläche (*helicoïde rampante*), deren Axe durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Endlich erschien das Werk von Clairaut, welches die Theorie der Curven doppelter Krümmung begründete und nach welchem sich die Untersuchungen über diese Curven beträchtlich vermehrten.

---

50) Frezier hat in seinem *Traité de Stéréometrie* dieselben Curven betrachtet, als Courcier. Dieser hatte sie *curvitegae* genannt; Frezier nannte sie *imbricatae*.

Viertes Kapitel.

Vierte Epoche.

Infinitesimal-Rechnung.

§. 1. Funfzig Jahre, nachdem Descartes seine Geometrie geschrieben, trat eine andre grosse von Fermat und Barrow vorbereitete Idee, die Infinitesimal-Rechnung des Leibnitz und Newton, ins Leben (1684 und 1687).

Diese erhabene Erfindung, welche die Methoden von Cavalleri, Roberval, Fermat und Gregoire von St. Vincent für die Ausmessung der Figuren und für die Untersuchungen über *maxima* und *minima* mit so ungeheuerm Vortheil ersetzte, wandte sich mit solcher fabelhaften Leichtigkeit auf die grossen Fragen über die Erscheinungen in der Natur an, dass sie beinahe ausschliesslicher Gegenstand für die Untersuchungen der berühmtesten Geometer wurde. Seit dieser Zeit wurden die alte Geometrie und die herrlichen Methoden für das Studium der Kegelschnitte von Desargues und Pascal, von De La Hire und Le Poivre gänzlich vernachlässigt.

Die Analysis des Descartes behielt bei dieser allgemeinen Vernachlässigung allein von allen grossen Erzeugnissen unsrer zweiten und dritten Epoche ihre Bedeutung. Sie bildete das eigentliche Fundament für die Lehren des Leibnitz und Newton, welche sich ganz der Herrschaft über die mathematischen Wissenschaften bemächtigten.

Indess waren auch noch in der ersten Zeit einige Geometer, hauptsächlich Huygens, obgleich er alle Hülfsmittel der Infinitesimalrechnung kannte, Maclaurin, der tiefsinnige Commentator des *Treatise of fluxions* von Newton, und Newton selbst der Methode der Alten treu, und verstanden es, in die Mysterien der tiefsten Geometrie einzudringen, um mit ihrer Hülfe allein die schwierigsten

Fragen der physikalisch-mathematischen Wissenschaften aufzulösen.

Später verfolgten noch einige andre Geometer, wie Stewart und Lambert, würdige Bewunderer dieser grossen Männer, den Weg derselben und setzten deren geistreiche Methoden fort. Endlich aber wandte sich der Geist Aller, durch die Neuheit und durch die wichtigen Hülfsmittel, welche die Infinitesimal-Rechnung darbot, angezogen, auf andre Ideen und andre Untersuchungen; dergestalt, dass, wenn man schon bisweilen sagen kann, die Geometrie von Huygens und Newton, nachdem sie den Grund zu unsern positiven Kenntnissen gelegt hatte, war nicht hinreichend, ihr angefangenes Werk fortzusetzen — es auch gerecht ist, nachzusehen, wenn auch Schüler es daran haben fehlen lassen; denn ich wüsste nicht, dass man seit drei Viertheilen eines Jahrhunderts Anwendungen von dieser Methode gemacht hätte, und heut zu Tage spricht man, nur auf Tradition und auf Autorität gestützt, vielleicht ohne gehörige Ueberlegung, von ihrer Ohnmacht und von den Grenzen, in welche ihre Anwendung eingeengt ist.

§. 2. Wir können es nicht unternehmen wollen, alle Werke der genanten grossen Geometer zu analysiren; diese Arbeit gehört nicht in dieses Werk und wäre über unsere Kräfte. Wir müssen nur die von ihnen anführen, welche sich auf denjenigen Theil der Lehre von der Ausdehnung beziehen, welchen wir die *Geometrie der Gestalt und Lage* (*Géométrie des formes et des situations*) genannt haben. Diese Geometrie nahm ihren Anfang schon in der *geometrischen Analyse* der Alten, wurde aber in zwei Jahrtausenden nur in der unerschöpflichen Theorie der Kegelschnitte angewandt, bis ihr endlich Descartes mit einem Male das ganze unzählbare Geschlecht der geometrischen Curven unterwarf.

Wir wollen zuerst in Kurzem die allmähligen Entdeckungen der Haupteigenschaften dieser Curven darstellen und hernach wieder zurückkehren, um von den Fortschritten zu sprechen, welche die Geometrie in ihren verschiedenen andern Theilen gemacht hat.

Allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven.

§. 3. Die analytische Geometrie des Descartes war ein universelles Hülfsmittel, ausgezeichnet geeignet zur Untersuchung geometrischer Curven. Die Anwendung und die ganze Kraft derselben hat schon dieser Philosoph an der Auflösung der verschiedensten Aufgaben

gezeigt. Aber Newton und Maclaurin waren die ersten, welche sie zur Untersuchung der allgemeinen und characterischen Eigenschaften dieser Gattung von Curven anwandten, und es sind diese beiden ausgezeichneten Geometer und ihr Zeitgenosse Cotes, welchen man die Entdeckung der ersten und wichtigsten Eigenschaften der geometrischen Curven verdankt.

Newton.

Newton gab in seiner *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1706) folgende drei an, welche er als Erweiterung der Haupteigenschaften der Kegelschnitte darstellte.[1])

Die erste betrifft ihre Durchmesser. Sie besteht in Folgendem: *Wenn man in der Ebene einer geometrischen Curve Transversalen zieht, die unter einander parallel sind, und auf jeder von ihnen den Mittelpunkt der mittlern Distanzen aller Punkte, in welchen sie die Curve trifft, nimmt, so liegen alle diese Mittelpunkte in einer geraden Linie.* Diese Gerade nennt man *den mit der Richtung der Transversalen correspondirenden oder conjugirten Durchmesser* der Curve.

Die zweite allgemeine Eigenschaft betrifft die Asymptoten und heisst: *Wenn eine Curve eben so viele Asymptoten hat, als Einheiten in dem Grad ihrer Gleichung enthalten sind, und man zieht in beliebiger Richtung eine Transversale, so wird der Mittelpunkt der mittlern Entfernungen der Punkte, in welchen diese die Asymptoten trifft, derselbe sein, als der der Punkte, in welchen sie die Curve trifft.* Oder in andern Worten: *Die Summe der Segmente, welche zwischen jedem Ast der Curve und der zugehörigen Asymptote begriffen sind, wird auf beiden Seiten des zur Transversale conjugirten Durchmessers dieselbe sein.*

Die dritte allgemeine Eigenschaft endlich bezieht sich auf das constante Verhältniss der Producte aus den Segmenten, welche auf zwei Transversalen, die respective zweien festen Axen parallel sind, gebildet werden. Der allgemeine Ausdruck hiervon ist folgender: *Wenn man durch irgend einen Punkt in der Ebene einer geometrischen Curve zwei Transversale parallel mit zwei festen Axen zieht, so stehen die Producte der Segmente, welche auf diesen beiden Geraden zwischen dem Punkt, durch welchen sie gezogen sind, und der Curve begriffen sind, unter ein-*

---

1) *Proprietates sectionum conicarum competunt curvis superiorum generum.*

ander in einem constanten Verhältniss, welches auch dieser Punkt sein mag.

Es ist leicht zu erkennen, dass diese drei schönen Eigenschaften, welche allen geometrischen Curven zukommen, eine Verallgemeinerung dreier Sätze aus der Theorie der Kegelschnitte waren.

§. 4. Der Hauptzweck seines Werks war für Newton die Aufzählung der Linien, welche in der Gleichung vom dritten Grad zwischen zwei Variabeln enthalten sind. Er erkannte darin 72 verschiedene Arten, zu denen Stirling noch 4 fügte.

In Folge dieser Aufzählung gab Newton folgenden ausgezeichneten neuen Satz, welcher diese Curven in fünf grosse Klassen vertheilt, nämlich: *dass ebenso wie der Kreis, wenn er einem leuchtenden Punkt vorgehalten wird, durch seinen Schatten alle Curven zweiten Grades giebt, auch fünf divergirende Parabeln durch ihren Schatten alle Curven des dritten Grades geben.*

Das Werk endigt mit der organischen Beschreibung der Kegelschnitte vermittelst zweier um ihre Scheitel beweglichen Winkel, von denen zwei Schenkel sich beständig auf einer Geraden schneiden, während die beiden andern durch ihren Durchschnittspunkt einen Kegelschnitt erzeugen. Diese Beschreibungsart ist auf Linien des dritten und vierten Grades, welche einen doppelten Punkt haben, ausgedehnt.

Es ist unangenehm, dass Newton sich begnügt hat, diese herrlichen Entdeckungen ohne Beweis, selbst ohne irgend eine Andeutung der von ihm befolgten Methode, anzuführen. Stirling verbesserte, einige Jahre darauf, diesen Fehler, indem er, zugleich mit den nothwendigen vorläufigen Entwickelungen, die Beweise derjenigen Sätze von Newton, welche sich auf die Aufzählung der Linien dritten Grades beziehen, wieder herstellte. Die übrigen Parthien dieses Werks wurden später von verschiedenen Geometern nachgewiesen. Das schöne Theorem über die Erzeugung aller Curven des dritten Grades durch den Schatten von fünf divergirenden Parabeln, welches als eines der schwierigsten erschien, wurde von Clairaut [2]), Nicole [3]), Murdoch [4]) und dem Pater Jacquier [5]) behan-

2) *Mémoires de l'Académie des sciences*, ann. 1731.

3) *Ibid.*

4) *Neutoni Genesis curvarum per umbras*; in 8. Lond. 1746.

5) *Elementi di perspettiva*; in 8. Rom 1755.

delt. Aber es scheint uns, dass die analytischen Betrachtungen, aus welchen diese Geometer die hinreichenden Beweise für die Wahrheit des Theorems von Newton geschöpft haben, nicht in die Natur und in die Grundidee desselben eingedrungen sind. Auch ein andres ähnliches Theorem, d. h. eine andre Art der Entstehung aller Curven dritten Grades durch den Schatten von fünfen unter ihnen, welches einen genauen Zusammenhang mit dem des Newton hat, ist den Geometern, welche über diesen Gegenstand geschrieben haben, entgangen. Dieses Theorem besteht darin, *dass es unter allen Curven des dritten Grades fünf giebt, welche einen Mittelpunkt haben* [6], *und dass diese fünf Curven durch ihre auf eine Ebene projecirten Schatten alle andern erzeugen.*

Dieses neue Theorem und das des Newton beruhen beide auf einer und derselben Eigenschaft der Einbiegungspunkte, von der es uns scheint, dass sie deren wahre Quelle sei und zu einer auf die Verschiedenheit der Gestalt gegründeten, rein geometrischen Classification der Curven dritten Grades dienlich sein könne. — Diese Eigenschaft selbst werden wir in der Note XX anführen.

Maclaurin, 1698 — 1746.

§. 5. Maclaurin, durch die vorzüglichen Entdeckungen Newton's angeregt, schrieb zwei Werke über die geometrischen Curven von hoher Wichtigkeit. In dem ersten, welches der organischen Beschreibung der geometrischen Curven [7] gewidmet ist, lehrt der Verfasser vermittelst des Durchschnitts zweier Schenkel von zwei beweglichen Winkeln, deren Bewegung passend bestimmt ist, alle geometrische Curven auf verschiedene Arten zu beschreiben. Seine Beweise, die durch Coordinaten-Methode geführt sind, bieten nicht immer einen genügenden Grad von Einfachheit dar; die zweite Schrift von Maclaurin dagegen unter dem Titel: *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus*, besitzt eine bewunderungswürdige Eleganz und Präcision.

Dieses ganze Werk beruht auf zwei Theoremen, welches die beiden allgemeinen Eigenschaften der geometri-

---

6) Es sind dieses in der Aufzählung der 72 Arten von Newton die fünf Curven, welche unter den Nummern 27, 38, 59, 62 und 72 aufgeführt und durch die Figuren 37, 47, 67, 70 und 81 dargestellt sind.

7) *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, in 4., 1719.

schen Curven sind. Das eine ist das des berühmten Cotes, welches sein Freund, der gelehrte Physiker R. Smith, in dessen Papieren fand und es Maclaurin mittheilte. Man kann es in folgender Weise aussprechen: *Wenn man um einen festen Punkt eine Transversale drehen lässt, welche eine geometrische Curve in so vielen Punkten A, B...., als sie Dimensionen hat, schneidet, und man auf dieser Transversale in jeder ihrer Lagen einen solchen Punkt annimmt, dass der inverse Werth seiner Distanz von dem festen Punkt das arithmetische Mittel aus den inversen Werthen der Distanzen zwischen den Punkten A, B... und dem festen Punkte ist, so wird der Punkt M zu seinem geometrischen Ort eine gerade Linie haben.*

Maclaurin nannte das Segment, welches zwischen dem festen Punkte und dem Punkte *M* liegt, das *harmonische Mittel* zwischen den Segmenten, die zwischen dem festen Punkte und der Curve liegen[8]), und Poncelet nannte den Punkt *M* den *Mittelpunkt der harmonischen Mittel A, B...* in Bezug auf den festen Punkt. [9]). Dieser Geometer hat auch gezeigt, dass, wenn der feste Punkt in der Unendlichkeit liegt, der Punkt *M* der Mittelpunkt der mittlern Entfernungen der andern Punkte *A, B...* werde, woraus man erkennt, dass das Theorem von Cotes eine Verallgemeinerung von dem Newton'schen Theorem über die *Durchmesser* der Curven ist.

Das zweite Theorem, dessen sich Maclaurin bedient hat und welches ihm angehört, ist folgendes:

Wenn man durch einen in der Ebene einer geometrischen Curve liegenden festen Punkt eine Transversale zieht, welche die Curve in so vielen Punkten trifft, als sie Dimensionen hat, darauf in diesen Punkten Tangenten an die Curve zieht, und endlich durch den festen Punkt eine zweite Gerade in willkührlicher Richtung, die aber unverändert bleibt, legt, so wird von den Segmenten, welche auf dieser Geraden zwischen dem festen Punkt und allen Tangenten der Curve liegen, die Summe ihrer inversen Werthe constant sein, welches auch die durch den festen Punkt gezogene erste Transversale sein mag; und zwar wird diese Summe gleich d e r *der inversen Werthe aller*

---

8) Maclaurin sagt, dass eine Quantität das *harmonische Mittel* zwischen mehren andern ist, wenn ihr inverser Werth das *arithmetische Mittel* zwischen den inversen Werthen dieser Quantitäten ist (*Traité de courbes géométriques*, §. 28).

9) *Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques*; Crelle Journal d. r. u. a. M. tom. III.

Segmente, die auf derselben unveränderlichen Geraden zwischen dem festen Punkt und den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Curve liegen.

§. 6. Dieses zweite Theorem ist eine wichtige Verallgemeinerung von dem des Newton über die Asymptoten. Beide gehen vermittelst der Perspective in einander über.

Zwei also von den drei Theoremen des Newton über geometrische Curven finden sich durch die des Cotes und Maclaurin verallgemeinert. Das dritte, welches sich auf Segmente, die auf parallelen Transversalen abgeschnitten werden, bezieht, hat eine ähnliche Verallgemeinerung in der *Géométrie de position* erhalten, wo die Transversalen als in festen Punkten zusammenlaufend angenommen sind. Carnot hat sogar noch eine ausgedehntere und fruchtbarere Verallgemeinerung dieses Theorems gegeben, indem er dasselbe als einen besondern Fall eines ganz allgemeinen Satzes betrachtet, der sich auf irgend ein Polygon, welches in der Ebene einer geometrischen Curve beschrieben ist, bezieht.

§. 7. In dem oben angeführten Theorem betrachtet Maclaurin den Fall, in welchem der feste Punkt, durch den die Transversalen gezogen werden, auf der Curve liegt, und transformirt mit Hülfe einer Eigenschaft des Kreises die das Theorem ausdrückende Gleichung in eine andre, in welche eine Chorde des Berührungskreises des festen Punkts der Curve eingeht. Hieraus folgert er zwei andre Theoreme, welche ihm zur Construction des Berührungskreises und zur Auffindung des Ausdrucks für das Differential des Krümmungshalbmessers dienen. Aber die *geometrische* Construction des Berührungskreises an der Figur selbst und ohne Hülfe des Fluxionscalculs, selbst ohne die Analysis des Descartes, in dem Werke von Maclaurin scheint unberücksichtigt geblieben zu sein, denn wir sehen nicht, dass jemals davon gesprochen wurde. Inzwischen glauben wir doch, dass sie angemerkt zu werden verdient, weil dieses Problem bis dahin durchaus die Anwendung der Analysis zu erfordern schien.

Maclaurin nimmt die Richtung der Normale in dem Punkt, für welchen er den Berührungskreis bestimmt, als bekannt an. Wir wundern uns, dass er nicht auch die Idee gehabt hat, rein geometrisch und ohne Rechnung diese Normale zu construiren; denn dieses Problem war von derselben Ordnung und leichter als das vom Berührungskreise. Wir haben für das eine wie für das andre eine einfache Construction gefunden, welche sich aus dem

dritten Theorem des Newton ableitet. Damals wussten wir nicht, dass der Berührungskreis schon construirt war, und ausserdem unterscheidet sich unsere Lösung wesentlich von der des Maclaurin, weil sie immer auf einer andern Eigenschaft der geometrischen Curven beruht.

§. 8. Die vier allgemeinen Theoreme, von denen wir gesprochen, bilden den Gegenstand der ersten Section im Werke des Maclaurin. In den beiden andern Sectionen sind die Anwendungen dieser vier Theoreme auf Kegelschnitte und auf die Curven des dritten Grades enthalten.

Die verschiedenen Eigenschaften der harmonischen Theilung der Secanten bei den Kegelschnitten und das Theorem von dem eingeschriebenen Viereck, welches die Theorie der Pole enthält (dasselbe, welches wir aus dem Sechseck des Pascal abgeleitet haben), finden sich in der zweiten Section. Das Theorem von dem Sechseck ist dort nur ausgesprochen, weil Maclaurin es schon an einem andern Ort auf verschiedene Arten bewiesen hatte.[10])

Die dritte Section enthält eine grosse Anzahl von vorzüglichen Eigenschaften der Curven dritten Grades. Die wichtigste, aus der sich ein grosser Theil der andern, die sich auf Einbiegungs- und doppelte Punkte beziehen, ableiten lassen, ist diese: *Wenn ein Viereck seine vier Scheitel und die beiden Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten auf einer Curve des dritten Grades hat, so schneiden sich die Tangenten, welche durch zwei gegenüberliegende Scheitel an die Curve gezogen werden, auf dieser Curve.*

Maclaurin hatte dieses Theorem, welches er in seinem *Treatise of fluxions* (art. 401) ausgesprochen hatte, schon bekannt gemacht, indem er bemerkte, dass das in Bezug auf ein den Kegelschnitten eingeschriebenes Viereck, von dem wir gesprochen haben, nur ein besondrer Fall desselben ist, was man leicht erkennt, wenn man den Kegelschnitt und die Gerade, welche die Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten des Vierecks verbindet, so betrachtet, als stellten sie eine Linie des dritten Grades dar.

Das Theorem des Pascal scheint auch als die Folgerung einer Eigenschaft der Curven dritten Grades, welche

---

10) *Philosophical-Transactions*, Nr. 439, Jahr 1735, und *Treatise of fluxions*, Nr. 322 und 623.

allgemeiner als die des Maclaurin ist, betrachtet werden zu können, und zwar spricht sich diese so aus:

Wenn ein Sechseck seine sechs Eckpunkte und zwei von den drei Durchschnittspunkten gegenüberliegender Seiten auf einer Curve dritten Grades hat, so liegt auch der dritte der Durchschnittspunkte auf dieser Curve. 11)

§. 9. Man hat noch von Maclaurin ein Fragment eines Memoirs über die Theorie der Curven, welches er 1721 in Frankreich als Supplement zu seiner *Geometria organica* geschrieben hat und dessen Druck auch angefangen worden, das aber nicht als besondres Werk herausgegeben ist. Im J. 1732 wurde dieses Fragment an die königl. Societät zu London geschickt und findet sich in den *Philosophical-Transactions* für's Jahr 1735. Man findet darin folgendes allgemeine Theorem, welches einen Hauptheil desselben ausmacht:

Wenn ein Polygon von veränderlicher Gestalt sich so bewegt, dass alle seine Seiten respective durch eben so viele gegebene feste Punkte gehen und dass alle seine Eckpunkte, mit Ausnahme Eines, geometrische Curven von den Graden m, n, p, q.... durchlaufen, so wird der freie Eckpunkt eine Curve beschreiben, welche im Allgemeinen vom Grade $2mnpq$... ist und welche sich auf den halb so hohen Grad $mnpq$... reducirt, wenn alle Punkte in gerader Linie liegen.

Wenn alle Leitlinien gerade Linien sind, so ist die durch den freien Eckpunkt des Polygons erzeugte Curve ein Kegelschnitt, und wenn das Polygon ein Dreieck ist, so ist das Theorem nichts Andres als das Sechseck des Pascal. Dieses Theorem war schon von Newton für den Fall gegeben, dass einer der drei Punkte, durch welche die drei Seiten des beweglichen Dreiecks gehen müssen, in der Unendlichkeit liegt (Lemma 20 im 1sten Buch der *Principia*). Aber dem Maclaurin verdankt man die allgemeine Aussprache desselben, und ihm gebührt die Ehre, in dieser Beschreibungsart der Kegelschnitte das schöne Theorem des Pascal wahrgenommen zu haben, welches

---

11) Um dieses Theorem zu beweisen, reicht es hin, die drei Seiten von ungerader Ordnungszahl im Sechseck als eine erste Linie dritten Grades und drei Seiten von gerader Ordnungszahl als eine zweite zu betrachten. Durch die neun Durchschnittspunkte dieser beiden Linien kann man unendlich viele Curven dritten Grades legen; die vorgelegte geht aber durch acht von diesen neun Punkten, und es folgt daraus, nach einer allgemeinen Eigenschaft der Curven dritten Grades, dass sie durch den neunten gehen wird.

damals noch unbekannt war; denn der *Essai sur les coniques*, welcher diesen Satz enthält, wurde erst 1779 durch die Bemühung des Abbé Bossut wiedergefunden.[12])

Später bewies Maclaurin dieses Theorem für den Kreis direct, woraus er es alsdann, vermittelst der Perspective, für jede Art der Kegelschnitte folgerte. (Siehe *Treatise of fluxions*, Cap. XIV, worin Maclaurin die Haupteigenschaften der Ellipse nachweist, indem er dieselbe als einen Schnitt eines schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis betrachtet.)

Braikenridge. §. 10. Braikenridge war in der Beschreibung der Curven aller Grade ein würdiger Nebenbuhler von Maclaurin, und die Theorie dieser Curven verdankt ihm mehre ausgezeichnete Fundamentalsätze, die sich besonders auf die Beschreibung derselben vermittelst des Durchschnitts von Geraden, die sich um feste Pole drehen, beziehen, wie er es aus einander gesetzt hat in dem Werke: *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum* (in 4., 1733), und in einem Memoire, welches in den *Philosophical-Transactions* vom Jahr 1735 steht.

Später haben noch mehre andre Geometer die Geometrie des Descartes mit Erfolg auf die allgemeine Theorie der geometrischen Curven angewandt.

Nicolas, 1683 — 1759. Stirling hat die von Newton in seiner *Enumeratio linearum tertii ordinis* nur angeführten Sätze nachgewiesen. Ihm ist Nicolas gefolgt, welcher auch eine Erklärung der Principien, die den grossen Geometer geleitet hatten, und den Beweis seines wichtigen und vortrefflichen, von Stirling aber unbewiesen gelassenen Satzes über die Beschreibung aller dieser Curven vermittelst des Schattens von fünf divergirenden Parabeln angefangen hat.[13])

Bragelogne, 1688 — 1744. Der Abbé von Bragelogne, welcher um 1708 zuerst die vorzüglichen Theoreme des Newton über die organische Beschreibung der

---

12) Es ist wahr, dass es möglich wäre, Maclaurin, der 1721 in Frankreich lebte, habe von dem Werke des Pascal Kenntniss gehabt; aber das Theorem vom Sechseck folgt so sehr natürlich aus der Beschreibung der Kegelschnitte durch ein bewegliches Dreieck, dass es wunderbar wäre, wenn es dem Scharfsinn des Maclaurin entgangen sein sollte, welcher über Alles, was die Beschreibung der Curven betrifft, so tief nachgedacht hat, wie er uns selbst sagt in einem Briefe, welchen er am 21. December 1732 an die königliche Societät zu London schickte (*Philos. Transact.* Jahr 1735).

13) *Mémoires de l'Académie des sciences*, Jahr 1721.

Kegelschnitte und der Curven dritten und vierten Grades, welche doppelte Punkte haben [14]), bewiesen hatte, unternahm die Aufzählung und Prüfung der Gestalt und der Eigenschaften der Curven vierten Grades. Eine immense und schwierige Arbeit, von der aber nur der Anfang bekannt gemacht ist, indem der Tod des Verfassers uns der Fortsetzung beraubt hat. [15])

De Gua, 1712 — 1786.

Der Abbé De Gua gab in seinem ausgezeichneten Werke: *Usages de l'analyse de Descartes* (in 12., 1740) die Mittel an, um die Tangenten, die Asymptoten und die ausgezeichneten Punkte (die vielfachen, die beigeordneten, die Einbiegungs- und die Rückkehr-Punkte) für Curven aller Grade zu bestimmen und zeigte zuerst, vermittelst der Perspective, dass mehre von diesen Punkten in der Unendlichkeit liegen können. Dieses gab ihm *a priori* die Erklärung einer besondern Analogie zwischen den verschiedenen Arten der Punkte und den verschiedenen Arten unendlicher Aeste, hyperbolischer und parabolischer, welche die Curven haben können: eine Analogie, zu welcher schon der Calcul geführt hatte.

Der Zweck, welchen sich dieser gewandte Geometer vorgesetzt hatte, war der, nachzuweisen, dass bei den meisten Untersuchungen, die sich auf geometrische Curven beziehen, die Analysis des Descartes mit eben so vielem Vortheil als die Differentialrechnung angewandt werden könnte. Er erkannte die Nützlichkeit der Infinitesimalrechnung nur an bei der Lösung der Probleme aus dem Integralcalcul und bei denen, die sich auf mechanische Curven beziehen. Diese sind auch in der That die einzigen, bei denen es unmöglich scheint, dieselbe zu vermeiden, und es sind auch die einzigen, welche Newton auf diesem Wege gelöst hat.

Euler. 1707 — 1783.

Euler setzte in seiner *Introductio in analysin infinitorum* (2 Thle in 4., 1748) die allgemeinen Principien der analytischen Theorie der geometrischen Curven mit jener Allgemeinheit und Klarheit, welche die Schriften dieses grossen Geometers characterisiren, aus einander; und indem er diese Art von

---

14) *Journal des Savans*, 30. Sptbr. 1708.

15) Der erste Theil dieser Aufzählung ist in die *Mémoires de l'Académie des sciences* der Jahre 1730 und 1731 eingerückt: der zweite ist nicht erschienen; die Analyse davon findet sich in der *Histoire de l'Académie* für 1732.

Untersuchung auf die Geometrie von drei Dimensionen ausdehnte, discutirte er zum ersten Mal die Gleichung mit drei Variabeln, welche die Oberflächen zweiter Ordnung enthält.

Cramer, 1704 — 1752. In derselben Zeit gab Cramer unter dem Titel: *Introduction a l'analyse de lignes courbes algébriques* (in 4., 1750), ein besonderes Werk heraus, welches das vollständigste und noch heute das am meisten geschätzte in diesem weiten und wichtigen Felde der Geometrie ist.

Dionis du Sejour, 1734 — 1794. *Goudin*, 1734 — 1805. Bald darauf erschien der *Traité des courbes algébriques* (in 12., 1756) von Dionis du Séjour und Goudin, worin sich mit Klarheit und Genauigkeit die Probleme über die Eigenschaften der Curven, über ihre Tangenten, Asymptoten, Krümmungshalbmesser u. s. w. nur mit Hülfe der Analysis des Descartes aufgelöst finden.

Man hat noch von Goudin einen *Traité des propriétés communes à toutes les courbes*, welcher zum Gegenstand hat, irgend eine Gleichung einer Curve in eine andre zu transformiren, die verschiedene Coordinaten hat. Es ist eine Reihe von Formeln mit drei und vier Variabeln, von denen jede eine verschiedene Eigenschaft der Curven im Allgemeinen ausdrückt. [16])

Waring, 1734 — 1798. Wir führen noch Waring an, welcher in mehren Schriften seine Entdeckungen in der Theorie der Curven weiter geführt hat, als seine Vorgänger. [17])

Dieses sind, so weit ich glaube, die letzten bemerkenswerthen Vervollkommnungen, welche der Wissenschaft der Curven durch die Geometrie der Alten und durch die Analysis des Descartes zu Theil geworden sind.

---

16) Man findet darin besonders 45 verschiedene Gleichungen der Ellipse, indem man theils den Mittelpunkt, theils den Brennpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt.

Dieses interessante Werk von Goudin hat drei Auflagen erlebt, von denen die letzte 1803 erschien; man hat zu dieser, wie zu den beiden früheren, ein Memoire über die Sonnenfinsternisse und einen kurzen Abriss von den algebraischen Curven gefügt; zu den beiden ersten ausserdem noch ein Memoire über den Gebrauch der Ellipse in der Trigonometrie.

17) Ausser mehren Memoiren, die in den *Philosophical-Transactions* von 1763 und 1791 stehen, hat Waring noch zwei Schriften über die geometrischen Curven herausgegeben: *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*, in 4., 1762, und *Proprietates geometricarum curvarum*, in 4., 1772.

§. 11. Die Fortschritte in den andern Theilen der Wissenschaft von den ausgedehnten Grössen während des Zeitraums, den wir eben durchgenommen haben, sind weniger markirt und weniger genügend, als die, welche sie in der allgemeinen Theorie der geometrischen Curven gemacht hat. Inzwischen wurden die Kegelschnitte noch immer behandelt und von Neuem Anstrengungen gemacht, um die alte Geometrie verständlich zu machen und den Geschmack daran wieder neu zu beleben; und dieses geschah durch Mathematiker von bedeutendem Namen, wie Halley, Stewart, Simson u. A. Hin und wieder wurden noch einige specielle Fragen durch die berühmten Analysten Euler, Lambert, Lagrange, Fuss u. A. in den kurzen Mussestunden, welche ihnen ihre Lieblings-Untersuchungen liessen, behandelt. Aber diese Arbeiten, welche zwar geeignet sind, die Bekanntschaft mit den alten Doctrinen aufrecht zu erhalten, scheinen uns nichts Neues geliefert zu haben. Die wahren Fortschritte der reinen Geometrie zeigen sich erst seit dem Anfange dieses Jahrhunderts.

Die Geometrie angewandt auf physische Phänomene.

Aber die Geometrie hat sich in der Epoche, welche uns beschäftigt, noch ein andres Recht auf unsre Bewunderung erworben, nämlich durch ihre Anwendungen auf physische Phänomene und durch die grossen Entdeckungen in dem Weltsysem, zu welchen sie Newton, Maclaurin, Stewart und Lambert geführt hat. In keiner Epoche hat diese *angewandte Geometrie* ein so lebhaftes Interesse erregt; aber unglücklicher Weise war es nicht von langer Dauer, und wir müssen gestehen, dass in unsrer Zeit diese Wissenschaft beinahe gar nicht gekannt ist. Der Infinitesimalcalcul hat sich ausschliesslich aller Untersuchungen bemächtigt, zu welchen jene von Newton und seinen Schülern gebraucht wurde.

Fortschritte der reinen Geometrie.

§. 12. Wir wollen zur theoretischen Geometrie zurückkehren und versuchen, durch eine Analyse der vorzüglichsten Werke von Geometern, welche sie entweder als besondre Wissenschaft angebaut oder sich derselben als eines Hülfsmittels bei dem Studium der physischen Phänomene der Natur und der Ausdehnung bedient haben, uns von den Untersuchungen, welche zum Fortschreiten dieser Wissenschaft haben beitragen können, Rechenschaft zu geben.

Halley, 1656 — 1742.

Der berühmte Astronom Halley, der sich durch vielseitige Bildung und genaue Bekannt-

schaft mit der Geometrie der griechischen Schule auszeichnete, erwarb sich durch seine treuen Uebersetzungen mehrer Hauptwerke der alten Geometer ein herrliches Denkmal. Man zeichnet besonders seine vortreffliche Ausgabe des Werks über die Kegelschnitte von Apollonius aus, worin das achte Buch, von dem der Text bis auf den heutigen Tag noch nicht wieder aufgefunden ist, mit grossem Talent restituirt enthalten ist. Angehängt sind die beiden Bücher von Serenus über die Schnitte des Kegels und Cylinders. Man verdankt auch Halley die Uebersetzung aus einem arabischen Manuscript von dem Werke *De sectione rationis*, welches bis dahin unbekannt war, und die Vermuthung über das Werk *De sectione spatii*, welches aus den Andeutungen des Pappus wieder hergestellt wurde.

Der Gegenstand beider Werke war, wie man sieht, durch einen Punkt ausserhalb zweier Geraden eine Transversale zu ziehen, welche auf diesen Geraden, von zwei festen Punkten ausgehend, zwei Segmente abschneidet, von denen im ersten Fall ihr Verhältniss und im zweiten Fall ihr Product gegeben ist.

Jede von diesen beiden Aufgaben lässt im Allgemeinen zwei Lösungen zu und führt also in der Analysis auf eine Gleichung vom zweiten Grade. Es ist interessant zu sehen, auf welche Weise Apollonius die erste durch eine mittlere Proportionale löst. Seine geometrischen Betrachtungen entsprechen der Operation, welche wir anwenden, um den zweiten Term aus einer quadratischen Gleichung fortzuschaffen.

Bei der Achtung, welche Newton vor der alten Geometrie hatte, zeichnete er besonders das Werk des Apollonius aus. „Mehr als ein Mal", sagt uns der gelehrte Pemberton [18]; „hab' ich ihn das Unternehmen des Hugo von Omérique, die alte Analysis wieder herzustellen, billigen und vielfach das Buch von Apollonius *De sectione rationis* rühmen hören, weil dieses Buch besser, als irgend ein andres aus dem Alterthum, die Natur dieser Analysis entwickele."

Die Uebersetzung des Halley ist noch mit mehren Scholien ausgestattet, welche in allgemeinen und sehr

---

18) *View of Sir Isaac Newton's philosophy*, in 4., 1728; ins Französische übersetzt 1755, unter dem Titel: *Elémens de la philosophie Newtonienne.*

eleganten Constructionen die grosse Anzahl von Fällen umfasst, welche diese Aufgabe zulässt und welche Apollonius ängstlich als eben so viele Formeln behandelt, welche der Geometer bei der Lösung von Aufgaben beständig zur Hand haben muss. In der einen dieser Scholien sieht man, dass der allgemeinste Fall sich darauf reducirt, durch einen gegebenen Punkt zwei Tangenten an eine durch die *Data* der Aufgabe hinlänglich bestimmte Parabel zu ziehen. Eine glückliche Bemerkung, welche eine leichte und klare Discussion der besondern Fälle dieses Problems gestattet und welche Halley zur Erkennung verschiedener Eigenschaften der Parabel in Bezug auf ihre Tangenten geführt hat, wie z. B. zu folgender: *Wenn ein Viereck einer Parabel umgeschrieben ist, so theilt jede Tangente an dieser Curve zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks in proportionale Theile.* Diese verschiedenen Sätze sind nur besondre Fälle von dem allgemeinen Satz, welchen wir die *anharmonische* Eigenschaft der Tangenten eines Kegelschnitts genannt haben. (Siehe Note XVI.)

Halley verstand kein Wort arabisch, als seine Liebe zur alten Geometrie ihn die Uebersetzung des Manuscripts *De sectione rationis* unternehmen liess. In der Vorrede erzählt er die Geschichte des Manuscripts, welches seit vielen Jahren in der *Bibliotheca Bodleiana* vergraben gewesen war. Er betrauert den Untergang so vieler andern Werke aus der griechischen Schule und bezweifelt nicht, dass uns viele wiedergegeben werden könnten, wenn man sich nur die Mühe geben wollte, sie aufzusuchen. Er richtet in dieser Hinsicht seine Bitte an alle Gelehrte, welchen der Zugang zu den Bibliotheken von Manuscripten gestattet ist. Wir hielten es für unsre Pflicht, das Urtheil und die Wünsche des berühmten Halley hier anzuführen, da diese einen wesentlichen Einfluss auf Männer haben müssen, welche aufgeklärt genug und im Stande sind, auf irgend eine Weise den mathematischen Wissenschaften einen Dienst zu erweisen.

Eine Ausgabe der *Sphaerica* des Menelaus, nach einem hebräischen Manuscript revidirt, wurde von Halley vorbereitet; sie kam aber erst 1758 auf Veranstaltung seines Freundes, des Doctors Costard, Verfassers einer Geschichte der Astronomie, heraus.

Halley verband mit einer tiefen Kenntniss der alten Geometrie eine genaue Einsicht in die Methode des Descartes. Er machte hiervon besondern Gebrauch, um die Construction der Gleichungen des dritten und vierten Gra-

des, vermittelst einer gegebenen Parabel und eines Kreises, zu vervollständigen.[19])

Seine Ausgaben von Apollonius, Serenus und Menelaus sind von den Liebhabern der Geometrie sehr gesucht[20]) und würden schon allein hinreichen, Halley einen ausgezeichneten Platz unter den Geometern zu sichern, wenn seine astronomischen Arbeiten ihn nicht an die Seite der berühmtesten Männer einer Epoche stellten, welche die Namen Dominicus Cassini, Huygens und Newton enthält.

§. 13. Obgleich Newton und Maclaurin, deren vorzügliche Untersuchungen über die geometrischen Curven wir bereits angeführt haben, nicht besonders über die Geometrie der Alten geschrieben haben, so schätzten sie doch diese Methode so hoch, dass sie sich derselben beinahe ausschliesslich in ihren physikalisch-mathematischen Untersuchungen bedienten. Wir müssen also noch aus dieser Rücksicht auf die Werke dieser beiden grossen Geometer eingehen.

Newton. Wir führen zuerst die *Arithmetica universalis* und das grosse Werk der *Principia* von Newton an.

Die *Arithmetica universalis*, ein unübertreffliches Muster für die Anwendung der Methode des Descartes auf die Auflösung von Problemen der Geometrie und auf die Construction von Wurzeln der Gleichungen, bietet eine Masse von verschiedenen Aufgaben dar, die sich auf alle Theile der Mathematik beziehen. Es wird aber dieses Werk in jetziger Zeit zu wenig gelesen, wahrscheinlich weil man vergisst, dass dieser berühmte Verfasser, der es seinen Vorlesungen an der Universität zu Cambridge zu Grunde legte, es dazu geeignet fand, seine Schüler dadurch in die Wissenschaft einzuführen.

§. 14. Das erste Buch der *Principia* enthält eine grosse Anzahl von Sätzen aus der reinen Geometrie. Man findet darin besonders die schönen Eigenschaften der Kegelschnitte und die Aufgaben über die Construction eines Kegelschnitts, welcher durch gewisse Punkte gehen und gewisse Gerade berühren oder einen seiner Brennpunkte in

---

19) *Philosophical-Transactions*, Jahr 1687, Nr. 188.

20) Alle seine Werke sind sehr selten, besonders das *De sectione rationis*, welches noch heute das einzige Buch ist, in welchem man nebst einer genauern Uebersetzung, als die des Commandinus ist, den griechischen Text der ganzen Vorrede zum 7ten Buch der *Collectiones mathematicae* von Pappus findet.

einem gegebenen Punkte haben soll. Diese damals zum grossen Theil noch neuen Untersuchungen waren die Vorbereitungen, welche aber Newton genügten, alle Phänomene des Himmels seinem Gravitationsgesetz zu unterwerfen und aus diesem einzigen Gesetz *a priori* die Erklärung und die Berechnung aller Bewegungen der Himmelskörper abzuleiten. Und es liegt die grösste Anerkennung, welche den Untersuchungen der alten Geometer über die Kegelschnitte zu Theil geworden ist, darin, dass Kepler aus ihnen die Entdeckung der wahren Gestalten der planetarischen Bahnen abgeleitet hat. Der geringe Gebrauch, welcher gegenwärtig von der Geometrie und von den zahlreichen Eigenschaften der Kegelschnitte, die zur Behandlung der grossen Fragen des Weltsystems nach Newton's Methode nöthig sind, gemacht wird, hat dazu beigetragen, dass man, unabhängig von den Vortheilen, welche der analytische Weg noch in andrer Hinsicht darbietet, diese erste Methode aufgegeben hat, weil man sie für weitläuftig und beschwerlich hielt und weil man sie so ansah, als wäre von ihr Nichts oder beinahe Nichts für die Zukunft zu erwarten. Diese Ansicht bewährte sich immer mehr, je mehr die Analysis, welche ausschliesslich cultivirt wurde, beständig Fortschritte machte, wodurch die ersten analytischen Methoden, die an die Stelle der Newton'schen gesetzt waren, vereinfacht und vervollkommnet wurden; wogegen diese, weil man sich gar nicht mehr mit ihr beschäftigte, in demselben Zustande blieb, in welchem sie aus den Händen ihres berühmten Urhebers hervorging. Man denkt aber nicht daran, wenn man sie mit der andern zusammenstellt, diese bei ihrer Entstehung zu betrachten und die ersten Werke der Analysten, welche die schönen Resultate Newton's in eine anfänglich beschwerliche und unelegante Analysis verwandelten, anzuführen, sondern man nimmt sie, wie sie seitdem durch die anhaltenden Bemühungen der berühmtesten Geometer vervollkommnet ist. Warum bringt man aber die Vervollkommnungen, welche die geometrische Methode, die so oft anschaulich werden kann, erfahren hätte, wenn sie nicht gänzlich verlassen wäre, nicht wenigstens mit in Rechnung?

Eine sorgfältige Prüfung der verschiedenen Sätze der reinen Geometrie, von denen Newton in seinen *Principiis* Gebrauch gemacht hat, wird eine Idee von dem geben, was diese Vervollkommnungen hätten sein können. Man erkennt in der That, dass diese verschiedenen Sätze, welche unter einander verschieden zu sein scheinen und

von denen jeder seinen besondern Beweis hat, sich dennoch alle auf zwei oder drei Haupteigenschaften der Kegelschnitte, von denen sie nur besondre Fälle oder leichte Folgerungen sind, zurückführen lassen. Gegenwärtig würde ein neuer Commentar über die *Principia* von Newton, in dem Sinne und in der Form der modernen Geometrie geschrieben, die Lectüre dieses unsterblichen Werks ausserordentlich abkürzen und erleichtern.

§. 15. Wir wollen jetzt sehen, wie die Sätze von Newton aus nur zwei oder drei der allgemeinsten Sätze über Kegelschnitte abgeleitet werden können.

In den Sätzen 19, 20 und 21 sind alle Probleme über die Construction eines Kegelschnitts, von dem ein Brennpunkt gegeben ist und welcher Gerade berühren und durch bestimmte Punkte gehen soll, aufgelöst. Aber die Auflösungen aller dieser Aufgaben leiten sich heute unmittelbar aus den analogen Aufgaben über den Kreis, der drei Bedingungen unterworfen ist, ab; entweder durch die Theorie der homologischen Figuren, wie es Poncelet gezeigt hat, oder durch die polaren Transformationen, wie wir es gethan haben. (*Annales de mathématiques*, tom. XVIII.)

Die Lehnsätze 17, 18 und 19 sind die Eigenschaft des den Kegelschnitten eingeschriebenen Vierecks oder das Theorem *ad quatuor lineas* der Alten. Wir haben gezeigt, dass dieses Theorem sich aus dem Satze, welchen wir die *anharmonische Eigenschaft* der Punkte eines Kegelschnitts genannt haben, mit ausserordentlicher Leichtigkeit ableiten lässt; und zwar zeigt sich dies auf sehr anschauliche Weise, ohne dass man genöthigt ist, von irgend einer Eigenschaft der Kegelschnitte Gebrauch zu machen. (S. Note XV.)

Dio Lehnsätze 20 und 22 beziehen sich auf die Erzeugung der Kegelschnitte durch den Durchschnitt zweier Geraden, welche sich um zwei feste Pole drehen.

In dem ersten gehen die beiden beweglichen Geraden respective nach Punkten, in welchen Transversale, die unter einander parallel sind, zwei feste Gerade treffen. Dieses ist das Theorem, welches wir bei Gelegenheit der Kegelschnitte von De Witt ausgesprochen und von dem wir einen besondern Fall, als in einem Werke von Cavalleri enthalten, angeführt haben.

Wenn die Transversalen, statt parallel zu sein, in einem Punkt zusammenkommen, so hat man in seiner vollen Allgemeinheit das Theorem von Maclaurin und Braikenridge, von dem wir gesagt haben, das es das Theo-

rem über das Sechseck von Pascal, nur in andern Worten sei, und welches sich, wie wir gezeigt haben (in derselben Note), aus der anharmonischen Eigenschaft der Punkte eines Kegelschnitts ableitet.

In dem zweiten Lehnsatz sind die beiden beweglichen Geraden zwei Schenkel zweier Winkel von constanter Grösse, deren beide andre Schenkel sich auf einer festen Geraden schneiden. Es ist dieses die organische Beschreibung der Kegelschnitte, welche von Newton in seiner *Enumeratio linearum tertii ordinis* und in seiner *Arithmetica universalis* reproducirt worden ist. Wir haben gezeigt (in derselben Note), dass diese Art der Beschreibung, für welche die gegebenen Beweise zu lang waren, sich mit eben so grosser Leichtigkeit, als die vorige, aus derselben anharmonischen Eigenschaft ableitet.

Die Lehnsätze 23, 24 und 25 und ihre Corollare sind besondre Fälle der allgemeinen Eigenschaft des um einen Kegelschnitt umgeschriebenen Vierecks, welche analog der des eingeschriebenen Vierecks ist und welche wir die *anharmonische Eigenschaft der Tangenten* eines Kegelschnitts genannt haben. (S. Note XVI.) Das dritte Corollar zum 25sten Lehnsatz zeigt folgenden Satz, der seitdem auf viele Arten bewiesen ist: *in jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Viereck geht die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Diagonalen verbindet, durch das Centrum der Curve.*

Viele andre Sätze sind Probleme über die Beschreibung von Kegelschnitten, welche fünf Bedingungen, durch Punkte zu gehen und Gerade zu berühren, unterworfen sind. Alle diese Aufgaben lösen sich heute, wie man weiss, mit grosser Leichtigkeit.

Der 22ste Lehnsatz dient zur Umwandlung von Figuren in andre derselben Gattung. In den folgenden Sätzen bedient sich Newton desselben, um zusammenlaufende Linien in parallele Linien zu transformiren und die Auflösung einiger Probleme zu erleichtern. Wir haben von dieser Methode in unsrer dritten Epoche gesprochen, und wir haben gezeigt, dass sie nichts Anderes ist, als eine Anwendung der Perspective. Diese Bemerkung scheint dazu geeignet, das Verständniss zu erleichtern.

§. 16. In allen diesen vorbereitenden Sätzen und deren Corollarien hat Newton seine Untersuchungen auf das beschränkt, was ihm für seinen grossen Zweck unumgänglich nothwendig war. Aber man sieht aus der Natur dieser Sätze, dass, wenn er die Erweiterung und Ver-

vollständigung der Theorie der Kegelschnitte beabsichtigt hätte, er durch eine natürliche Verallgemeinerung seiner ersten Resultate leicht zu den allgemeinsten Eigenschaften dieser Curven geführt worden wäre. Eben so wenig würde ihm entgangen sein, dass seine Methode für die Transformation der Figuren sich ganz einfach auf Figuren von drei Dimensionen anwenden lasse, und wir wüssten bereits seit beinahe anderthalb Jahrhunderten das, was erst in der neuesten Zeit geleistet ist, z. B. die Kugel in irgend eine Oberfläche der zweiten Ordnung zu transformiren, so wie man, seit Desargues und Pascal, den Kreis in einen Kegelschnitt transformirt, um die Eigenschaften dieser Curve zu entdecken und zu beweisen. Alle diese Entdeckungen stimmten zwar nicht mit dem Zwecke Newton's überein, aber sie durften nicht den Geometern entgehen, welche den rein geometrischen Theil der *Principia* zum Gegenstand ihrer Meditationen machten. Und dieser Umstand beweist, wie wenig seit jener Zeit die geometrischen Doctrinen cultivirt worden sind.

§. 17. In dem Werke von Newton findet sich zum ersten Male die Rectification der Epicycloiden. Es war noch Nichts über diese berühmten Curven geschrieben worden, obgleich es nach einem Bericht von Leibnitz scheint, dass Roemer sie schon 10 Jahre zuvor erdacht hatte und nach De La Hire die erste Entdeckung dieser Curven und ihre Anwendung bei der Verfertigung gezähnter Räder bis auf Desargues zurückgeht, dessen Genie, welches heute mehr anerkannt wird, für eine so bedeutende und nützliche Erfindung gross genug war. Einige Jahre nach dem Erscheinen des Werkes von Newton gab De La Hire seinen *Traité géométrique des épicycloides* heraus.

§. 18. Wir führen noch aus den *Principiis* die berühmten *Ovalen* an, welche von Descartes erdacht waren, um vermittelst der Refraction Lichtstrahlen, die von einem Punkte ausgehen, in einem einzigen andern Punkte zu vereinigen, wie es die Ellipse und Hyperbel bei Lichtstrahlen, die unter einander parallel sind, thun.[21]) Newton zeigt auf eine sehr einfache Art, dass diese Curven der geometrische Ort eines Punktes sind, dessen Entfer-

---

21) Diese Eigenschaft der Kegelschnitte, welche auf einer Relation zwischen dem Brennpunkt und der Directrix beruht, ist auch von Descartes abzuleiten, welcher sie in seiner Dioptrik bewiesen hat.

nungen von zwei Kreisumfängen in einem constanten Verhältniss unter einander stehen. Dasselbe zeigt auch die von Descartes gegebene geometrische Construction dieser Curven und stimmt auch mit dem überein, was Huygens unmittelbar und ohne Beweis aus seinem Undulationssystem in seinem *Tractatus de lumine* geschlossen hat.

Wir wollen hier noch eine Bemerkung in Bezug auf die Geometrie von Descartes beifügen, für welche wir früher keine passende Stelle gefunden haben: dass nämlich die geometrische Construction seiner Ovalen, die für die specielle Anwendung, die dieser berühmte Philosoph davon in der Dioptrik machte, hinreichend war, dass sie aber nicht geeignet war, uns mit diesen Curven vollständig bekannt zu machen. Auch Roberval, welcher kurze Zeit darauf ebenfalls die Construction dieser Ovalen gegeben und ihre Formen discutirt hat, so wie Huygens und Newton haben, vom geometrischen Gesichtspunkte aus betrachtet, keine vollständige Kenntniss derselben gehabt. Denn in der That ist eine dieser Ovalen nicht für sich allein der Ort, welcher durch die von Newton bewiesene Eigenschaft oder durch die von Descartes aufgefundene Gleichung vom vierten Grade ausgedrückt wird, sondern dieser Ort muss immer zwei *conjugirte* Ovalen zugleich darstellen, die beide in ihrem analytischen Ausdruck von einander unzertrennlich sind. Diese Bemerkung ist dem Descartes in seiner Geometrie, wie in seiner Dioptrik und eben so den andern genannten berühmten Geometern entgangen. Sie konnte zwar in der Dioptrik ausgelassen werden, durfte aber, wie es mir scheint, nicht in der Geometrie fehlen. Es ist eine natürliche Folge von dieser Auslassung, dass die eine von den Formen der in Rede stehenden Curven der Analysis des Descartes entgangen ist; dieses ist der Fall, wo die beiden conjugirten Ovalen einen gemeinschaftlichen Punkt haben und nur eine einzige Curve mit einem doppelten Punkte bilden. Man findet, dass diese Curve diejenige ist, welche man die *limaçon* (Schnecke) des Pascal genannt hat. Hieraus folgt, dass diese merkwürdige Curve, welche, wie man weiss, zugleich eine Epicycloide und eine Conchoide des Kreises ist, sich noch dieser andern bisher nicht gekannten Eigenschaft erfreut, dass sie, wie die Ovalen des Descartes, *zwei Brennpunkte* hat.

In letzterer Zeit erschienen diese Ovalen wieder in der Geometrie. Der berühmte Astronom J. Herschel nannte sie *aplanetische Linien* (Linien ohne Aberration) wegen ihres Gebrauchs in der Optik. Quetelet entdeckte an ihnen

ganz ausgezeichnete und wunderbare Eigenschaften, welche wir in der XXIsten Note anführen werden.

Maclaurin. §. 19. Maclaurin theilte die Neigung Newton's für die reine Geometrie und verstand auch mit der grössten Gewandtheit dieselbe auf philosophische Untersuchungen anzuwenden. Indem er durch seinen *Treatise of fluxions* das verknüpfende Band zwischen der Methode des Archimedes und der des Newton bildete, wollte er die letztere in der ganzen Strenge der griechischen Schule beweisen, und führte deshalb eine Menge von synthetischen Beweisen für verschiedene Sätze der Mechanik und der höhern Geometrie an, für welche die Analysis weder leichtere noch schneller zum Ziele führende hat. Jedermann weiss, mit welcher Eleganz und Leichtigkeit er auf diesem Wege die wichtige Frage über die Figur der Erde löste, was allein schon hinreichend gewesen wäre, seinen Namen unsterblich zu machen. Denn man muss dabei die Anziehung eines Revolutions-Ellipsoids auf Punkte, die auf seiner Oberfläche liegen, kennen; während Maclaurin aus einigen Eigenschaften der Kegelschnitte alle die Hülfsmittel herzuleiten wusste, welche zur Auflösung dieser Aufgabe, die von den berühmtesten Geometern aller Zeiten als eine der schwierigsten betrachtet wurde, dienlich waren. — Besser, als wir es ausdrücken könnten, wird das Urtheil Lagrange's über diesen Gegenstand das Verdienst der Arbeit und der Methode Maclaurin's erkennen lassen. Nachdem er gesagt hat, dass es Untersuchungen giebt, bei welchen die geometrische Methode der Alten Vorzüge vor der Analysis hat, fügt er hinzu: „Ein Problem von dieser Art ist die Bestimmung der Anziehung, welche ein elliptisches Sphäroid auf irgend einen Punkt ausübt, der auf seiner Oberfläche oder in seinem Innern liegt. Maclaurin, welcher (in seiner ausgezeichneten Abhandlung über Ebbe und Fluth, die 1740 von der Akademie der Wissenschaften zu Paris gekrönt wurde) dieses Problem zuerst löste, hat eine rein geometrische Methode befolgt und sich nur auf einige Eigenschaften der Ellipse und der elliptischen Sphäroide gestützt; und man muss gestehen, dass diese Parthie im Werke von Maclaurin ein Meisterstück von Geometrie ist, welches man Allem an die Seite setzen kann, was uns Archimedes Ausgezeichnetes und Geistreiches hinterlassen hat. Da Maclaurin eine Art von Vorliebe für die Methode der Alten hatte, so ist es nicht zu verwundern, dass er sie bei der Lösung des genannten Problems anwandte; aber es ist, wie es mir scheint, ausserordentlich, dass

ein so wichtiges Problem, wie das vorliegende, seitdem noch nicht auf directe und analytische Art gelöst ist, besonders in neuerer Zeit, wo die Analysis so sehr allgemein in Gebrauch gekommen ist. Man kann den Grund davon nur in der Schwierigkeit der Rechnung suchen, welche die Lösung dieser Aufgabe darbieten muss, wenn man sie unter einem rein analytischen Gesichtspunkt betrachtet....... Ich habe mir vorgesetzt, in diesem Memoire zu zeigen, dass das vorliegende Problem, weit davon entfernt, sich der Analysis zu entziehen, sich vermittelst derselben, wenn auch nicht auf einfachere, so doch auf eine directere und allgemeinere Art, als auf dem Wege der Synthesis, auflösen lasse" u. s. w. [22])

Diese grössere Allgemeinheit besteht darin, die Anziehung für ein Ellipsoid mit drei *ungleichen* Axen zu berechnen, statt ein Revolutions-Ellipsoid zu wählen, wie Maclaurin gethan hat. Aber schon D'Alembert hattte sich diese Erweiterung vorgesetzt und war dazu durch rein geometrische Betrachtungen gelangt, indem er Schritt für Schritt dem Wege Maclaurins folgte. [23])

§. 20. Noch ein andrer Theil in der Arbeit von Maclaurin, von dem Lagrange in dem angeführten ersten Memoire nicht spricht, sichert der geometrischen Methode einen wesentlichen Vorzug vor der Analysis. Es war das berühmte Theorem über Ellipsoide, deren Hauptschnitte dieselben Brennpunkte haben, und besteht darin, dass die Attractionen zweier solchen Ellipsoide auf einen Punkt,

---

22) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, Jahr 1773.

23) *Opuscules mathématiques*, T. VI. S. 165; Jahr 1773.

Bevor wir wussten, dass D'Alembert, den Weg Maclaurin's verfolgend, durch reine Betrachtungen der Geometrie zu einer einfachen Integral-Formel gekommen war, welche die Anziehung eines Ellipsoids mit drei ungleichen Axen auf einen Punkt in dessen Oberfläche oder in dessen Innern ausdrückt, hatten wir der Theorie des Maclaurin dieselbe Erweiterung zu geben versucht; und, indem wir die von Lagrange angewandte Manier der Zerlegung eines Körpers in konische Elemente annahmen, waren wir, durch die Geometrie allein, zu derselben Formel für die Quadratur gekommen, welche man in der Analysis erhält. Unser Verfahren besteht darin, die erste Integration, welche man in der analytischen Lösung ausführen muss, durch geometriche Betrachtung zu ersetzen; und zwar lässt sich dies machen, wenn man bemerkt, dass diese Integration der Berechnung der Fläche einer Ellipse entspricht, welche man erhält, wenn man auf eine der drei Hauptebenen des Ellipsoids den Durchschnitt dieses Ellipsoids mit einem Kegel, der durch Umdrehung um eine auf dieser Hauptebene senkrechte Axe entsteht und mit dem Ellipsoid dasselbe Centrum hat, projecirt.

der ausserhalb ihrer Oberfläche liegt, in derselben Richtung wirken und den Massen beider Körper proportional sind. Maclaurin hat nur einen speciellen und zwar den einfachsten Fall dieses schönen Theorems bewiesen, nämlich den, wenn der angezogene Punkt auf einer der Hauptaxen der beiden Ellipsoide liegt (Art. 653 seines *Treatise of fluxions*). Aber selbst dieser besondre Fall bot D'Alembert bei der Anwendung der Analysis so grosse Schwierigkeiten dar, dass er zu der Annahme kam, das Theorem von Maclaurin sei falsch [24]), und dass Lagrange, welcher es einige Zeit darauf bewies, sich bei dem Beweise dieses besondern Falles begnügte. [25]) D'Alembert gab auch, um seinen Fehler zu verbessern, drei Beweise davon, aber, wie Lagrange, ohne über Maclaurin hinaus zu gehen. [26]) Legendre ging, bald hernach, einen Schritt weiter, indem er dieses Theorem für den Fall nachwies, dass der angezogene Punkt in einer der Hauptebenen des Ellipsoids liegt. Auch war er es, der die Allgemeinheit desselben vermuthete [27]) und sie in der That einige Jahre nachher in einem Memoire bewies. Dieses Memoire muss man als Muster der Ueberwindung von Schwierigkeiten ansehen; denn es ist eine wahrhaft schöne und tiefsinnige Arbeit, welche noch reicher an interessanten Resultaten sein würde, wenn Legendre die geometrische Bedeutung der zahlreichen, zum Beweise des vorliegenden Theorems nothwendigen Formeln gegeben hätte. [28])

Seitdem hat man noch verschiedene andre Beweise des Theorems von Legendre gefunden, von denen wir noch einen hier anführen müssen, da er sich auf synthetische Methode stützt. Er leitet sich aus dem schönen Theorem von Ivory ab, durch welches man die Berechnung der Anziehung auf äussere Punkte auf die der Anziehung der innern Punkte des Ellipsoids zurückführt. Die verschiedenen Beweise, welche man davon gegeben hat, sind wenig von dem eigenen Beweise des Erfinders verschieden, zu dem nur noch einige Transformationen analytischer Formeln kommen. Es wäre vielleicht, um dieses Theorem in die geometriche Theorie von der Anziehung der Ellipsoide, wohin es seiner Natur nach ge-

---

24) *Opuscules mathématiques*, tom. VI, p. 242.
25) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, Jahr 1774 und 1775.
26) *Opuscules mathématiques*, tom. VII, p. 102, Jahr 1780.
27) *Mémoires des savans étrangers*, tom. X.
28) *Mémoires de l'Académie des sciences*, Jahr 1788.

hört, einzuführen, zu wünschen, dass man einen mehr synthetischen, d. h. von analytischen Formeln ganz unabhängigen Beweis erhielte.

Die Frage über die Attraction der Ellipsoide ist in Bezug auf den Calcul gegenwärtig so vollständig gelöst, als es die Grenzen der Analysis gestatten; sie ist nämlich auf eine Formel der elliptischen Quadraturen zurückgeführt, welche man nicht endlich integriren kann. Aber diese wichtige Frage, von andern Gesichtspunkten aus betrachtet, wird gewiss noch zu vielen Untersuchungen und zu schönen Entdeckungen Gelegenheit geben.[29]) Die neuesten Arbeiten der beiden berühmten Analysten von Frankreich und Königsberg, Poisson und Jacobi, liefern den Beweiss, dass noch viel zu thun übrig ist, und werden gewiss neue Betrachtungen über diese so interessante Materie hervorrufen.

§. 21. Das Problem von der Attraction der Ellipsoide, unabhängig von seiner Anwendung auf mehre Fragen der Naturphilosophie betrachtet, gehört der Geometrie an, und

---

29) Obgleich man z. B. nicht absolut, weder der Grösse noch der Richtung nach, die Anziehung eines Ellipsoids auf verschiedene Punkte bestimmen kann: könnte man nicht gewisse Verhältnisse zwischen diesen Anziehungen und zwischen ihren Richtungen finden?

Aber ohne neue Fragen zu ersinnen, die sich in Menge darbieten möchten, so giebt es darunter eine, die sich, wie ich glaube, von selbst darbietet, und mit der sich noch kein Geometer, der über diesen Gegenstand schrieb, beschäftigt zu haben scheint. Man weiss, dass die Formel, von der die Anziehung eines ausserhalb liegenden Punktes abhängt, einen Coefficienten enthält, welcher nicht *a priori* bekannt ist, sondern welcher durch eine Gleichung des dritten Grades bestimmt wird. Die geometrische Bedeutung dieses Coefficienten ist bekannt: er ist eine von den Hauptaxen des Ellipsoids, das durch den angezogenen Punkt geht und dessen Hauptschnitte dieselben Brennpunkte mit denen des anziehenden Ellipsoids hat. Aber diese Gleichung vom dritten Grad ist ein Ergebniss der Rechnung, welches man aus der Natur der Aufgabe nicht *a priori* vorhersehen konnte, und welches noch nicht erklärt ist. Es wird dadurch angedeutet, dass das Problem von der Anziehung sich aus einer andern allgemeinern Aufgabe herleitet, welche im Allgemeinen drei Lösungen zulässt. Bei zweien von diesen Auflösungen werden die beiden Hyperboloiden mit einem und mit zwei Fächern, welche man durch den angezogenen Punkt so legen kann, dass ihre Hauptschnitte dieselben Brennpunkte, als die des gegebenen Ellipsoids haben, dieselbe Function bilden, welche das durch diesen Punkt gehende Ellipsoid in Bezug auf die erste Lösung bildet.

Es ist nicht selten, dass man auf ähnliche Ergebnisse der Analysis stösst; aber es ist immer interessant, den Ursprung und die Bedeutung davon zu erkennen. Nur dann erst, wenn dieses geschehen ist, kann man die Aufgabe als vollständig gelöst betrachten.

die Lösung, welche Maclaurin davon gegeben hat, ist vorzüglich dazu geeignet, die Liebe und Theilnahme für diese reine und intuitive Geometrie wieder neu zu beleben, nachdem sie beinahe ein Jahrhundert hindurch unberücksichtigt geblieben ist. Wir hoffen, dass man, aus Rücksicht hierauf, uns verzeihen wird, wenn wir bei diesem Gegenstand in einige Details eingegangen sind, welche uns von dem Wege, den wir bei der Prüfung der geometrischen Arbeiten von Maclaurin zu verfolgen hatten, abgeleitet haben. Wir lenken wieder dadurch in diesen Weg ein, dass wir diejenigen Eigenschaften der Kegelschnitte anführen, welche dieser Geometer bei seiner Lösung zu Grunde gelegt hat.

Eine einzige Eigenschaft reicht zur Berechnung der Attraction auf Punkte hin, welche auf der Oberfläche oder im Innern des Ellipsoids liegen, nämlich:

Wenn zwei ähnliche und ähnlich liegende concentrische Ellipsen gegeben sind und man zieht durch den Scheitel der kleinern von ihnen die Tangente, welche die andre in zwei Punkten schneidet; wenn man ferner durch einen dieser Punkte in der zweiten Ellipse zwei beliebige Sehnen zieht, die aber gegen die genannte Tangente gleich geneigt sind; und wenn man endlich durch den Scheitel der ersten Ellipse in dieser zwei Sehnen zieht, welche denen in der andern Ellipse parallel sind: so ist die Summe dieser beiden letztern Sehnen gleich der der beiden andern.

Maclaurin beweist dieses Theorem am Kreise durch die elementare Geometrie, und projecirt hernach die beiden Ellipsen auf eine Ebene, die mit der genannten Tangente parallel und so gewählt ist, dass die Ellipsen in der Projection Kreise werden; woraus dann das genannte Theorem folgt.

§. 22. Die Berechnung der Attraction auf Punkte, welche ausserhalb des Ellipsoids liegen, ist nicht eben so leicht. Maclaurin wendet zu diesem Ende folgende beide Theoreme an, von denen er nur das erste aussprach, wäh-

30) Dieses ist das einzige Theorem, dessen sich Maclaurin zum Beweise folgendes, von Newton ohne Beweis angenommenen Satzes bedient: *Eine homogene flüssige Masse, die sich um sich selbst dreht, muss die Gestalt eines Revolutions-Ellipsoids annehmen, wenn man voraussetzt, dass die Anziehungskraft im umgekehrten Verhältniss der Entfernungen steht.* Und dieser Weg schien Clairaut so vorzüglich, dass er in seiner *Theorie der Figur der Erde* seine analytische Methode verliess und der des Maclaurin folgte.

rend man das zweite im Verlaufe des Beweises dieses ersten wahrnimmt.

1) *Wenn zwei Ellipsen um dieselben Brennpunkte beschrieben sind und man durch einen Punkt auf einer ihrer Hauptaxen zwei Transversalen so zieht, dass die Cosinus der Winkel, welche sie mit der andern Axe bilden, respective den in der Richtung dieser Axe liegenden Durchmessern der beiden Kegelschnitte proportional sind, so werden die Theile der beiden Transversalen, welche zwischen den beiden Curven liegen, den Durchmessern, die in der Richtung ihrer ersten Axen liegen, proportional sein.*

2) *Wenn zwei Ellipsen um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, und man zieht zwei Durchmesser, die von zwei correspondirenden Punkten der beiden Curven ausgehen, so wird die Differenz der Quadrate dieser constant sein.*

Wir nennen *correspondirende* Punkte solche, deren Entfernungen von jeder der Hauptaxen proportional sind *den* Durchmessern der beiden Ellipsen, die respective senkrecht auf diesen Axen stehen.

Der erste dieser Sätze ist für Maclaurin hinreichend, um zu beweisen, dass die Anziehungskräfte, welche zwei Drehungs-Ellipsoide, die um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, auf einen in der Verlängerung der Drehungsaxe liegenden Punkt ausüben, sich wie die Massen der beiden Körper verhalten. Hieraus folgert er, mit Hülfe des zweiten Satzes, dass dieses Theorem auch in Bezug auf Punkte stattfindet, die in der Aequator-Ebene der beiden Sphäroide ausserhalb ihrer Oberflächen liegen. Sodann bemerkt er, dass sein Beweis dieses zweiten Theorems sich auf Ellipsoide mit drei ungleichen Axen, deren Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, anwenden lasse, wenn der angezogene Punkt in der Verlängerung einer ihrer Axen liegt; woraus das berühmte Theorem folgt, von dem wir gesprochen haben.

D'Alembert und später Lagrange und Legendre glaubten, dass Maclaurin sein Theorem nur ausgesprochen habe, ohne einen Beweis dafür zu geben; das ist aber ein Irrthum von Seiten dieser drei berühmten Geometer; denn dieser Beweis ist identisch derselbe, als der für den nächstvorhergehenden Fall, und der Verfasser musste also, wie er es gethan hat, sich mit diesen einfachen Worten begnügen: *man beweist es auf dieselbe Art* u. s. w., und durfte nicht dasselbe Raisonnement wiederholen, welches er einige Zeilen zuvor angestellt hatte und in welchem er

kein Wort zu verändern oder hinzuzufügen oder wegzulassen hate.[31])

§. 23. Die vorhin genannten beiden Eigenschaften von Ellipsen, die um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, verdankt man Maclaurin. Wahrscheinlich sind es die ersten, welche man über biconfocale Kegelschnitte gegeben hat, so wie sein Theorem über die Attraction von Ellipsoiden, deren Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrie-

---

31) Der erwähnte Irrthum der drei grossen Geometer ist vielleicht noch gar nicht bemerkt worden, obgleich man sich seitdem so vielfältig mit der Frage über die Attraction der Ellipsoide beschäftigt hat. Ich habe ihn hier nur angemerkt, weil wir darin den offenbaren Beweis sehen, wie gänzlich die Geometrie in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts vernachlässigt ist und mit wie wenigem Rechte man sie der Ohnmacht beschuldigt, da man sie nicht nur nicht einer neuen Prüfung unterworfen, sondern nicht einmal die Natur und den Geist der schönen Methoden, durch die Newton und Maclaurin zu ihren grossen Entdeckungen geführt sind, gründlich untersucht hat. Man hat im Gegentheil vorgezogen, nachdem man diese Methoden in die Analysis übersetzt hat, für diese die Ehre der grossen Werke Newton's in Anspruch zu nehmen, welche dieser Philosoph hernach erst in die geometrische Form eingekleidet hatte. Eine höchst willkührliche Annahme, welche beweist, wie man den Character der Fruchtbarkeit der Geometrie und die ausserordentliche Leichtigkeit ihrer natürlichen und oft selbst anschaulichen Deductionen bei Untersuchungen, in welche sie vor Allem hingehört, verkennt. Aber ohne auf eine Erörterung über die Natur und die Mittel dieser Methode näher einzugehen, was ein geschickter Vertheidiger derselben verlangen müsste, mag es genügen daran zu erinnern, dass man, um der analytischen Methode die Entdeckungen Newton's zuzuschreiben, zu der Annahme verpflichtet ist: dieser Geometer habe schon von der *Variationsrechnung* Gebrauch gemacht, deren Erfindung man erst Lagrange verdankt. Ist es möglich anzunehmen, dass Newton, mit seinem so scharf überlegenden Geist und mit seinem so sichern und weit reichenden Blick, so sehr den Character und die unendliche Wichtigkeit einer solchen Entdeckung verkannt haben sollte, dass er sie mit Stillschweigen übergangen und späterhin es verschmäht, sich derselben in seinem wichtigen und lebhaften Streite mit Leibnitz zu bedienen? Eben so gut könnte man sagen, der Fluxionscalcul ist nicht von ihm geschaffen. Endlich müsste man, wenn man der Analysis die Entdeckungen Newton's zuschreiben wollte, um consequent zu bleiben und um daraus die Ohnmacht der geometrischen Methode folgern zu können, auch denselben Ausspruch thun über die Werke von Maclaurin und Stewart und selbst über die berühmte Formel von Lambert, die von Lagrange selbst die schönste und wichtigste Entdeckung in der ganzen Theorie der Kometen genannt wurde, obgleich sie in den einfachsten Betrachtungen der Geometrie ihren Ursprung hat.

Man lasse doch der Geometrie ihre Werke. Die Analysis hat schon glänzende Trophäen genug und ist auch für die Zukunft reich genug, um wenigstens den frühern Leistungen ihrer ältern Schwester offen ihren Beifall zu zollen.

hen sind, zum ersten Mal eine Gelegenheit darbot, bei welcher von zwei solchen Ellipsoiden die Rede war. Seit einigen Jahren haben sich diese Oberflächen noch bei einigen andern Untersuchungen gezeigt, und es scheint, als sollten sie künftig eine wichtige Rolle in der allgemeinen Theorie der Oberflächen zweiten Grades spielen. Sie erfreuen sich einer grossen Anzahl von Eigenschaften, welche man noch nicht bemerkt hat und wovon wir in einer der Noten sprechen wollen, welche sich auf unsere fünfte Epoche beziehen.

§. 24. Durch die Betrachtung der Ellipse als den schiefen Schnitt eines Cylinders mit kreisförmiger Basis beweist Maclaurin die Eigenschaften dieser Curve, indem er sie aus denen des Kreises ableitet. Er begnügte sich nicht mit den von uns angeführten Sätzen, sondern, nachdem er diese sehr fruchtbare Methode gefunden hatte, wollte er sie noch weiter ausdehnen, als es der Marquis von Lhopital gethan, der sie schon in seinem analytischen Werke über Kegelschnitte (Buch VI) vorgetragen hatte. Auf wenigen Seiten nur beweist Maclaurin, mit wunderbarer Leichtigkeit, die Haupteigenschaften der Ellipse. Man findet darin einen höchst einfachen Beweis, welcher die Beweise Newton's an Kürze übertrifft, für das Problem der Centralkräfte in der Ellipse, wenn der anziehende Punkt irgendwo in der Ebene dieser Curve liegt. Man sieht daraus unmittelbar, dass die Attraction im umgekehrten Verhältniss der Entfernung steht, wenn der anziehende Punkt im Mittelpunkt der Ellipse liegt, und im umgekehrten Verhältniss des Quadrats dieser Entfernung, wenn der anziehende Punkt ein Brennpunkt der Curve ist.

Der *Treatise of fluxions* von Maclaurin könnte noch zu vielen andern Bemerkungen Gelegenheit geben, welche sich auf die Geschichte und die Fortschritte der Geometrie beziehen; aber wir haben schon die Grenzen, welche uns der Zweck dieser Schrift vorschreibt, überschritten; wir endigen also hier unsere Darstellung der Arbeiten dieses grossen Geometers.

R. Simson, 1687 — 1768.

§. 25. Robert Simson, den wir schon häufiger anzuführen Gelegenheit gehabt haben, ist einer von denjenigen Geometern des letzten Jahrhunderts, welche am gründlichsten die alte Geometrie untersucht und am meisten zur Verbreitung ihrer Kenntniss beigetragen haben. Man verdankt ihm eine Behandlung der Kegelschnitte in fünf Büchern, geschrieben in dem strengen Style des Apollonius, den man aufzu-

geben anfing, um ausschliesslich der analytischen Methode zu folgen. Dieses Werk war das erste, welches die beiden berühmten Theoreme von Desargues und Pascal enthielt. Auch findet man darin das Theorem *ad quatuor lineas*, welches jedoch schon in einem Tractat über Kegelschnitte von Milnes[32]) enthalten ist, der es aus den Principien des Newton entlehnt hatte.

Dieser Umstand, dass das Werk von Simson die drei genannten Haupttheoreme enthielt, war das Einzige, welches ihm den Vorzug vor dem grossen *Traité* des De La Hire geben konnte; denn was die Methode betrifft, so scheint uns letzteres Werk in mehrer Hinsicht unendlich viel höher zu stehen, es war eine beträchtliche Vervollkommnung der Methode der Alten, während das von Simson in dieser Beziehung einen Schritt zurück that.

In der That betrachtete Simson, so wie De La Hire in seinem kleinen *Traité* von 1679 und wie später der Marquis von Lhopital, die Kegelschnitte in der Ebene, indem er jeden durch eine ihm besonders angehörige Eigenschaft definirte. Für die Parabel ist es die Gleichheit der Entfernungen jedes Punkts der Curve vom Brennpunkt und von der Directrix, für die Ellipse ist es die constante Summe und für die Hyperbel die constante Differenz der Distanzen jedes Punkts der Curve von den beiden Brennpunkten. Aus dieser Beschreibungsart der drei Curven leitet Simson die Haupteigenschaften jeder einzelnen ab und zeigt darauf, dass diese Curven dieselben sind, als die, welche Apollonius auf dem schiefen Kegel mit Hülfe des Axendreiecks bildet. Nachdem er auf diese Weise die drei Kegelschnitte abgesondert in den drei ersten Büchern seines Werkes behandelt hat, betrachtet er in den

---

32) *Sectionum conicarum elementa nova methodo demonstrata*; Oxonii 1702. Dieses Werk, welches, dem Geständniss des Verfassers gemäss, dem grossen *Traité* von De La Hire nachgeahmt ist, fand vielen Beifall und erlebte mehre Auflagen. Es werden darin die Kegelschnitte als Schnitte eines Kegels mit kreisförmiger Basis durch eine ganz willkührliche Ebene betrachtet, ohne das Axendreieck zu Hülfe zu nehmen. Seine Methode scheint uns aber weniger glücklich, als die des De La Hire zu sein; denn es werden zuerst gewisse besondere Eigenschaften der Hyperbel bewiesen, welche als Grundlage dienen, um zu denen der Ellipse überzugehen.

Die Beweise sind rein synthetisch und ausserordentlich einfach, obgleich die unaufhörlich wiederholten Proportionen in der alten Form gegenwärtig die Lectüre sehr ermüdend machen; die Form hätte füglich durch die bequemere der Gleichheit zweier Verhältnisse ersetzt werden können.

beiden folgenden Büchern ganz allgemein alle drei zusammen und weist eine Menge ihrer gemeinsamen Eigenschaften nach.

Das Theorem *ad quatuor lineas* ist der 28ste Satz im 4ten Buch, das Sechseck des Pascal ist der 47ste im 5ten und das Theorem des Desargues ist in dem 12ten und 49sten Satz desselben Buchs bewiesen. Simson hat nicht das innige Verhältniss gekannt, welches diese drei Theoreme unter einander verbindet, und welches sie, so zu sagen, nur als verschiedene Ausdrucksweisen einer einzigen allgemeinen Eigenschaft der Kegelschnitte erscheinen lässt; aber ihm ist nicht die Fruchtbarkeit der beiden letztern entgangen, denn er zeigt, dass die ganze Theorie der Pole sich aus dem einen ableitet, und nachdem er sechs Corollare aus dem andern gefolgert, setzt er hinzu, dass in ihnen die allgemeinen Beweise mehrer Sätze aus dem ersten Buch der Principien von Newton enthalten wären.

Es ist zu bedauern, dass Simson diese glückliche Bemerkung nicht dazu benutzt hat, eine Menge von partiellen und eingeschränkten Sätzen, für welche er eben so viele verschiedene Beweise gegeben hat, in einen einzigen allgemeinen Ausspruch und in einen Beweis zusammenzufassen. Es war die einzige Art, die Theorie der Kegelschnitte zu vereinfachen, das Verständniss und die Anwendung zu erleichtern und zu erweitern.

§. 26. Wir führen hier noch den berühmten *Traité des porismes* an, worin Simson die Natur dieser Sätze kennen lehrt, welche vor ihm ein unlösbares Räthsel für die gelehrtesten Geometer war; wir haben weitläufiger davon bei dem Artikel über Euclid und in der dritten Note gesprochen.

Das von Simson über den *bestimmten Schnitt* Restituirte befindet sich in demselben Bande als die Porismen.

Dieser Geometer hat auch die *Ebenen Oerter* von Apollonius [33]) mit mehr Genauigkeit und Treue wieder hergestellt, als es Schooten und Fermat gethan haben.

Er hatte eine neue Uebersetzung der Werke des Pappus vorbereitet, welche man in seinen zu Glasgow aufbewahrten Manuscripten findet. Es ist nur zu bedauern, dass sie nicht bekannt gemacht ist, denn es war ein we-

33) *Apollonii Pergaei locorum planorum, libri II restituti;* in 4., Glasguae 1749.

niger leichtes Unternehmen, als man damals vielleicht glaubte und welches eine sehr genaue Bekanntschaft mit der alten Geometrie erforderte. Niemand war aber mehr geeignet, diese Arbeit mit Einsicht und Gewandtheit auszuführen, als Simson. Man muss sich nur wundern, dass seine Zeitgenossen eine solche Arbeit nicht zusammengetragen haben und dass unter diesen Umständen das Beispiel des Mylord Stanhop, welchem man die Bekanntmachung der *Porismen* und des *bestimmten Schnitts* verdankt, keinen Nachahmer in dem Vaterlande Newton's gefunden hat, wo die alte Geometrie immer ihre würdigsten und berühmtesten Bewunderer gehabt hat.

M. Stewart, 1717 — 1785. §. 27. Mathieu Stewart, ein Schüler von Simson und Maclaurin zu Glasgow, hernach an der Universität zu Edinburgh, erbte von seinen Lehrern den Geschmack für die alte Geometrie und verdankt dieser wie jenen seine Berühmtheit. Sein erstes Werk unter dem Titel: *Einige allgemeine Theoreme, die in der höhern Mathematik von grosser Wichtigkeit sind* (englisch), in 8., 1746, verschaffte ihm sogleich einen ausgezeichneten Rang unter den Geometern und bald darauf die durch den Tod Maclaurin's erledigte Professur der Mathematik. Die Beschaffenheit seines Amts und die Richtung seiner ersten Studien bestimmten ihn hauptsächlich, die geometrische Methode zu cultiviren und liessen ihn die Idee auffassen, sie auf die schwierigsten Aufgaben der physischen Astronomie anzuwenden, welche damals von den Geometern untersucht wurden und welche ihnen zufolge nur der höchsten Analysis zugänglich waren. Es war eine Fortsetzung der Methoden Newton's und Maclaurin's bei den Problemen des Weltsystems, welche durch die natürlichen Fortschritte der Wissenschaft zahlreicher und zusammengesetzter geworden waren, als sie zur Zeit dieser beiden grossen Geometer waren. Deshalb schrieb Stewart 1761 sein Werk: *Tracts physical and mathematical* etc., d. h. *Physikalische und mathematische Abhandlungen, enthaltend die Erklärung mehrer wichtigen Punkte der physischen Astronomie und eine neue Methode, die Distanz der Sonne von der Erde durch die Theorie der Schwere zu bestimmen.* Eine sehr ausgedehnte Theorie der Centripetal - Kraft, die Berechnung der Entfernung der Sonne von der Erde und das so schwierige Problem der drei Körper, in dem es sich darum handelt, die gegenseitige Wirkung der Sonne, der Erde und des Mondes zu berechnen, sind die hauptsächlichsten Aufgaben, welche Stewart in einer Reihe von Sätzen gelöst hat, die keine

andre mathematische Kenntnisse erfordern, als die Elemente der ebenen Geometrie und der Kegelschnitte. Die Ordnung und Klarheit der Sätze, die Einfachheit ihrer Beweise und die Natur der schwierigen Aufgaben, welche dadurch gelöst wurden, erwarben Stewart das grösste Lob und bewährten ihn als einen der gelehrtesten Geometer dieser Epoche. Inzwischen müssen wir doch sagen, dass seine Berechnung der Entfernung der Sonne von der Erde falsch war. Der Grund des Fehlers wurde zuerst von Dawson 1769 [34]) und dann von Landen 1771 [35]) erkannt und erklärt. Er lag nicht in der Methode an sich, sondern darin, dass unrechter Weise mehre Quantitäten der Einfachheit wegen vernachlässigt waren. Man hat später aus diesem Umstand ein Argument gegen die geometrische Methode gezogen; aber um dieses zurückzuweisen, reicht es hin zu erinnern, dass solche Fehler bei den berühmtesten Analysten vorgekommen sind und dass sie sich hauptsächlich in der Astronomie finden, wo die Rechnung nur auf dem Wege der successiven Annäherung vorschreitet.

§. 28. Wir haben noch von Stewart ein Werk über reine Geometrie zu erwähnen: *Propositiones geometricae, more Veterum demonstratae, ad Geometriam antiquam demonstrandam et promovendam idoneae.* Edinb. 1763, in 8.

Um dieses Werk, so wie auch das seiner *Allgemeinen Theoreme*, welche 19 Jahre vorhergingen, näher kennen zu lernen, müssen wir in einige Details eingehen. Vielleicht wird man es, wegen der Seltenheit dieser beiden Bücher, nicht ungern sehen, wenn wir die darin enthaltenen Haupttheoreme hier anführen und analysiren.

Das Buch der *Allgemeinen Theoreme* enthält 64 Sätze, von denen nur 50 die Ueberschrift *Theoreme* führen; von den 14 andern stehen drei am Anfang des Werks und dienen zum Beweise der Theoreme, während die andern 11 es beschliessen; letztere sind meisten Theils Eigenschaften des Kreises.

Von den 64 Sätzen sind nur die 8 ersten bewiesen, worunter man die fünf ersten Theoreme findet. Der Verfasser sagt in einer kurzen Vorrede, dass zum Beweise aller dieser so allgemeinen und so schwierigen Theoreme

---

34) *Four Propositions* etc.: Vier Sätze zum Beweise, dass die von Stewart bestimmte Distanz der Sonne falsch ist.

35) *Animadversions on Dr. Stewarts computation of the sun's distance from the earth*; in 8., London.

er mehr Zeit hätte haben müssen, als er dieser Arbeit hätte widmen können. Ich weiss nicht, ob Stewart in späterer Zeit die Beweise seiner Theoreme nachgeliefert hat, oder ob man sie in seinen Papieren gefunden und welchen Gebrauch man davon gemacht hat.

Die beiden ersten Sätze drücken allgemeine Eigenschaften von vier Punkten aus, von denen drei in gerader Linie liegen, der vierte aber willkührlich. In dem zweiten dieser Sätze kann der vierte Punkt auf derselben Geraden genommen werden, auf welcher die drei andern liegen. Dieser vierte Satz verdient mehr gekannt zu sein, als er es zu sein scheint. Es ist folgender:

Wenn man auf einer geraden Linie drei Punkte A, C, B *annimmt und irgend einem andern D ausserhalb oder in der Richtung dieser Geraden, so hat man*:

$$\overline{DA}^2 . BC + \overline{DB}^2 . AC - \overline{DC}^2 . AB = AB . AC . BC.$$

Dieses ist der Satz, von welchem wir gesagt haben, dass die 8 Lehnsätze des Pappus zu den *Ebenen Oertern* des Apollonius sich aus ihm als Corollare und leichte Folgerungen ableiten lassen. Bald darauf, nachdem er in dem Werke von Stewart erschienen war, zeigte Robert Simson in einem Anhang zu seinem Werk *Loca plana restituta* eine sehr nützliche Anwendung desselben, und ein andrer berühmter Geometer, Th. Simpson, bewies ihn auch und bediente sich desselben, unter dem Namen eines Lehnsatzes, zur Auflösung mehrer Probleme, in seinen *Select exercises for young proficients in the mathematicks* (in 8., 1752). 36) Später bewies denselben Satz auch Euler als Hülfssatz, um in einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen drei Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. 37) Endlich finden wir auch, dass der berühmte Physiker und Geometer John Leslie ihn bewiesen und sich seiner bedient hat im dritten Buch seiner *Geometrical analysis* (Edinb. 1809, in 8.; zweite Ausgabe, 1821).

Man sieht aus diesen Citaten, dass dieser Satz, welcher heut zu Tage beinahe ganz unbekannt ist, es mit

---

36) Die beiden ersten Theile dieses Werks sind eine Sammlung von zahlreichen, sehr elegant gelösten Aufgaben aus der Algebra und Geometrie. Ins Französische übersetzt unter dem Titel: *Elémens d'analyse pratique, ou application des principes de l'Algèbre et de la Géométrie, à la solution d'un très-grande nombre de problèmes numériques et géométriques*; in 8., 1771.

37) *Petersburger Memoiren* vom Jahr 1780.

Recht verdient, in die Elemente oder wenigstens in die Ergänzungen der Geometrie aufgenommen zu werden.[38])

Die 50 Theoreme des Stewart können beinahe alle in folgende vier zusammengefasst werden, welche die allgemeinen sind, aus denen sich die andern grossen Theils als besondre Fälle ableiten lassen:

1) *Man denke sich ein reguläres, einem Kreise vom Radius* R *umgeschriebenes Polygon von* m *Seiten und es sei* n *irgend eine Zahl kleiner als* m; *wenn man nun von*

---

38) Wenn der Punkt *D* auf derselben Geraden genommen wird, auf welcher die drei festen Punkte liegen, so drückt das Theorem von Stewart eine allgemeine Relation zwischen vier Punkten aus, welche irgendwie auf einer geraden Linie liegen. Wir haben gefunden, dass diese Relation, so wie die andern in Bezug auf vier Punkte in gerader Linie, sich aus einer allgemeinen Relation zwischen fünf Punkten, die in gerader Linie liegen, ableiten.

Es seien *A*, *B*, *C*, *D*, *E* die fünf Punkte, so hat man:

$$\overline{EA}^2.BC.CD.DB+\overline{EB}^2.CD.DA.AC-\overline{EC}^2.DA.AB.BD$$
$$-\overline{ED}^2.AB.BC.CA=0.$$

Wie man die einzelnen Glieder dieser Gleichung bildet, ist einleuchtend. Um ihre Vorzeichen zu bestimmen, dividire man alle Glieder durch das Product *AB.BC.CA*, so nimmt die Gleichung diese Form an:

$$\overline{EA}^2.\frac{DB.DC}{AB.AC}+\overline{EB}^2.\frac{DA.DC}{BA.BC}-\overline{EC}^2.\frac{DA.DB}{CA.CB}=\overline{ED}^2.$$

In dieser Gleichung giebt man das Zeichen + dem Producte aus zwei Segmenten, die von dem Punkte aus, welcher ihnen gemeinschaftlich ist, in demselben Sinne gezählt werden und das Zeichen — dem Producte aus zwei Segmenten, die in entgegengesetztem Sinne gezählt werden.

Folgende sind die Relationen zwischen vier Punkten, welche man aus der eben angeführten allgemeinen Relation ableitet:

1) Wenn man den Punkt *E* in der Unendlichkeit annimmt, so erhält man durch Division mit $\overline{ED}^2$:

$$BC.CD.DB+CD.DA.AC-DA.AB.BD-AB.BC.CA=0$$

Jedes Glied dieser Gleichung ist das Product aus den drei Segmenten einer geraden Linie, die durch die Verbindung je zweier von drei Punkten auf ihr gebildet werden können.

2) Wenn die beiden Punkte *E* und *D* zusammenfallen, so folgt:

$$DA.BC+DB.AC-DC.AB=0.$$

Diese Gleichung drückt die einfachste Relation zwischen den vier Punkten *A*, *C*, *B*, *D* aus, wenn sie in gerader Linie liegen.

3) Wenn endlich der Punkt *D* in der Unendlichkeit liegt, so geht die allgemeine Gleichung in folgende über:

$$\overline{EA}^2.BC+\overline{EB}^2.AC-\overline{EC}^2.AB=AB.BC.CA.$$

Dieses ist die Gleichung von Stewart.

irgend einem Punkt (der innerhalb des Polygons liegt, wenn n *ungerade ist, und beliebig angenommen werden kann, wenn* n *gerade ist) Perpendikel auf die Seiten des Polygons fällt, so ist die Summe der* n*ten Potenzen dieser Perpendikel gleich:*

$$m.(R^n + A.v^2.R^{n-2} + B.v.^4R^{n-4} + C.v.^6R^{n-6} + \text{u. s. w.});$$

worin v *die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt des Kreises bedeutet und* A *der Coefficient des dritten Gliedes in der Entwickelung der* n*ten Potenz eines Binoms, multiplicirt durch* $^1/_2$ *ist; ebenso* B *der Coefficient des fünften Gliedes in der Binomialformel, multiplicirt durch* $\frac{1.3}{2.4}$, C *der Coefficient des siebenten Gliedes, multiplicirt durch* $\frac{1.3.5}{2.4.6}$ u. s. w. f. (Satz 40); *so dass wird:*

$$A = \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$B = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^2.4^2.6^2}$$

u. s. w. u. s. w.

Wenn der Punkt, von welchem die Perpendikel gefällt werden, auf der Peripherie gewählt wird, so reducirt sich die Formel auf:

$$m.\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots n}.R^n. \text{ (Satz 39.)}$$

Dieses allgemeine Theorem umfasst die Sätze 3, 5, 22, 23, 28, 29 und 45.

2) *Man denke sich ein reguläres, einem Kreise vom Radius* R *eingeschriebenes Polygon von* m *Seiten und es sei* n *irgend eine Zahl kleiner als* m; *wenn man nun irgend einen Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises* v *sein mag, willkührlich wählt, so wird die Summe der* 2n*ten Potenzen der Entfernungen dieses Punkts von allen Scheiteln des Polygons gleich sein:*

$$m.(R^{2n} + a^2.v^2.R^{2n-2} + c^2.v^4.R^{2n-4} + c^2.v^6.R^{2n-6} + \text{u. s. w.});$$

worin a *der Coefficient des zweiten Gliedes in der Entwickelung der* n*ten Potenz eines Binoms ist,* b *der Coefficient des dritten Gliedes,* c *der Coefficient des vierten Gliedes* u. s. w. (Satz 42.)

Wenn der Punkt in der Peripherie liegt, so reducirt sich die Formel auf folgende:

$$m.\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots n}.2^n.R^{2n}. \text{ (Satz 41.)}$$

Dieses allgemeine Theorem umfasst die Sätze 4, 26, 27 und 34.

3) *Wenn* m *beliebige Punkte gegeben sind und eben so viele Quantitäten* a, b, c...., *und es bedeutet* n *eine Zahl kleiner als* m, *so kann man* (n+1) *andre Punkte finden, so dass die Summe der* 2nten *Potenzen der Distanzen irgend eines Punkts von den gegebenen Punkten, respective durch die Quantitäten* a, b, c... *multiplicirt, zu der Summe der* 2nten *Potenzen der Entfernungen der gefundenen Punkte von demselben Punkte in dem Verhältniss von:*

$$(a+b+c+\ldots.) \text{ zu } (n+1)$$

stehe. (Satz 44.)

Dieses Theorem umfasst die Sätze 11, 12, 32, 33, 45.

4) *Wenn* m *beliebige Gerade gegeben sind und eben so viele Quantitäten* a, b, c...., *und es bedeutet* n *eine Zahl kleiner als* m, *so kann man* (n+1) *andre Gerade finden, so dass die Summe der* nten *Potenzen der Entfernungen eines willkührlich gewählten Punkts von den gegebenen Geraden, respective durch die Quantitäten* a, b, c.... *multiplicirt, zu der Summe der* nten *Potenzen der Entfernungen desselben Punkts von den gefundenen Geraden in dem Verhältniss von:*

$$(a+b+c+\ldots.) \text{ zu } (n+1)$$

stehe. (Satz 49 und 53.)

Dieses Theorem umfasst die Sätze 17, 21, 24, 25, 37, 38, 42, 50, 51, 52.

§. 29. Wir haben gefunden, dass man dem Ausspruch der beiden letztern Theoreme eine sehr bedeutende und höchst merkwürdige Erweiterung geben kann. Denn das erste dieser Theoreme lässt nur eine einzige Relation zwischen den $2n$ten Potenzen der Entfernungen irgend eines Punktes von gegebenen und von gefundenen Punkten zu, statt dieser aber giebt es eine ganz ähnliche Relation zwischen den $2(n-\delta)$ten Potenzen derselben Entfernungen, wo δ alle Werthe 0, 1, 2.... $(n-1)$ haben kann; dergestalt also, dass es zwischen den Entfernungen irgend eines Punktes von gegebenen und gefundenen Punkten n Relationen giebt.

Die letzte dieser Relationen findet zwischen den Quadraten dieser Entfernungen statt. Sie beweist, dass die gefundenen Punkte denselben Schwerpunkt haben, als die

gegebenen, wenn die Massen dieser letztern a, b, c... und die der gefundenen Punkte alle der Einheit gleich sind.

Eben so hat man bei dem zweiten der hier in Rede stehenden beiden Theoreme, welches eine Relation zwischen den $n$ten Potenzen der Entfernungen irgend eines Punktes von gegebenen und gefundenen Geraden ausdrückt, eine ähnliche Relation zwischen den $(n-2\delta)$ten Potenzen derselben Entfernungen, wo δ alle Werthe 0, 1, 2... bis $\frac{n-1}{2}$, wenn n ungerade, und bis $\frac{n-2}{2}$, wenn n gerade ist, haben kann; dergestalt also, dass es zwischen den Entfernungen irgend eines Punkts von gegebenen und gefundenen Geraden $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n-2}{2}$ verschiedene Relationen giebt, statt der einen, welche das Theorem des Stewart giebt. (S. Note XXII.)

§. 30. Wir haben auch erkannt, dass die beiden ersten von den oben ausgesprochenen Theoremen, welche sich auf reguläre, einem Kreise ein- und umgeschriebene Polygone beziehen, nur besondere Fälle von allgemeinern Theoremen sind, die bei den Kegelschnitten stattfinden. Sie bilden einen Theil von einer Menge andrer Eigenschaften dieser Curven, welche man noch nicht bemerkt zu haben scheint. Diese zahlreichen Theoreme liefern eine äusserst merkwürdige Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaften der conjugirten Durchmesser und der Leitstrahlen, die von den Brennpunkten eines Kegelschnitts gezogen werden.

Diese Curven besitzen in Wahrheit einen unerschöpflichen Reichthum. Jeder Tag zeigt neue Wege, um an ihnen zahlreiche und interessante Eigenschaften kennen zu lernen. Man glaube ja nicht, dass solche Untersuchungen unnütz seien oder von nur geringem Interesse. Jede Entdeckung über diese Curven wird stets die Einleitung zu schönern und allgemeinern Entdeckungen, welche die Wichtigkeit der Rolle erhöhen, die sie in allen Theilen der mathematischen Wissenschaften spielen und die zur Erkennung von analogen Eigenschaften bei einer Menge von andern Curven höherer Ordnung führen; Eigenschaften, auf welche man nicht gekommen wäre, wenn man direct über diese so complicirten und schwierigen Curven Untersuchungen angestellt hätte.

§. 31. Die *Propositiones geometricae* von Stewart bestehen aus zwei Büchern, von denen das erste 60 und

das zweite 52 Sätze enthält, welche sich auf die gerade Linie und auf den Kreis beziehen.

Die ersten handeln beinahe alle von einer allgemeinen Eigenschaft des Vierecks, welche auf dieselbe zurückkommt, die Pappus in seinen Lemmen zu den Porismen des Euclid bewiesen hat, nämlich dass *jede Transversale die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks in sechs Punkten schneidet, die unter sich die Beziehung der Involution haben.* Wir werden in der Xten Note sehen, dass diese Relation sich zwischen sechs oder auch zwischen acht Segmenten ausdrücken lässt. Die zwischen sechs Segmenten hat Pappus bewiesen, und die zwischen acht Segmenten wendet Stewart an. Er hat sie in ihrer ganzen Allgemeinheit im 59sten Satz des ersten Buchs bewiesen.

Die vorhergehenden Sätze 51, 52, 53, 54, 56, 57 und 58 sind besondre Fälle davon, deren sich Stewart bedient, um von einem zum andern überzugehen und sich so zu dem allgemeinen Satz zu erheben. Der 60ste und letzte Satz des Buchs ist auch ein besondrer Fall davon, wenn nämlich zwei Seiten des Vierecks unter einander parallel sind.

Die Sätze 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 und 13 des zweiten Buchs sind andre Eigenschaften des Vierecks, in deren Ausspruch zwar nicht die Beziehung der Involution eingeht, die sich aber leicht hieraus ableiten lassen. Alle diese Sätze beziehen sich auf das bekannte Theorem, von dem Pappus uns sagt, dass es einen Theil der Porismen des Euclid ausmacht, nämlich: *wenn die drei Seiten eines Dreiecks von veränderlicher Gestalt sich um drei feste Pole drehen, die in gerader Linie liegen, und wenn zwei Scheitel des Dreiecks zwei feste gegebene Gerade durchlaufen, so beschreibt der dritte Scheitel eine dritte Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten geht.* Stewart sprach diesen Satz nicht in seiner ganzen Allgemeinheit aus und bewies nur einzelne besondre Fälle desselben. Es scheint, dass er nicht den innigen Zusammenhang erkannt hat, welchen er mit der allgemeinen Beziehung der Involution von Segmenten hat, die von den vier Seiten und den beiden Diagonalen eines Vierecks auf einer Transversale gebildet werden.

§. 32. Die auf den Kreis bezüglichen Sätze kann man ansehen, als bezögen sie sich auf die Beschreibung dieser Curve durch den Durchschnitt zweier Geraden, die sich um zwei feste Pole drehen, indem sie auf einer

festen Transversale Segmente bestimmen, die unter einander gewisse Relationen haben.

Wir wollen diese Sätze in drei verschiedene Klassen theilen.

In der ersten liegen die beiden Pole auf dem Umfang des Kreises und die Transversale ist beliebig angenommen.

In der zweiten liegen die beiden Pole willkührlich, wobei der eine auf dem Umfang liegen kann, und die Transversale ist parallel mit der Geraden, welche die beiden Pole verbindet.

In der dritten Klasse endlich liegen die beiden Pole auch auf irgend eine Art, die Transversale aber ist senkrecht oder schräg gegen die Verbindungslinie der Pole.

Die Sätze der ersten Klasse beziehen sich alle auf Segmente, welche die vier Seiten eines Vierecks, das einem Kreise eingeschrieben ist, auf einer Sehne des Kreises bilden. Man könnte glauben, dass es sich hier um das Theorem des Desargues handelt, aber das ist nicht der Fall; Stewart drückt die Relation zwischen diesen Segmenten nicht durch eine einzige Gleichung aus, wie es Desargues gethan hat, sondern durch zwei Gleichungen, worin noch ein Punkt und zwei Segmente zur Hülfe mit eingeführt werden. Die Elimination dieser beiden Segmente, welche Stewart nicht ausgeführt hat, würde ihn zu einer Relation zwischen den auf der Sehne des Kreises von den vier Seiten des Vierecks gebildeten Segmenten allein geführt haben. Aber diese Relation hat nicht die gewöhnliche Form der Involution von sechs Punkten, sie ist eine Gleichung mit drei Termen, so dass wir glauben müssen, Stewart habe das Theorem des Desargues nicht gekannt, oder wenigstens, er habe es nicht bei seinem Werke benutzt.

Das Theorem, auf welches dieser Geometer gekommen ist, ist in seiner ganzen Allgemeinheit in den Sätzen 46, 47 und 48 des ersten Buchs bewiesen. Die Sätze 41, 42, 43, 44 und 45 sind besondre Fälle davon, welche ihm dazu dienen, um zu dem allgemeinen Satz zu gelangen.

Die Sätze 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 und 38 knüpfen sich an die Eigenschaften des Vierecks, welches einem Kreise eingeschrieben ist. Stewart macht bei ihnen nur von *einer* Gleichung Gebrauch, von der man erkennt, dass sie besondre Fälle des Theorems von Desargues ausdrückt.

Die Sätze 39 und 40 enthalten folgende sehr merkwürdige Eigenschaft des Vierecks, welches einem Kreise

eingeschrieben ist: *das Quadrat der Geraden, welche die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten verbindet, ist gleich der Summe der Quadrate der Tangenten, die von diesen beiden Durchschnittspunkten an die Peripherie des Kreises gezogen werden.* Dieser Satz lässt sich eben so leicht, wie die vorhergehenden aus dem Theorem des Desargues folgern.

§. 33. Beinahe das ganze zweite Buch ist den Sätzen über Segmente gewidmet, welche von zwei beweglichen Geraden, die sich um feste nicht auf der Peripherie des Kreises liegende Pole drehen, auf einer Transversale gebildet werden.

In den Sätzen 14, 15....21 und 44, 45....52 ist die Transversale parallel mit der Geraden, welche die Pole verbindet. Die Sätze 23, 25 und 26 sind von derselben Beschaffenheit, als diese.

Man sieht leicht, dass in allen diesen Sätzen die Segmente, welche die beiden beweglichen Geraden auf der festen Transversale bilden, unter einander eine Relation vom zweiten Grade haben. Der Grund *a priori* hiervon ist zugleich ein Mittel, direct zu den Theoremen des Stewart zu gelangen und sie zu restituiren, wenn sie verloren gingen.

Wenn im Allgemeinen der Durchschnittspunkt zweier beweglichen Geraden einen Kegelschnitt durchläuft, so haben die Segmente, welche von jenen auf einer festen Transversale, die mit der Verbindungslinie der festen Pole parallel angenommen ist, gebildet werden, eine Relation vom zweiten Grade; und umgekehrt, wene diese Segmente eine Relation vom zweiten Grade haben, so beschreibt der Durchschnittspunkt der beiden beweglichen Geraden einen Kegelschnitt (was wir bei den Anwendungen unsres Princips der Homographie beweisen werden). Wenn also erstlich die Curve ein Kreis ist, so müssen die Segmente unter einander eine Relation vom zweiten Grade haben. Und wenn zweitens die beiden Pole und die Transversale so wie die Form der Relation vom zweiten Grade, die zwischen den Segmenten stattfinden soll, gegeben sind, so wird man zwei Bedingungsgleichungen haben, um auszudrücken, dass der durch den Durchschnittspunkt der beiden beweglichen Geraden beschriebene Kegelschnitt ein Kreis ist. Diese beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung der Werthe von zwei Unbekannten unter einer grossen Anzahl von willkührlichen Dingen, welche die Coefficienten der Relation bilden werden: nämlich die Lage der

beiden Pole, die der Transversale und die der beiden Punkte, die auf dieser Geraden genommen sind und von denen aus die Segmente gezählt werden.

Diese Bemerkung giebt den Schlüssel zu den Theoremen des Stewart. Sie wendet sich auch auf verschiedene andre ähnliche Sätze dieses Geometers an, welche Simson in seine Behandlung der Porismen aufgenommen hat. Fermat scheint uns der erste gewesen zu sein, der durch den vierten der fünf Sätze, welche er unter dem Namen Porismen hinterlassen hat, zu dieser Gattung von Eigenschaften des Kreises Veranlassung gegeben hat.

§. 34. Nachdem Stewart diese Idee in den aufgezählten Nummern nachgeahmt hatte, verallgemeinerte er dieselbe noch, indem er die Segmente auf einer Transversale von beliebiger Richtung zählte. Seine 19 Sätze, die in den Nummern 22, 23..... und 40 stehen, drücken solche Eigenschaften des Kreises aus.

Die Segmente, welche von den beiden beweglichen Geraden auf der Transversale abgeschnitten werden, haben nicht mehr immer unter einander eine Relation vom zweiten Grade, und man erkennt nicht mehr eben so leicht, als im vorigen Fall, die allgemeine Form, welche den verschiedenen von Stewart bewiesenen Relationen gemeinschaftlich ist. Inzwischen kommt man doch dahin, einzusehen, dass diese Relationen sich aus folgender allgemeinen Eigenschaft der Kegelschnitte ableiten lassen:

Es seien zwei feste Pole und eine Transversale, welche die Verbindungslinie der Pole in einem Punkt E *trifft und auf dieser Transversale ein fester Punkt* O *angenommen; wenn man um die beiden Pole zwei Gerade drehen lässt, welche die Transversale in solchen Punkten* a *und* a¹ *treffen, dass man zwischen den beiden Verhältnissen* $\frac{Oa}{Ea}$, $\frac{Oa^1}{Ea^1}$ *eine constante Relation hat, in welche diese Verhältnisse in der zweiten Potenz eingehen, so wird der Durchschnittspunkt der beiden Geraden einen Kegelschnitt erzeugen.*

Und umgekehrt, wenn der Durchschnittspunkt der beiden Transversalen einen Kegelschnitt durchläuft, so haben die beiden Verhältnisse $\frac{Oa}{Ea}$, $\frac{Oa^1}{Ea^1}$ unter einander eine Relation vom zweiten Grade.

Dieses allgemeine Theorem kann zu einer Menge von Eigenschaften des Kreises führen; denn man hat immer zwei Gleichungen, um auszudrücken, dass der beschrie-

bene Kegelschnitt ein Kreis ist. Diese Gleichungen dienen zur Bestimmung entweder zweier Coefficienten der Relation, oder der Lage einzelner Theile der Figur.

§. 35. Ich glaube nicht, dass man die Untersuchungen Stewart's über dergleichen Eigenschaften des Kreises verfolgt hat. Heut zu Tage vernachlässigt man diese Art von geometrischer Speculation, weil man sich auf die Analysis verlässt, auf deren Hülfe man im Nothfall rechnet; und man giebt sich weiter keine Mühe, die Eigenschaften des Kreises zu erforschen. Aber man würde es fühlen, dass diese Untersuchungen nützlich und nothwendig sind, wenn man die geometrischen Arbeiten der Alten und der Geometer des letzten Jahrhunderts verfolgen wollte. Diese Idee scheint mir bei den Untersuchungen von Carnot in seiner *Géométrie de position* und in seiner *Théorie des transversales* vorzuherrschen, welche Werke sich in ihrer philosophischen Auffassung, wie die von Simson und Stewart, an die *Data* und *Porismata* des Euclid anschliessen, und welche wirklich solche *Ergänzungen* der Geometrie sind, wie sie die Alten für die praktischen und theoretischen Anwendungen der Geometrie für unumgänglich nothwendig hielten.

§. 36. Die Analyse, welche wir von den Werken Stewart's gegeben haben, zeigt, dass sich darin viele Sätze, die von einander besondre Fälle sind, von einander unabhängig bewiesen finden. Dieses ist der gewöhnliche und nothwendige Weg für einen Geometer, der von irgend einem sehr leichten zu einem in Etwas allgemeinern Satz derselben Gattung und von diesem zu einem noch allgemeinern fortschreitet, so dass der Beweis eines auch noch so wenig allgemeinen Satzes den Beweis mehrer seiner besondern Fälle erfordert. Gegenwärtig kann man von vorn herein und ganz direct die allgemeinsten Sätze beweisen und hernach über sie, in ihrer grössten Allgemeinheit genommen, dieselben Betrachtungen anstellen, welche früher nur bei ihren einfachsten Fällen Anwendung fanden. Eine solche Leichtigkeit, wodurch die Wissenschaft so ausserordentlich vereinfacht wurde, zeigt zur Genüge die Fortschritte, welche dieselbe in letzterer Zeit gemacht hat: und es würde sich diese Leichtigkeit auch auf alle Anwendungen der Geometrie, auf die grossen von Huygens und Newton behandelten Fragen ausgedehnt haben, wenn nicht in den zur Bildung und Verbreitung der Wissenschaften bestimmten Anstalten, ausschliesslich der Geschmack für Analysis angeregt worden wäre, wo-

durch man von dem Studium und der Anwendung der andern Methode abgewendet wurde. [39])

Stewart kündigte in der Vorrede zu seinen *Propositiones Geometricae* an, dass er noch mehre andre Werke über geometrische Gegenstände veröffentlichen werde. Wir wissen nicht, ob man in seinen Manuscripten die hierauf bezüglichen Untersuchungen gefunden hat.

Lambert, 1728 — 1777. §. 37. Der berühmte Lambert, ein andrer Leibnitz wegen der Allgemeinheit und Gründlichkeit seiner Kenntnisse, verdient auch eine Stelle unter denjenigen Mathematikern, welche in einer Zeit, in der die Wunder der Analysis alle Geister beschäftigte, noch die Kenntniss und den Geschmack für die Geometrie bewahrt hatten, und es verstanden, die herrlichsten Anwendungen von derselben zu machen.

Seine zahlreichen Werke enthalten an verschiedenen Stellen Untersuchungen aus der reinen Geometrie; vor Allem aber müssen wir seine Abhandlung über die Perspective und seine geometrische Abhandlung über die Cometen anführen.

Die Perspective von Lambert erschien 1759 und um einen zweiten Theil vermehrt 1773, worin der Verfasser von dieser Lehre, als von einer geometrischen Methode

---

39) Man wird ohne Zweifel sagen, dass man in der Mathematik, wie bei jedem andern Zweige der Wissenschaft, seiner Neigung folgen müsse, und dass die Geometer es sich nur selbst zuzuschreiben haben, wenn sie die Geometrie haben unberücksichtigt liegen lassen. Wir antworten jedoch hierauf: Wenn wir zunächst auch anerkennen, dass die analytische Methode, ihrer Universalität wegen, vorzüglich oder vielleicht ausschliesslich in den Schulen gelehrt werden muss, wo die Mathematik nicht ihrer selbst wegen getrieben wird, sondern weil sie für andre Wissenschaften und zu praktischer Anwendung dienlich ist, so glauben wir doch, dass die Geometrie und die herrlichen Methoden, zu welchen sie einigen bedeutenden Geometern der beiden letzten Jahrhunderte Gelegenheit gegeben hat, so wie die Vervollkommnungen, deren sie fähig ist, eine Stelle finden müssten in denjenigen Lehrcursen, die besonders zur Auseinandersetzung der neuen Entdeckungen und der verschiedenen Doctrinen der Mathematik bestimmt sind. Es werden aber die analytischen Wissenschaften, so wie die Entdeckungen, welche man analytisch darstellen kann, *allein* gelehrt; kann man da noch sagen, dass die Wahl frei ist? Diese Gleichgültigkeit oder vielmehr dieses Ausschliessen eines so wichtigen Theils der mathematischen Wissenschaft ist keineswegs philosophisch und hindert ausserordentlich ihr Fortschreiten; denn alle Wissenschaften sind unter einander so sehr verkettet, dass der Stillstand der einen auch die Entwickelung der andern hindert.

Gebrauch machte und mehre Sätze bewies, die sich auf die beschreibenden Eigenschaften der Figuren beziehen, und die heut zu Tage zur Theorie der Transversalen gehören, und worin er die Elemente desjenigen Theils der Geometrie gab, welche man in letzterer Zeit *Geometrie des Lineals* genannt hat.

Die Abhandlung über die Cometen unter dem Titel: *Insigniores orbitae cometarum proprietates*, in 8., Augsb. 1761, enthält in rein geometrischer Sprache viele Eigenschaften der Kegelschnitte, die sich auf ihre descriptiven Relationen und auf die Ausmessung ihrer verschiedenen Sectoren beziehen, und macht von diesen schönen Entdeckungen Gebrauch bei der Bestimmung der Bewegung der Cometen.

Man bemerkt darin folgende äusserst wichtig gewordene Eigenschaft der Ellipse:

Wenn man in zwei, über derselben grossen Axe beschriebenen Ellipsen zwei solche Bögen annimmt, dass ihre Chorden gleich sind und dass ausserdem die Summen der radii vectores, die von den Brennpunkten dieser Ellipsen respective nach den Endpunkten dieser Bögen gezogen sind, auch unter einander gleich sind, so verhalten sich die Sectoren, die in jeder Ellipse zwischen dem zugehörgen Bogen und den beiden Leitstrahlen liegen, wie die Quadratwurzeln aus den Parametern der Ellipsen. (Sect. 4, Lemma 26.)

Wenn man die Ellipse als eine Planetenbahn ansieht und statt der Sectoren die Zeiten substituirt, welche zum Durchlaufen ihrer Bögen gebraucht werden, da sich nach dem Princip Newton's die Zeit wie die Fläche des Sectors, dividirt durch die Quadratwurzel aus dem Parameter, verhält, so schliesst man hieraus, dass in den beiden genannten Ellipsen die zum Durchlaufen der beiden Sectoren gebrauchten Zeiten dieselben sind.

Dieses Theorem bietet das Mittel dar, die Berechnung der Zeit, welche zur Beschreibung eines gegebenen Ellipsenbogens gebraucht wird, auf die Zeit für den Bogen irgend einer andern Ellipse, welche dieselbe grosse Axe hat, zurückzuführen, selbst auf die Zeit für einen Theil der grossen Axe, wenn man annimmt, dass die Ellipse durch das Verschwinden der conjugirten Axe mit dieser grossen Axe zusammenfällt und dass der bewegliche Punkt diese Axe durchläuft.

So einfach diese geometrischen Betrachtungen auch sind, so haben sie doch hingereicht, um Lambert zu dem wichtigsten Theorem aus der Theorie der Cometen zu führen, für welches die Beweise, welche man seitdem

vermittelst des Calculs gegeben hat, die ganze Hülfe der höchsten Analysis erfordern.

Die Eigenschaft der Ellipse, auf welcher dieses Theorem beruht, kommt auch den Sectoren der Hyperbel zu, was Lexell in einem Memoire [40]), worin er verschiedene andre Eigenschaften der Kegelschnitte nachweist, durch einfache geometrische Betrachtungen bewiesen hat.

Lambert ist oft auf die Theorie und auf die Berechnung der Planetenbahnen zurückgekommen und hat von der Geometrie eine nützliche Anwendung gemacht, hauptsächlich um für die Analysis graphische Constructionen zu substituiren, welche zur Bestimmung einer Cometenbahn aus drei Betrachtungen dienen können. [41])

Bei den unendlichen Arbeiten Lambert's können wir nicht alle anderen Titel aufsuchen, um sie zur Kenntniss Derer zu bringen, welche Geschmack an der reinen Geometrie finden, weil die grösste Zahl seiner Abhandlungen deutsch geschrieben sind.

§. 38. Wir schliessen hiermit die Uebersicht über die Fortschritte und Ergebnisse der Geometrie im 18ten Jahrhundert, welche unsere vierte Epoche bilden. Die Anwendung und der Geschmack für diese Art von Speculation erlöschen, und wir finden nur isolirte Untersuchungen in den academischen Sammlungen. Mehre jedoch könnten uns Gelegenheit geben, berühmte Namen, wie Euler, Lagrange, Fuss, Lexell u. A. anzuführen, und wir könnten bisweilen durch Verallgemeinerung der ersten Resultate dieser berühmten Geometer vermittelst neuer Methoden nachweisen, dass die Geometrie in der letztern Zeit in der That Fortschritte gemacht hat und dass sie wesentlicher Vervollkommnungen fähig ist, deren Ergebniss die Verringerung der Kluft sein wird, welche gegenwartig diese Wissenschaft von dem Calcul trennt.

Aber neue Entwickelungen würden uns von dem Ende dieser Schrift, zu dem wir eilen müssen, entfernen.

---

40) *Nova Acta Petropolitana*, tom. I, 1783.

41) Diese Methode ist aus einander gesetzt und auf mehre Beispiele angewandt in dem dritten Theil der Sammlung verschiedener Abhandlungen von Lambert, betitelt: *Beiträge zur Mathematik* etc. Berlin 1765 — 1772. Vier Bände in 8.

Fünftes Kapitel.

Fünfte Epoche.

Beschreibende Geometrie.

§. 1. In der letztern Zeit wurde die reine Geometrie, nach einer Ruhe von beinahe einem Jahrhundert, um eine neue Doctrin, die *beschreibende Geometrie*, bereichert, welche die nothwendige Ergänzung der analytischen Geometrie des Descartes war, und welche, wie diese, ungeheure Resultate liefern und eine neue Aera in der Geschichte der Geometrie bezeichnen musste. Ihr Schöpfer ist Monge.

Sie hat einen doppelten Zweck: erstlich, in einer ebenen Fläche alle Körper von bestimmter Form darzustellen und die graphischen Operationen so in ebene Constructionen umzuformen, wie es im Raume auszuführen unmöglich wäre,

und zweitens, aus dieser Darstellung der Körper ihre mathematischen Beziehungen abzuleiten, welche aus ihrer Gestalt und ihrer gegenseitigen Lage entsprigen.

Diese herrliche Schöpfung, welche ursprünglich für die practische Geometrie und für die davon abhängigen Künste bestimmt war, bildet in der That die *allgemeine Theorie*, weil sie auf eine kleine Zahl von abstracten und unveränderlichen Principien und auf leichte und immer ganz bestimmte Constructionen alle die geometrischen Operationen zurückführt, welche sich in der Steinschneidekunst, Zimmermannskunst, bei der Perspective, der Fortification, der Gnomonik u. s. w. darbieten, und welche früher nach unzusammenhängenden, nicht bestimmten und zu wenig genauen Verfahrungsarten ausgeführt wurden. (S. die Note XXIII.)

§. 2. Aber ausser der Wichtigkeit, welche sie wegen dieser ersten Bestimmung erhielt, wodurch allen construirenden Künsten ein Character von Rationalität und Präcision gegeben wurde, hatte die beschreibende Geometrie noch einen andern sehr wichtigen Einfluss wegen der wesentlichen Dienste, welche sie in vielfacher Hinsicht der rationellen Geometrie und den mathematischen Wissenschaft im Allgemeinen leistete.

Die beschreibende Geometrie, welche nichts weiter als eine graphische Uebertragung der allgemeinen und rationellen Geometrie ist, diente in der That als leitendes Licht bei den Untersuchungen der analytischen Geometrie und bei der Beurtheilung ihrer Resultate. Durch die Natur ihrer Operationen, welche zum Zweck haben, eine vollständige und bestimmte Verbindung zwischen den in der Ebene wirklich verzeichneten Figuren und den im Raume gedachten Körpern herzustellen, machte sie uns mit den Formen dieser Körper vertraut, liess uns dieselben in der Vorstellung genau und schnell auffassen und verdopelte so die Mittel für unsre Nachforschungen in der Wissenschaft der Ausdehnung.

Die Geometrie kam auf diese Weise dahin, ihre Allgemeinheit und ihre anschauliche Klarheit leichter über die Mechanik und die physikalisch-mathematischen Wissenschaften zu verbreiten.

Dieser nützliche Einfluss der beschreibenden Geometrie erstreckte sich natürlich auch auf unsern Stil und unsre Sprache in der Mathematik, welche sie geläufiger und klarer machte, indem sie uns von der Complication der Figuren befreite, welche die Aufmerksamkeit von der Grundidee abzog und die Versinnlichung hinderte.

Mit Einem Wort, die beschreibende Geometrie war dazu geeignet, unser Auffassungsvermögen zu stärken und zu entwickeln, unserm Urtheil mehr Genauigkeit und Sicherheit, und unsrer Sprache Präcision und Klarheit zu verleihen. In dieser Hinsicht war sie den mathematischen Wissenschaften im Allgemeinen von unendlichem Nutzen.

§. 3. Indem man sie ins Besondere als eine einfache geometrische Lehre betrachtet, sehen wir noch, dass sie in der Wissenschaft der Ausdehnung bedeutende Hülfe leistet. Denn durch ihre Principien und dadurch, dass sie die beständige Beziehung zwischen den Figuren von drei Dimensionen und den ebenen Figuren angiebt, wird sie ein brauchbares Mittel für die Untersuchung und für den

Beweis in der rationellen Geometrie und durch ihre Verfahrungsarten, welche in der praktischen Geometrie das sind, was die vier arithmetischen Regeln in der Analysis, bietet sie ein Mittel zur Auflösung *a priori* bei solchen Aufgaben dar, in welchen die sonst Alles vermögende Geometrie des Descartes durch Hindernisse sich gehemmt sah, auf die sogar die Algebra stiess.

§. 4. Monge gab in seinem *Traité de Géométrie descriptive* die ersten Beispiele von der Nützlichkeit der innigen und systematischen Vereinigung der Figuren dreier Dimensionen und der ebenen Figuren. Mit Hülfe dieser Betrachtungen bewies er mit einer seltenen Eleganz und mit vollkommener Evidenz die schönen Theoreme, welche die Theorie der Pole bei den Curven des zweiten Grades ausmachen; die Eigenschaften sämmtlicher Aehnlichkeitspunkte bei drei Kreisen, dass je drei von ihnen in gerader Linie liegen; und verschiedene andre Sätze der ebenen Geometrie.

Seitdem haben die Schüler Monge's diese Geometrie mit Erfolg cultivirt, und zwar auf eine merklich neue Art, welcher man oft mit Recht den Namen der Schule des Monge gegeben hat, und welche darin besteht, dass in die ebene Geometrie die Betrachtungen der Geometrie dreier Dimensionen eingeführt werden. Die auf diese Art gemachten Entdeckungen sind zahlreich und ihre Auseinandersetzung bildet gewiss eine interessante Parthie in der Geschichte der Geometrie; wir können uns jedoch hier nicht erlauben, genauer darauf einzugehen, weil wir dadurch unser Werk zu sehr ausdehnen würden.[1])

§. 5. Das Verfahren, wodurch Monge die Figuren im Raume in ebene Figuren umwandelt, vermittelst senkrechter Projection auf zwei unter einander rechtwinklige Ebenen, bietet ein vorzügliches Mittel dar, um eine Menge von Sätzen aus der ebenen Geometrie an Figuren zu ent-

---

1) Der eine der Geometer, welche zuerst die ganze Wichtigkeit dieser Methode erkannten, war Brianchon, welcher in einem Memoire (im 13ten Heft des *Journal de l'école polytechnique*, 1810) neue und weitläufige Betrachtungen über diesen Gegenstand anstellte, von denen uns Poncelet sagt, dass er ihnen die erste Idee zu den schönen und zahlreichen geometrischen Untersuchungen verdanke, welche in seinem *Traité des propriétés projectives* enthalten sind. Auch verdankt die Schule des Monge dem Gergonne sehr viel, welcher ihr nicht allein durch seine eigenen Arbeiten sehr viel nützte, sondern auch dadurch, dass er die Arbeiten der alten Schüler der polytechnischen Schule in seine *Annales des Mathématiques* aufnahm.

decken, welche aus der Vereinigung dieser beiden Projectionen entstehen, so dass es keine Zeichnung (*épure*) in der beschreibenden Geometrie giebt, welche nicht irgend ein Theorem der ebenen Geometrie ausdrückte. Bei den meisten dieser Theoreme finden sich Linien, die unter einander parallel sind und auf der Durchschnittslinie der beiden Projectionsebenen senkrecht stehen; wenn man aber hernach von dieser Figur die Perspective in irgend einer Ebene nimmt, so laufen diese Linien in einem Punkte zusammen und das Theorem erhält eine grössere Allgemeinheit.

Hierin erkennt man offenbar ein sehr fruchtbares Mittel, um eine Menge von Sätzen aus der reinen Geometrie auf eine ganz neue und ganz besondre Art nachzuweisen. Man wird z. B. grössten Theils wenn nicht alle Sätze aus der Theorie der Transversalen und die meisten Eigenschaften der Kegelschnitte auf diese Art nachweisen können.

So wird z. B. bei der Auffindung des Durchschnittspunkts dreier Ebenen dieser Punkt der Durchschnittspunkt je zweier von den drei geraden Linien sein, in welchen sich diese Ebenen schneiden, und *die Projectionen dieser drei Geraden in einer der beiden Projectionsebenen werden sich in Einem Punkte schneiden.* Hieraus entsteht offenbar der Ausspruch folgenden Theorems:

Wenn man in einer Ebene zwei Dreiecke hat, deren Seiten, zwei und zwei, in drei Punkten zusammenlaufen, die auf Einer Geraden L liegen, und man zieht durch einen willkührlich gewählten Punkt drei Gerade nach den Scheiteln des ersten Dreiecks, welche in ihrer Verlängerung die Linie L in drei Punkten schneiden, so werden die geraden Linien, welche von diesen drei Punkten respective nach den drei Scheiteln des Dreiecks gezogen werden, in Einem Punkte zusammenlaufen.

Aus diesem Theorem liessen sich mehre Folgerungen ziehen; wir begnügen uns jedoch zu bemerken, dass man daraus den früher (2te Epoche, §. 28) erwähnten Satz des Desargues als Corollar ableiten kann, zu welchem Ende man nur anzunehmen hat, dass der willkührlich gewählte Punkt der Durchschnittspunkt zweier von *den* drei Geraden ist, welche die Scheitel des ersten Dreiecks mit den correspondirenden Scheiteln des zweiten verbindet.

Die Construction der Durchschnittslinien einer Ebene, welche durch drei Punkte, deren Projectionen gegeben sind, gehen soll, führt zu einem dem vorhergehenden

ähnlichen Theorem, welches als Corollar das Reciproke von dem des Desargues hat.

Diese Art des Beweises führt mit gleicher Leichtigkeit zu den Eigenschaften der Kegelschnitte und selbst zu denen der Curven aller Grade. Man denke sich z. B. in der Horizontal-Ebene einen Kegelschnitt, welcher die Basis eines Cylinders ist, für welchen die Richtung seiner Seitenlinien gegeben sein mag; darauf construire man den Durchschnitt dieses Cylinders mit der Vertical-Ebene und bilde die Perspective dieser Figur (*épure*) in irgend einer Ebene, so wird man eine Figur erhalten, welche einen ersten Kegelschnitt darstellt, der beliebig gezogen ist, und einen zweiten, der vermittelst des ersten durch den Durchschnitt gerader Linien, die von zwei festen Punkten ausgehen, construirt wurde. — Wenn man statt des ersten Kegelschnitts eine Curve von einem beliebigen Grade wählt, so erhält man eine zweite Curve, welche von demselben Grade ist.

Man sieht hierin das Mittel, in einer Ebene irgend eine Curve in eine andre desselben Grades zu transformiren.

Es ist klar, dass sich die Tangenten an der zweiten Curve vermittelst der Tangenten an der ersten bestimmen lassen, und dass sich diese Tangenten, zwei und zwei, in solchen Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen. Diese Gerade wird die Durchschnittslinie der beiden Projections-Ebenen sein. — Dieser Umstand bietet offenbar ein Theorem aus *der* Geometrie dar, welche sich auf Curven aller Grade bezieht.

Wir wollen, als letztes Beispiel, einen verticalen Cylinder annehmen, der zur Basis in der Horizontal-Ebene einen Kegelschnitt hat, und ihn durch eine ganz willkührlich gewählte Ebene schneiden; dann wird die Projection der Durchschnitts-Curve in der Vertical-Ebene ein zweiter Kegelschnitt sein. Die Tangenten an diesen beiden Kegelschnitten werden sich je zwei und zwei entsprechen, indem sie die Projectionen jeder Tangente darstellen, welche an der Durchschnittscurve des Cylinders und der Transversal-Ebene gezogen wird; wenn man also vermittelst dieser Projectionen die Punkte im Raume sucht, in welchen diese Tangenten eine dieser Projections-Ebenen treffen, so werden diese Punkte eine gerade Linie bilden, welche die Durchschnittslinie der Transversal-Ebene mit der Projections-Ebene ist. Dieser Umstand führt zu einer allgemeinen Eigenschaft der beiden Kegelschnitte, welche

die Projectionen des im Raume gelegenen Kegelschnittes sind. Bildet man hiervon die Perspective in einer Ebene, so folgt daraus eine allgemeine Eigenschaft des Systems irgend zweier Kegelschnitte, nämlich:

Wenn man durch den Durchschnittspunkt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte in einer Ebene eine beliebige Transversale zieht, welche jede der beiden Curven in zwei Punkten trifft, und wenn man in diesen Punkten die Tangenten zieht, so werden sich die Tangenten der ersten Curve mit den Tangenten der zweiten in vier Punkten schneiden, von denen je zwei auf zwei festen Geraden liegen, welche auch die Transversale sein mag, die durch den Durchschnittspunkt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte gezogen wird.

Es giebt noch mehre andre Arten, durch Betrachtungen der körperlichen Geometrie dieses für die Theorie der Kegelschnitte so wichtige Theorem zu beweisen; z. B. wenn man durch eine Curve des zweiten Grades zwei Kegel legt, deren Scheitel zwei beliebige Punkte im Raume sind, und man sucht die zweite Durchschnittscurve dieser beiden Kegel, so wird diese ein zweiter Kegelschnitt sein. Die Relationen zwischen diesen beiden Curven, welche im Raume auf zwei Kegeln liegen, sind leicht zu erkennen. Wenn man nun den Riss (*épure*) construirt, welcher die Projection des zweiten Kegelschnitts in der Ebene des ersten geben wird, so erhält man ein System zweier Kegelschnitte in Einer Ebene, für welche alle Relationen der beiden Curven im Raume interessante Eigenschaften ergeben, worunter sich auch das eben ausgesprochene Theorem befindet.

§. 7. Diese Beispiele reichen hin, um zu zeigen, wie jeder Entwurf (*épure*) der beschreibenden Geometrie ein Theorem der ebenen Geometrie ausdrücken kann, und wir glauben behaupten zu können, dass dieser Weg zu einer reichen Fundgrube von geometrischen Wahrheiten führt. In dieser Hinsicht bietet die beschreibende Geometrie von Monge eine Methode der rationellen Geometrie dar. Wir wollen sie die Methode der *Umwandlung der Figuren* (*transmutation des figures*) nennen.

Ausser diesem ersten Resultat der beschreibenden Geometrie, der Umwandlung von Eigenschaften der Figuren dreier Dimensionen in Eigenschaften ebener Figuren, müssen wir noch eine andre besondre Anwendung dieser Geometrie anmerken, dass sie nämlich zu unendlich vielen Mitteln führt, in der Ebene Figuren in andere Figuren

derselben Art zu transformiren, so wie es De La Hire und Newton gethan haben. Besonders bietet sie unendlich viele Mittel dar, um den Zweck zu erreichen, welchen sich De La Hire vorgesetzt hatte, in der Ebene vermittelst des Zirkels die verschiedenen Kegelschnitte zu beschreiben und so die Operationen der Perspective auf die Ebene zu übertragen. Es reicht in der That hin, sich einen Kegel mit kreisförmiger Basis zu denken, dessen Scheitel irgend ein Punkt im Raume ist, und diesen Kegel durch eine willkührlich gelegte Ebene zu schneiden: der Schnitt wird ein Kegelschnitt sein, von dem eine der Projectionen als eine *Transformirte* einer der Projectionen der Kegelbasis betrachtet werden kann; und da diese Transformirte sich durch ebene Operationen construiren lässt, so findet sich dadurch der Zweck De La Hire's erreicht.

Diese allgemeine Auflösung des Problems von De La Hire wird, wie man es aus der Unbestimmtheit der verschiedenen *Data* der Aufgabe vermuthen kann, zu einer grossen Anzahl von verschiedenen Methoden führen und man wird auf mehre Arten zu der des De La Hire gelangen.

§. 8. Man hat zwar die Dienste anerkannt, welche Monge dadurch leistete, dass er uns mit den Betrachtungen der Geometrie dreier Dimensionen vertrauter machte und uns lehrte, abwechselnd von dieser Geometrie zur ebenen und rückwärts von dieser wieder zu jener überzugehen; man hat aber wohl nicht in der besondern Art des Beweises, wovon wir Beispiele angeführt haben, die ganze darin enthaltene Wichtigkeit erkannt, theils weil die geometrischen Wahrheiten, auf welche man dabei zurückgeführt werden kann, zum grossen Theil damals noch neu waren, theils auch, weil es das erste Beispiel einer *Umwandlung* (*transmutation*) von Figuren dreier Dimensionen in ebene Figuren und umgekehrt war. Die Dienste, welche von der bis dahin allein gebräuchlichen Art der Transformation, von der Perspective geleistet waren, von der Pascal einen so glücklichen Gebrauch gemacht und bei welcher De La Hire in seinem *Traité des planiconiques* alle Operationen auf ebene Constructionen zurückgeführt hat, waren von der Art, dass sie den ganzen Vortheil der andern Transformationsarten, die sich im Raume oder in der Ebene darbieten können, begreiflich machten.

Ausserdem aber, wenn man über das Verfahren der Algebra nachdenkt und den Grund aufsucht, weshalb sie so ungeheure Vortheile in die Geometrie gebracht hat, sieht man da nicht, dass sie einen grossen Theil dieser Vor-

theile der Leichtigkeit der Transformationen verdankt, welchen man die von Anfang herein eingeführten Ausdrücke unterwirft? Transformationen, deren Geheimniss und Mechanismus die wahre Wissenschaft bilden und der beständige Gegenstand für die Untersuchungen der Analysten sind. Ist es nicht natürlich, zu versuchen, in die reine Geometrie analoge Transformationen einzuführen, welche unmittelbar auf den gegebenen Figuren und ihren Relationen beruhen?

Die Theorie der stereographischen Projection, vermöge deren man auf Systeme von ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten (worunter sich auch gerade Linien und Punkte befinden können) die natürlichen und evidenten Eigenschaften der Systeme ebener Curven, die auf einer Oberfläche zweiten Grades verzeichnet sind, anwendet, diese Theorie, sag' ich, ist klarer Beweis für die Vortheile der geometrischen Transformationen. Verschiedene Methoden, welche sich, wie wir zeigen werden, an die beiden allgemeinen Principien in der Lehre von den ausgedehnten Grössen, die *Dualität* und die *Homographie* der Figuren, anschliessen, sind solche Methoden der Transformation.

Diese Gattungen von Methoden, deren Nützlichkeit uns hinlänglich erwiesen scheint, verdienen cultivirt zu werden; und wenn wir nicht irren, so werden die Geometer, welche über diesen Gegenstand nachdenken wollen, noch mehr die philosophische Wichtigkeit der Methode der Transformation würdigen lernen, als wir es versucht haben aus den Principien der beschreibenden Geometrie von Monge hervortreten zu lassen.

Géométrie perspective, von *Cousinery.*

§. 9. Die Lehren des Monge haben schon zu einem Werke derselben Gattung Veranlassung gegeben, von dem sich hier durch Anticipirung zu sprechen die Gelegenheit darbietet, die *Géométrie perspective* von Cousinery, Ingenieur der Brücken und Wege (in 4., 1828), welche dadurch von der Methode des Monge verschieden ist, dass der Verfasser nur von einer einzigen Projection oder Perspective auf eine Ebene Gebrauch macht.

Eine Ebene, welche irgend wie im Raume liegt, wird in dem Entwurf (*épure*) durch zwei parallele Gerade bestimmt, von denen die eine die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Projectionsebene ist, und die zweite die Durchschnittslinie einer zweiten Ebene, welche durch das Auge oder den Centralpunkt, von welchem die projecirenden Linien ausgehen, parallel mit der ersten Ebene gelegt

ist. Eine Gerade wird auf analoge Art durch zwei Punkte bestimmt, von welchen der eine der ist, in welchem die Gerade die Projectionsebene trifft, und der zweite derjenige, in welchem eine zweite Gerade, die durch das Auge parallel mit der ersten gezogen wird, durch dieselbe Ebene geht. Um einen Punkt zu bestimmen, muss man zwei Gerade kennen, auf welchen er zu gleicher Zeit liegt, von denen die eine durch das Auge gehen und sich auf einen Punkt in der Perspective reduciren kann. Diese Vorschriften sind einfach und geistreich; die Zeichnungen (*épures*), auf welche sie führen, sind nicht zu sehr complicirt und sind wie die in der beschreibenden Geometrie von Monge dazu geeignet, verschiedene Theoreme der Geometrie auszudrücken, wie es Cousinery gezeigt hat.

Ohne die Vortheile zu untersuchen, welche diese Methode vielleicht in industrieller Hinsicht wird darbieten können, d. h. als ein der beschreibenden Geometrie von Monge ähnliches Hülfsmittel für die construirenden Künste, betrachten wir sie nur als ein Mittel zur Transformation der Figuren und als eine Methode für die Aufsuchung und den Beweis einer Menge von geometrischen Wahrheiten; und in dieser Hinsicht scheint sie uns die Aufmerksamkeit der Liebhaber der Geometrie zu verdienen. Indem Cousinery sich auf einige Beispiele beschränkte, welche hinreichend waren, die Nützlichkeit seiner Methode darzuthun, eröffnete er ein neues Feld für geometrische Speculationen, auf welchem man sicher sein kann, noch eine reichliche Nachlese zu halten.

Neue Beweisart.

§. 10. In Bezug auf die beschreibende Geometrie von Monge bleibt uns noch übrig, von dem Einflusse zu sprechen, den sie auf die Fortschritte der Geometrie gehabt hat, indem hierdurch in die Wissenschaften eine Beweisart eingeführt wurde, welche die Alten als eine, mit ihren strengen Principien unvereinbare Freiheit verworfen hatten, welche aber unter den Händen von Monge und den Geometern seiner Schule zu den glücklichsten Resultaten geführt hat.

Um diese Methode zu erklären, führen wir an: „dass sie darin besteht, die Figur, an welcher man irgend eine allgemeine Eigenschaft beweisen will, unter solchen Umständen der allgemeinen Construction zu betrachten, in denen das Vorhandensein gewisser Punkte, gewisser Ebenen oder gewisser Linien, welche unter andern Umständen imaginär werden, den Beweis erleichtert. Darauf wendet man dieses Theorem, welches man auf diese

Weise bewiesen hat, auf die Fälle der Figur an, in welchen diese Punkte, diese Ebenen und Linien imaginär werden; d. h. man betrachtet es als wahr unter allen Umständen der allgemeinen Constructionen, welche diese Figur, worauf sich dasselbe bezieht, darbieten kann." Die Geometrie von Monge liefert viele schöne Beispiele von dieser Art zu verfahren.

Um z. B. zu beweisen, dass bei Kegeln, welche Oberflächen zweiten Grades umgeschrieben sind, und welche ihre Scheitel in einer geraden Linie haben, die Ebenen der Berührungscurven alle durch *eine* Gerade gehen, nimmt Monge an, dass man durch die gerade Linie, welche der Ort für die Scheitel der Kegel ist, zwei tangirende Ebenen an die Oberflächen legen kann. Die Berührungscurven der Kegel werden dann alle durch die beiden Berührungspunkte der tangirenden Ebenen gehen, und ihre Ebenen werden also alle durch die Gerade gehen, welche diese beiden Punkte verbindet. Das Theorem ist also für die angenommene Lage der Figur bewiesen, und Monge sagt, dass dieser Beweis sich auch auf den Fall erstreckt, dass man nicht tangirende Ebenen an die Oberfläche legen kann, welche durch die Gerade gehen, die der geometrische Ort für die Scheitel der Kegel ist, d. h. also, dieses Theorem findet für jede mögliche Lage dieser Geraden statt.

Diese Methode von Monge scheint ihren Grund in der Bemerkung zu finden, dass eine Figur in ihrer allgemeinsten Construction zwei verschiedene Fälle darbieten kann; in dem ersten sind gewisse Grössen (Punkte, Ebenen, Linien oder Oberflächen), von welchen nicht nothwendig die allgemeine Construction der Figur abhängt, sondern welche zufällige Folgen (*conséquences contingentes*) davon sind, reell und erkennbar; im zweiten Fall erscheinen diese Grössen nicht mehr, sie sind imaginär geworden, während die allgemeinen Bedingungen der Construction der Figur dieselben geblieben sind.

Wenn man z. B. eine Oberfläche zweiten Grades und eine Gerade darstellen will, welche unter einander die möglich allgemeinste Lage haben, so sind hierbei zwei Fälle möglich: der, dass die gerade Linie die Oberfläche trifft, und der, dass sie dieselbe nicht trifft. Beide Fälle bieten dieselbe Allgemeinheit dar, weil in jedem von ihnen die gerade Linie ganz willkührlich, ohne Rücksicht auf die schon gegebene Lage der Oberfläche des zweiten Grades, gezogen wird; sie werden sich nur dadurch unterscheiden, dass die beiden Durchschnittspunkte der geraden

Linie und der Oberfläche im ersten Fall reell sind, im zweiten imaginär. Wir sagen dann, dass diese beiden Punkte eine von den *zufälligen* Beziehungen (*relations contingentes*) des Systems der Oberfläche und der Geraden sind.

Wir dürfen nicht besonders anmerken, dass wir hier keineswegs von besondern Umständen bei der Construction einer Figur sprechen wollen, für welche man den Ausdruck *besondre Fälle* (*cas particuliers*) hat, und welche die sind, in denen mehre Punkte, Linien oder Oberflächen zusammenfallen. So wäre bei dem vorigen Beispiel das ein *besondrer Fall*, wenn die gerade Linie Tangente für die Oberfläche des zweiten Grades würde; und ein Theorem, welches an dieser Figur bewiesen würde, könnte nicht so betrachtet werden, als müsste es sich nothwendig auf die allgemeine Figur anwenden lassen.

§. 11. Diese Methode, um die es sich hier handelt, scheint uns bei den schönen Beispielen entstanden zu sein, welche uns Monge in seiner beschreibenden Geometrie gegeben hat. Sie wurde seitdem von dem grössten Theil seiner Schüler befolgt, aber immer stillschweigend, wie es Monge selbst gethan hatte, d. h. ohne in solche Betrachtungen einzugehen, wie wir es gethan haben, und ohne für diese gewagte Manier zu raisonniren, eine Rechtfertigung zu versuchen.

Princip der Continuität.

Erst in letzterer Zeit hat Poncelet diese Untersuchung aufgenommen, welche gründlich behandelt zu werden verdient und welche er an einen wichtigen Punkt in der rationellen Geometrie angeknüpft hat. Wir meinen das *Princip der Continuität*, welches dieser gelehrte Geometer in seinem *Traité des propriétés projectives* ausgesprochen und entwickelt und davon die glücklichsten Anwendungen gemacht hat; welches aber, da es nicht streng bewiesen war, von den andern berühmten Academikern nur als eine starke Induction und als ein herrliches Mittel betrachtet wurde, um Wahrheiten zu errathen und aufzufinden, aber nicht um geradezu und in allen Fällen den strengen Beweis zu ersetzen.

Man muss uns zugestehen, wenn die Geometer, indem sie die Methode von Monge oder das Princip der Continuität anwenden, diese Verfahrungsart durch rein geometrische Betrachtungen, welche aus zuvor schon vorhandenen und *a priori* bewiesenen Principien geschöpft wären, beweisen sollten, so würden die bis heute be-

kannten Mittel nicht zureichen. Und wenn ihr Weg, wie der des Monge, beständig sicher war und keine Dunkelheit in ihrem Geiste zurückliess, so scheinen sie mir dieses Vertrauen nur durch das Gefühl der Unfehlbarkeit erhalten zu haben, welches in ihnen die algebraische Analysis erzeugt hatte.

Beweis der Methode von Monge.

§. 12. Wir glauben in der That, dass man in jedem einzelnen Fall die in Rede stehende Methode *a posteriori* durch ein, auf allgemeine Verfahrungsarten der Analysis gegründetes, Raisonnement rechtfertigen könne.

Es reicht hin zu bemerken, dass die beiden allgemeinen Umstände der Construction der Figur, von denen wir gesprochen haben, und deren Unterschied wichtig ist, weil sie uns der wahre Ursprung der Frage, die uns beschäftigt, zu sein scheint, niemals in der Anwendung der endlichen Analysis auf Geometrie in Betracht kommen. Die Resultate, welche man durch diese Methode erhält, wenden sich in ihrer ganzen Ausdehnung auf die beiden allgemeinen Umstände der Construction an. Diese Resultate sind Theoreme, welche sich auf die *integrirenden und bleibenden Theile* (*parties intégrantes et permanentes*) der Figur beziehen, welch der allgemeinen Construction angehören und in beiden Fällen immer reell sind; Theoreme, ganz unabhängig von den *secundären oder zufälligen Parthien* der Figur (*parties secondaires, ou contingentes et accidentelles*), welche ohne Unterschied reell und imaginär sein können, ohne die allgemeinen Bedingungen der Construction der Figur zu ändern.

Wenn also diese allgemeinen Resultate, gleichgültig an welcher von diesen beiden Figuren, bewiesen sind, so kann man daraus schliessen, dass sie an der andern Figur ebenfalls stattfinden.

Diese Art, die Lehre von Monge zu rechfertigen, welche man auch als einen Beweis *a posteriori* für das Princip der Continuität betrachten kann, leidet in der Geometrie dieselben Ausnahmen, als dieses Princip; denn diese Ausnahmen werden keine anderen sein, als die, auf welche die Analysis selbst stösst. So z. B. muss man sich hüten, dieses Princip auf Untersuchungen anzuwenden, in denen man, wenn man die genannten allgemeinen Umstände der Construction in die Analysis eingehen lassen will, eine andre Sache zu verändern fände, als die Zeichen von den Coefficienten der veränderlichen Grössen; z. B. die Zeichen der Exponenten dieser Grös-

sen.[2]). Man darf auch nicht dieses Princip auf Untersuchungen anwenden, welche, analytisch behandelt, bestimmte Integrale erfordern, weil eine einfache Veränderung des Zeichens, welches den Unterschied zwischen den beiden allgemeinen Umständen der Construction der Figur ausmacht, die Resultate der Analysis gänzlich verändern würde.

Aber bei allen Fragen der Geometrie, welche nur die Hülfe der endlichen Analysis erfordern, so wie uns Descartes deren Anwendung gelehrt hat, kann man volles Vertrauen in die Methode von Monge setzen. Wenn man z. B. im Raum einen Kegel zweiten Grades betrachtet und eine Transversal-Ebene, welche ganz allgemein irgend eine Lage gegen den Kegel hat, so wird diese Ebene zwei verschiedene Lagen haben können, welche auf gleiche Weise dieser Bedingung der grösstmöglichen Allgemeinheit genügen. In der ersten Lage wird sie den Kegel in einer Hyperbel schneiden, für welche man die beiden Asymptoten ziehen kann; in der zweiten schneidet sie den Kegel in einer Ellipse; und die beiden Geraden, welche in der ersten Figur Asymptoten der Hyperbel waren, werden in der zweiten Figur imaginär sein. Nichts desto weniger gehört jede allgemeine Eigenschaft der ersten Figur, selbst wenn sie mit Hülfe der beiden Asymptoten bewiesen wird, der zweiten Figur an; vorausgesetzt, natürlich, dass sich diese Eigenschaft nicht direct oder *implicite* auf die Asymptoten bezieht, weil sie in diesem Fall nicht eine allgemeine Eigenschaft wäre, die unabhängig von den Umständen der Construction ist, welche machen, dass die Asymtoten reell oder imaginär werden.

Das, was wir eben von der Ellipse und Hyperbel sagten, lässt sich nicht auf die Parabel anwenden, weil die Lage der transversalen Ebene, welche als Schnitt am Kegel die Parabel giebt, eine besondere und nicht mehr vollkommen allgemein ist. Es würde also eine Eigenschaft der Parabel, welche man dadurch bewiesen hätte, dass man sich auf die besondere Lage der transversalen Ebene gegen den Kegel stützte, nicht vermöge des Princips von

---

2) Wir glauben nicht, dass solche Untersuchungen vorkommen können. Denn die beiden allgemeinen Umstände der Construction einer Figur, deren Betrachtung, bei unsrer Art die Methode des Monge anzusehen, die Basis ist, scheinen uns in dem algebraischen Ausdruck von der Figur, nur durch den Unterschied der Zeichen der unabhängigen Coefficienten verschieden zu sein.

Monge allein, auch der Ellipse oder Hyperbel angehören müssen.

§. 13. Dieselben Betrachtungen finden auch für die Oberflächen des zweiten Grades statt. Sie theilen sich, in gewisser Hinsicht, in zwei Klassen: für die eine dieser Oberflächen (das Hyperboloid mit einem Fach) berührt die tangirende Ebene für jeden ihrer Punkte dieselbe in zwei geraden Linien, die ganz in der Oberfläche liegen; für die beiden andern Oberflächen (das Ellipsoid und das Hyperboloid mit zwei Fächern), sind diese beiden Geraden imaginär. Es wird mithin eine allgemeine Eigenschaft des Hyperboloids, welche mit Hülfe der beiden in Rede stehenden Geraden bewiesen wird, vorausgesetzt, dass sie dieselben nicht direct oder *implicite* in ihrem Ausspruch enthält, auch ebenfalls für die beiden andern Oberflächen gelten.

Wenn man z. B. die beiden Theoreme beweisen will, welche die Lehre von den stereographischen Projectionen ausmachen, so wählt man das Hyperboloid mit Einem Fach, für welches diese beiden Theoreme mit Hülfe der beiden Geraden, welche man durch jeden Punkt in seiner Oberfläche ziehen kann, evident sind; und hieraus schliesst man unmittelbar mit vollkommner Sicherheit, dass sie für die andern Oberflächen des zweiten Grades ebenfalls stattfinden.

Man sieht ein, dass, wenn man diese beiden Theoreme, statt sie in Bezug auf das Hyperboloid mit Einem Fach, welches eine Oberfläche von eben so allgemeiner Construction, als das Ellipsoid und Hyperboloid mit zwei Fächern ist, für die Kugel bewiesen hätte, dass man sie nicht vermittelst der Methode von Monge allein hätte auf die andern Oberflächen des zweiten Grades anwenden können, weil die Kugel nicht eine Oberfläche von allgemeiner Construction, sondern im Gegentheil von besondrer Construction ist.

Methode der Verallgemeinerung.

§. 14. Wir können aber ferner sagen, dass man mit Hülfe einer andern Methode die allgemeinen Eigenschaften der Kugel auf das Ellipsoid anwendet; und alsdann werden sie, vermittelst der Methode des Monge, allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiten Grades. Diese Methode der Transformation, welche wir in der *Correspondance polytechnique* (tom. III, p. 326) auseinandergesetzt haben, ist analytisch; sie besteht in dem proportionalen Wachsenlassen der Coordinaten jedes Punkts der Sphäre. Wir

haben uns derselben bedient, um die beschreibenden Eigenschaften und die, welche sich auf das Volumen der Körper beziehen, zu transformiren; seitdem haben wir sie noch auf die Eigenschaften angewandt, welche sich auf die Länge der krummen Linien und auf den Flächeninhalt der krummen Oberflächen beziehen. Wir haben sie auch noch in andrer Hinsicht verallgemeinert, indem wir sie dazu geeignet machten, die allgemeinen Eigenschaften der Paraboloide auf die Hyperboloide zu übertragen, und die der Kugel auf die Ellipsoide. Da aber diese allgemeine Methode als besondrer Fall in unserm allgemeinen Princip der *homographischen Deformation* enthalten ist, so gründen wir nichts weiter auf ihre Anwendung und ihren besondern Grad von Nützlichkeit.

Wir müssen aber noch einen charakteristischen Unterschied anführen, welcher diese Methode von jener unterscheidet, von der wir zuerst sprachen, obgleich man durch die eine wie durch die andre ein erstes Resultat verallgemeinert.

Die eben genannte Art der Deformation ist eine wirkliche *Methode der Verallgemeinerung*, welche auf eine Figur von vollkommen allgemeiner Construction die bekannten Eigenschaften einer Figur von besondrer Construction überträgt. Die andre Methode dagegen, welche von den zufälligen Relationen Gebrauch macht, operirt nur mit einer Figur von der allgemeinsten Construction und trägt sie auf eine andre Figur von nicht weniger allgemeiner Construction über, welche sich von der ersten Figur nur durch secundäre oder zufällige Umstände unterscheidet, die zum Beweise gedient haben, welche aber, indem sie gewisser Maassen aus dem Resultat des Raisonnements, in das man sie eingeführt hat, eliminirt sind, weder direct noch *implicite* in dem Ausspruch des Satzes, um dessen Beweis es sich handelt, Etwas zu bedeuten haben.

§. 15. Diese Methode scheint uns mehr, als irgend eine andre, den Namen einer Methode der *Anschauung* zu verdienen, weil sie sich wirklich auf das *Anschauen der Sachen* gründet. Aber dieser Charakter der Anschauung ist im Allgemeinen den Methoden eigenthümlich, welche auf der reinen Betrachtung der Ausdehnung beruhen, und besonders denen, in welchen die Betrachtung der Figur dreier Dimensionen zum Beweise von Sätzen aus der ebenen Geometrie zu Hülfe genommen wird. Diese Benennung, Methode der Anschauung, welche im Allgemeinen der Methode von Monge zukommt, würde also das Princip,

vermöge dessen man auf einen allgemeinen Zustand eines Systems die für einen andern, ebenfalls allgemeinen Zustand desselben Systems, bewiesenen Eigenschaften anwendet, nicht characterisiren. Aber die Benennung, *Methode* oder *Princip der zufälligen Relationen* (*principe des relations contingentes*), scheint uns dies hinlänglich bestimmt und vollständig zu thun.

Wir ziehen diese Benennung der andern, *Princip der Continuität*, vor, weil dieses Princip die Idee des Unendlichen in sich schliesst, welche keineswegs in der Methode der zufälligen Relationen enthalten ist. Wir werden diese Idee noch in der XXIVten Note weiter entwickeln.

Wir könnten viele Beispiele von der Anwendung anführen, welche man stillschweigend von dem Princip der zufälligen Relationen gemacht hat; aber wir sind auf eine neue Aufgabe gekommen, welche uns vorzüglich geeignet scheint, die Anwendung und die Nützlichkeit dieses Princips zu beweisen; es ist nämlich die, in welcher es sich darum handelt, der Grösse und Richtung nach die drei Hauptaxen eines Ellipsoids zu bestimmen, von welchem drei conjugirte Durchmesser gegeben sind. Die Auflösung dieser Aufgabe dürfte sich vielleicht durch keine andre Methode eben so leicht ergeben. (S. Note XXV.)

§. 16. Dieses Princip der zufälligen Relationen wird sich vielleicht einmal auf irgend ein metaphysisches Princip der begrenzten Ausdehnung gründen, welches mit Ideen der Homogeneität zusammenhängt, wie man dergleichen in die Naturwissenschaften, hauptsächlich in die der organisirten Körper, eingeführt hat. Schon jetzt erscheint es als zu einem gewissen allgemeinen Princip der Dualität gehörig, welches die Körper selbst darzubieten scheinen, bei denen man zwei Arten von Elementen, permanente und veränderliche Elemente, Unbeweglichkeit und Bewegung anerkennen muss.

Aber bis unser Princip der *zufälligen Relationen a priori* bewiesen sein wird, scheint es uns durch die Verfahrungsarten der Analysis, wie wir gezeigt haben, in so fern hinlänglich gerechtfertigt zu sein, dass man es mit Sicherheit anwenden kann.

Es wäre übrigens ein Glück für die Fortschritte der rationellen Geometrie, wenn kein Geometer die strengen Principien der Alten verlassen möchte, und wenn die Einen, den leichten Vorschriften der Methode von Monge vertrauend, die Wissenschaft mit neuen Wahrheiten berei-

chern, die Andern aber versuchen möchten, diese Wahrheiten auf anderm, jede wünschenswerthe Strenge darbietenden Wege zu begründen. Diese Art der Gemeinschaft und dieser doppelte Zweck würden der Geometrie sehr nützlich sein und mächtig dazu beitragen, sie mit neuen Principien zu beschenken und ihre wahre Metaphysik zu gründen. In der That, nachdem man durch die, in einiger Hinsicht oberflächliche Methode von Monge, der irgend einen äussern und am Tage liegenden, aber zufälligen und veränderlichen Umstand erfasst und daraus Nutzen zieht, eine Wahrheit entdeckt hat, muss man, um diese Wahrheit durch bleibende und von den veränderlichen Umständen der Construction der Figur unabhängigen Gründe festzustellen, auf den Grund der Sache gehen und nicht mehr, wie Monge, von den secundären und zufälligen Eigenschaften Gebrauch machen, welche in gewissen Fällen zur Erklärung verschiedener Parthien der Figur dienen, sondern vielmehr nur von den innern und bleibenden Eigenschaften derselben Theile der Figur. Wir verstehen unter innern und bleibenden Eigenschaften solche, welche in allen Fällen zur Erklärung und Construction der Figur dienen, welche wir *integrirende* oder *Haupt-Theile* genannt haben; während die *secundären* und *zufälligen* Eigenschaften die sind, welche unter gewissen Umständen der Construction der Figur verschwinden und imaginär werden können.

Die Theorie der Kreise in einer Ebene bietet uns ein Beispiel von diesem Unterschied dar, welchen wir zwischen den *zufälligen* und den *bleibenden* Eigenschaften einer Figur gemacht haben. Das System zweier Kreise gestattet immer das Vorhandensein einer gewissen geraden Linie, deren Betrachtung in dieser ganzen Theorie von Nutzen ist. Wenn beide Kreise sich schneiden, so ist diese Gerade ihre *gemeinschaftliche Sehne*, und dieser einzige Umstand reicht hin, um sie zu erklären und zu construiren; dieses ist eine von den Eigenschaften, welche wir *zufällige* genannt haben. Wenn aber die beiden Kreise sich nicht schneiden, so verschwindet diese Eigenschaft, obgleich die Gerade dennoch immer besteht und ihre Betrachtung von ausserordentlichem Nutzen in der Theorie des Kreises ist. Man muss daher diese Gerade definiren und construiren durch irgend eine andre ihrer Eigenschaften, welche stattfindet in allen Fällen der allgemeinen Construction der Figur, welche hier das System der beiden Kreise ist. Diese wird eine ihrer *permanenten* Eigenschaften sein. Durch diese Betrachtungen bewogen nannte

Gaultier [3]) diese Gerade nicht die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise, sondern *axe radical*, ein Ausdruck, der aus einer bleibenden Eigenschaft dieser Geraden geschöpft ist, die darin besteht, dass die Tangenten, welche man von irgend einem ihrer Punkte an beide Kreise zieht, unter einander gleich sind, so dass jeder Punkt dieser Geraden der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet. [4])

Die Kenntniss der innern und bleibenden Eigenschaften der verschiedenen Theile einer Figur, auf deren Aufsuchung man geführt wird, wenn die zufälligen Eigenschaften verschwinden, wird zur Vervollkommnung der geometrischen Theorien sehr dienlich sein, indem sie diesen ihre ganze ihnen zukommende Allgemeinheit und oft den Grad der anschaulichen Evidenz giebt, welche einen Hauptcharakter der Methode des Monge ausmacht.

---

3) *Journal de l'école polytechnique*. 1813. Heft 16.

Das schöne Memoire von Gaultier enthält die erste wirklich allgemeine Lösung der Aufgabe über die Berührung von Kreisen und von Kugeln; eine Lösung, welche anzunehmen erlaubt, dass die Kreise Punkte oder gerade Linien werden und die Kugeln Punkte oder Ebenen.

4) Wegen derselben Eigenschaft hat Steiner diese Gerade *die Linie der gleichen Potenzen* genannt. (S. *Journal von Crelle*, t. I. und *Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 295.

Diese Gerade erfreut sich, wie man weiss, noch vieler andern bemerkenswerthen permanenten Eigenschaften, welche zu ihrer Construction hinreichen und welche zu ihrer Definition ebenfalls hätten dienen können. Wenn man z. B. irgend einen Kreis beschreibt, welcher die beiden gegebenen schneidet, so treffen sich die gemeinschaftlichen Sehnen auf dieser Geraden.

Wenn man durch einen der beiden Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise eine Transversale zieht, und man in den Durchschnittspunkten derselben mit den Kreisen die Tangenten construirt, so werden die Tangenten des ersten Kreises respective diejenigen des zweiten, welche nicht mit ihnen parallel sind, in zwei Punkten treffen, welche auf dieser Geraden liegen.

Diese letzte Eigenschaft findet auch bei dem Systeme irgend zweier Kegelschnitte statt, die in einer Ebene gezeichnet sind, und wir haben uns derselben bedient, um zwei Gerade zu definiren, welche immer bei dem System zweier Kegelschnitte vorhanden sind und von denen jede dieselbe Rolle in Bezug auf die beiden Kegelschnitte spielt, als die *axe radical* in Bezug auf zwei Kreise. Da der Ausdruck der *axe radical* sich auf eine Relation der Grösse, die den Kreisen eigenthümlich ist, gründete, so konnte er nicht für diese beiden Geraden passen und wir haben sie deshalb *axes de symptose* genannt, weil auf ihnen diejenigen Tangenten der beiden Kegelschnitte zusammentreffen, welche an Punkten gezogen werden, die auf einer von einem ihrer Mittelpunkte der Homologie ausgehenden Transversale liegen. (S. *Annales des Mathématiques*, tom. XVIII, p. 285.)

So hat der Umstand, dass die *axe radical* zweier Kreise ihre gemeinschaftliche Sehne ist, wenn sie sich schneiden, Monge darauf geführt, indem er drei Kreise in einer Ebene als die diametralen Schnitte dreier Kugeln betrachtete, nachzuweisen, dass die drei *axes radicaux* dieser Kreise durch *einen* Punkt gehen. Dieses Theorem ist nicht weniger evident, wenn man bei der Erklärung dieser drei Axen von ihrer durch Gaultier erkannten permanenten Eigenschaften ausgeht. Denn man sieht sogleich, dass der Durchschnittspunkt zweier von diesen Axen sich einer charakteristischen Eigenschaft der Punkte der dritten Axe erfreut; woraus also folgt, dass er auf dieser dritten Axe liegen muss.

Das Imaginäre in der Geometrie.

§. 17. Die Lehre von den zufälligen Relationen scheint uns noch einen andern Vortheil darbieten zu können, nämlich eine genügende Erklärung von dem Wort *imaginär* zu liefern, welches gegenwärtig in der reinen Geometrie gebraucht wird, wo es ein *Sein* des Verhältnisses ohne Existenz ausdrückt, von welchem man aber gewisse Eigenschaften annehmen kann, deren Hülfe man momentan in Anspruch nimmt, und bei welchem man dasselbe Raisonnement, als bei reellen Objecten anwendet. Diese Idee des Imaginären, welche zuerst dunkel und paradox erscheint, erhält in der Theorie der zufälligen Relationen einen klaren, bestimmten und legitimen Sinn. (S. Note XXVI.) In dieser Hinsicht erscheint uns der Unterschied, welchen wir zwischen den innern und bleibenden Eigenschaften der Figuren und zwischen ihren vergänglichen und zufälligen gemacht haben, vielleicht nicht ganz unnütz.

Monge's Styl in der Geometrie.

§. 18. Die beschreibende Geometrie von Monge ist eine Quelle von vorzüglichen Lehren, welche noch nicht versiegt ist. Nachdem wir hierin mehr oder weniger entwickelt den Keim mehrer Methoden erkannt haben, welche die Macht der Geometrie vergrössern und ihr Gebiet erweitern, finden wir auch darin den Anfang einer neuen Schreib- und Sprechart für diese Wissenschaft. Der Styl ist in der That so innig mit dem Geist der Methoden verbunden, dass er mit ihnen fortschreiten muss; so wie auch umgekehrt, wenn der Styl besser wird, dieses einen bedeutenden Einfluss auf die Methoden und auf die allgemeinen Fortschritte der Wissenschaft hat. Dieses ist unleugbar und bedarf keines Beweises.

Die alte Geometrie strotzt von Figuren. Das Raisonnement darin ist einfach. Weil man damals allgemeine und abstracte Principien entbehrte, so konnte jede Aufgabe nur in ihrem concreten Zustande an der Figur selbst behandelt werden, deren Anblick nur die zum Beweis oder zur Auflösung nöthigen Elemente entdecken lassen konnte. Man hat aber die Unbequemlichkeit dieser Verfahrungsart erfahren durch die Schwierigkeit der Construction gewisser Figuren und durch die Complication, welche das Verständniss mühsam und beschwerlich macht. Hauptsächlich bei den Untersuchungen in der Geometrie dreier Dimensionen, wo die Figuren vollkommen unmöglich werden können, wird diese Unbequemlichkeit recht fühlbar.

Dieser Fehler der alten Geometrie war der Grund zu einem der Vorzüge der analytischen Geometrie, in der er vermieden war. Man muss sich hiernach fragen, ob es nicht auch in der reinen und speculativen Geometrie eine Art des Raisonnements gäbe, wobei nicht beständig Figuren nöthig wären, deren wirkliche Unbequemlichkeit, selbst wenn die Construction leicht ist, doch immer darin besteht, den Geist zu ermüden und die Gedanken zu hemmen.

Die Schriften von Monge und die öffentlichen Lehren dieses berühmten Meisters, dessen Art und Weise uns durch einen seiner berühmtesten Schüler [5]), dem Nachfolger in seinem Amte, aufbewahrt ist, haben diese Frage gelöst. Sie haben uns gelehrt, jetzt da die Elemente der Wissenschaft in eine Form gebracht und bedeutend erweitert sind, dass es hinreichend sei, in unsre Sprache und in unsre geometrische Auffassung diese allgemeinen Principien und Transformationen, ähnlich denen der Analysis, einzuführen, welche uns eine Wahrheit in ihrer primitiven Reinheit und in allen ihren Gestalten kennen lehren und zugleich leichte und fruchtbare Ableitungen gewähren, wodurch man natürlich zum Ziele kommt. Solches ist der Geist in den Lehren von Monge; und obgleich seine beschreibende Geometrie, welche uns Bei-

---

5) Arago, gegenwärtig beständiger Secretäir der Academie der Wissenschaften, verliess die Hörsäle, um die Stelle Monge's zu ersetzen und bald darauf Titular-Professor zu werden. Die wissenschaftlichen Nachrichten des *Annuaire du bureau des longitudes*, durch welche dieser berühmte Astronom die so schwierige Wissenschaft der physischen Erscheinungen, in Europa bekannt machte, sind noch ein herrliches Muster von einem Vortrag ohne Figuren, welcher uns vorzüglich geeignet scheint, die Fortschritte der Geometrie zu beschleunigen.

spiele davon giebt, ihrer Natur nach wesentlich von Figuren Gebrauch macht, so geschieht dieses doch nur in den wirklichen und mechanischen Anwendungen, worin sie die Stelle eines Instrumentes vertreten; aber Niemand hat mehr als Monge die Geometrie ohne Figuren aufgefasst und ausgebildet. Es pflanzt sich noch die Erzählung in der polytechnischen Schule fort, dass Monge in unerhörtem Grade verstanden habe, die zusammengesetztesten Formen der Ausdehnung im Raum deutlich zu machen und ihre allgemeinen Relationen und ihre verstecktesten Eigenschaften zu versinnlichen, ohne eine andre Hülfe als die seiner Hände, deren Bewegungen wunderbar seinem Willen folgten und immer begleitet waren von einer wahrhaften Beredsamkeit des Sprechers, von Präcision, von Reichthum und Tiefe der Ideen.

§. 19. Wir haben auf den vorigen Seiten versucht. so viel es unsre geringe Einsicht gestattete, die Natur und die Ausdehnung der Dienste zu würdigen, welche der rationellen Geometrie durch die Lehren von Monge geleistet sind. Es bliebe uns jetzt noch übrig, von dem Einfluss zu sprechen, welchen sie auch auf die analytische Geometrie und selbst auf die Algebra, als reine Theorie der abstracten Grössen betrachtet, im Allgemeinen gehabt hat. Dieses würde uns aber zu weit von dem Zweck dieser Schrift entfernen, und ausserdem würde es Vermessenheit sein, uns an einen Gegenstand zu wagen, von dem wir wissen, dass wir darin nur Historiker sind und welcher schon von einem Geometer behandelt ist, der die Tiefe mit der Vielseitigkeit der Wissenschaft verbindet, wovon er in allen Theilen der mathematischen und philosophischen Wissenschaften Beweise geliefert hat.[6]) Auch begnügen wir uns, einfach zu sagen, dass die Algebra, welche der Geometrie schon beträchtliche Fortschritte zu verdanken hatte, zur Zeit der Verbindung, welche Descartes zwischen diesen beiden Wissenschaften herbeiführte, ihr noch neue in ihren erhabensten und misslichsten Parthien schuldig geworden ist: die Integration der Differentialgleichungen mehrer Variabeln, vermittelst der Correlation, welche Monge zwischen den Symbolen dieser Sprache und den Formen und Grössen der Ausdehnung aufzustellen wusste. Wir führen als Beispiel an den doppelten

---

6) *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, par M. Ch. Dupin; p. 199—248 der Ausg. in 8.

analytischen Ausdruck gewisser Geschlechter von Oberflächen durch eine Differentialgleichung und durch eine endliche Gleichung, welche willkührliche Functionen enthält, von denen die zweite genau das vollständige Integral der ersten ist.

Man begreift, indem man auf diese Weise analytische Ausdrücke auf sichtbare Gegenstände bezog, deren Theile unter einander offenbare Beziehungen und Verhältnisse haben, dass die Geometrie bedeutend zu den Fortschritten der Analysis hat beitragen können, und mit einem Wort, dass Monge der Algebra so gut wie der Geometrie hat nützen können. 7)

Fortschritte der Geometrie, die aus den Schriften Monge's hervorgingen.

§. 20. Aus den Betrachtungen, in welche wir über den Gegenstand der rein geometrischen Lehren von Monge eingegangen sind, scheint hervorzugehen, dass beim Erscheinen der *Géométrie descriptive* die Geometrie, welche ganz eigentlich so genannt wird, diese Wissenschaft, durch welche Euclides, Archimedes und Apollonius berühmt geworden sind, welche für Galiläi, Kepler, Pascal und Huygens das einzige Hülfsmittel bei ihren erhabenen Entdeckungen der Gesetze des Universums waren, welche endlich die unsterblichen *Principia mathematica philosophiae naturalis* hervorgebracht haben — dass diese reine Geometrie, sag' ich, welche seit einem Jahrhundert vernachlässigt war, mit einem Male in ihren Begriffen und in ihren eignen Hülfsmitteln erweitert wurde.

Man muss hieraus das Verlangen und die Hoffnung schöpfen, aus dieser Wissenschaft allein die zahlreichen Wahrheiten zu ziehen, mit denen sie die Analysis des Descartes bereichert hat.

Werke von Carnot.

Zu diesem Zweck und in diesem Sinn wurden verschiedene Werke unternommen. Die ersten, welche erschienen und welche ihrer Wichtigkeit und ihres gehabten Einflusses wegen ausgezeichnet zu werden verdienen, sind die *Géométrie de*

---

7) „Die Analysis muss durchaus aus ihrer Anwendung auf diese Art von Geometrie einen bedeutenden Vortheil ziehen; denn ich gebe die Lösung mehrer Probleme der Analysis, welche man vielleicht nur mit vieler Mühe ohne geometrische Betrachtungen lösen würde.“ (Monge, *Mémoire sur les propriétés des plusieurs genres de surfaces courbes*, im IX. Bande der *Mémoires des savans étrangers*, 1775.)

position und der *Essai sur la théorie des transversales* von Carnot.

Diese beiden Werke dürfen in der Geschichte der rationellen Geometrie nicht von der beschreibenden Geometrie von Monge getrennt werden, da sie eben so wie diese und zu derselben Zeit eine Fortsetzung der schönen Methoden von Desargues und Pascal waren, und so wie sie wesentlich zu den neuen Theorien und Entdekkungen der Geometrie beigetragen haben.

Dieser Zusammenhang zwischen den Lehren und Arbeiten der vier genannten grossen Geometer, welchen schon unsre Bemerkungen über Desargues und Pascal haben ahnen lassen, scheint uns die wahre verbindende Kette derjenigen Gedanken zu sein, welche bei den Fortschritten der Geometrie vorgeherrscht haben.

Aber vielleicht ist es zweckmässig, wenn wir noch einige Worte zur Entwickelung unsrer Ideen über diesen Punkt und zur Rechtfertigung dieses Zusammenhangs hinzufügen.

Zwei Arten von Methoden in der rationellen Geometrie.

§. 21. Die Figuren und ihre Theile, welche die Geometrie betrachtet, haben unter einander zwei Arten von Relationen; die einen beziehen sich auf ihre Formen und ihre Lage, und heissen *beschreibende* (*descriptive*) Relationen, die andern beziehen sich auf ihre Grösse, und werden *metrische* genannt. Lässt man z. B. um einen festen Punkt, der in der Ebene eines Kegelschnitts gewählt ist, eine Transversale drehen und zieht man in jede ihrer Lagen durch die beiden Punkte, in welchen sie die Curve schneidet, die Tangenten für diese Curve, *so werden die beiden Tangenten ihren Durchschnittspunkt auf einer festen Geraden haben*, welcher die Poläre des festen Punkts sein wird. Dieses ist eine *beschreibende* Eigenschaft des Kegelschnitts und eine *beschreibende* Relation eines Punkts und seiner Poläre. — Nimmt man nun auf jeder Transversale den zum festen Punkt conjugirten harmonischen, in Bezug auf die beiden, in welchen die Transversale die Curve schneidet, *so wird dieser conjugirte harmonische Punkt genau auf der Poläre des festen Punkts liegen.* Das ist eine *metrische* Eigenschaft der Kegelschnitte und eine *metrische* Relation des Punkts und seiner Poläre.

Diese beiden Arten von Eigenschaften, die beschreibenden und die metrischen, der Figuren reichen einzeln betrachtet zur Auflösung einer grossen Anzahl von Aufgaben hin. Aber es ist immer nützlich und oft durchaus

nothwendig, zu gleicher Zeit die einen und die andern zu betrachten. Die Wissenschaft der Ausdehuung muss sie beide ohne Unterschied enthalten, wenn sie nicht unvollständig sein soll.

Hieraus entstehen, wie man begreift, zwei Gattungen von Methoden in der rationellen Geometrie, oder wenigstens zwei gesonderte Parthien einer allgemeinen Methode, die der *beschreibenden* und die der *metrischen* Relationen.

Desargues, Pascal, De La Hire und Le Poivre gingen von diesen beiden Methoden aus, d. h. sie machten von beiden Arten von Relationen der Figuren Gebrauch; von den beschreibenden Relationen, indem sie sich der Perspective zur Transformation der Figuren bedienten, und der metrischen Relationen vermittelst der wiederholten Anwendung der *harmonischen* Proportion, der Relation der *Involution* und der verschiedenen andern Sätze, die sich auf die Theorie der Transversalen beziehen.

Wenn man diese Unterscheidung zugesteht, so erkennt man, dass die beschreibende Geometrie von Monge eine sehr bedeutende Verallgemeinerung der ersten Methode, der Perspective, war, welche diese Geometer zum Beweis der rein descriptiven Relationen ihrer Figuren anwandten; wir haben in der That gesehen, dass sie sich zu dieser Anwendung eignete; und es geschah in der Absicht, unsern gegenwärtigen Ausspruch zu rechtfertigen, dass wir uns damals über ihre Anwendungen in dieser Hinsicht weitläufiger ausgesprochon haben.

Was die Theorie der Transversalen betrifft, die ursprünglich in der Geometrie der Lage mitbegriffen war, hernach aber unter ihrem eigentlichen Titel in einer besondern Schrift aus einander gesetzt wurde, so haben wir schon gesagt und bewiesen, dass ihre Principien und mehre ihrer Haupttheorien die Entdeckungen von Desargues und Pascal zur Basis gehabt haben; wir müssen also diese Theorie als das Zusammenfassen der Principien dieser beiden grossen Geometer in eine Doctrin betrachten.

Wir können mithin sagen, dass die Methode von Monge und die von Carnot in der rationellen Geometrie die Verallgemeinerung und unmittelbare Vervollkommnung der Methoden von Desargues und Pascal sind, dass sie zwei Unterarten einer allgemeinen Methode sind, welche ihre eigenthümlichen und besondern Vortheile haben und welche man in der vollständigen Untersuchung der Eigenschaften der Ausdehnung nicht trennen darf. Es wäre im Gegentheil ausserordentlich nützlich, von ihnen aus auf

zwei neben einander laufenden Wegen immer gleichmässig fortzuschreiten: sie würden sich gegenseitig unterstützen und die Fortschritte der Wissenschaft würden dadurch vollständiger und schneller sein. [8]) Monge, und unter seinen Schülern vorzüglich der gelehrte Verfasser der *Développemens* und *Applications de Géométrie*, haben uns ein Beispiel einer solchen gegenseitigen Beziehung der Methode gegeben, welche sie zwischen den logischen Verfahrungsarten der reinen Geometrie und der abstracten und symbolischen Sprache der Algebra aufgestellt haben.

§. 22. Wir können hier nicht eine Analyse der zahlreichen und wichtigen Sätze aufstellen, mit denen die beiden Werke von Carnot angefüllt sind, wir wollen uns begnügen, auf die schöne allgemeine Eigenschaft der geometrischen Curven aller Grade aufmerksam zu machen, welche sich auf die Segmente bezieht, die eine solche Curve auf den Seiten eines in derselben Ebene des Polygons abschneidet; eine Eigenschaft, welche die Ausdehnung der Theorie der Transversalen auf die Geometrie der Curven bestimmt und aus der sich ins Besondre als Corallar das dritte Theorem von Newton ableitet, welches sich auf die Producte der Segmente bezieht, die auf Parallelen gebildet werden.

Verschiedene Werke über Geometrie.

Wir gehen zu den andern Werken über, welche nach denen von Monge und Carnot am meisten der Wissenschaft genützt haben. Es scheinen uns diese folgende zu sein:

Die interesssante Abhandlung über die Geometrie des Lineals, unter dem Titel: *Solutions peu connues de diffé-*

8) Die Werke von Monge und Carnot bieten schöne Beispiele von beiden Methoden für den Beweis derselben Theoreme dar und beweisen ausserdem die Nützlichkeit der Uebereinstimmung, welches wir öfters herausgestellt zu sehen wünschen; denn die Anwendungen, welche Carnot von seiner Theorie der Transversalen macht, führen zum Theil auf mehre Eigenschaften der Kegelschnitte und auf die der *axes radicaux* und der Aehnlichkeitspunkte dreier in einer Ebene liegenden Kreise, welche Monge durch reine Betrachtungen der Geometrie bewiesen hat. Indem sich aber Carnot der metrischen Relationen der Figuren bedient, gelangt er zu den Theoremen von Monge und zu gleicher Zeit zu mehren Eigenschaften, die sich auf metrische Relationen beziehen, welche im Allgemeinen der andern Methode, die sich auf ein Princip der rein descriptiven Eigenschaften der Figuren beziehen, entgehen.

Wir haben schon bei Gelegenheit unsrer Betrachtungen über das Princip der zufälligen Relationen einige Reflexionen angestellt über diese zweifache Art, in der Geometrie zu beweisen und zu entdecken.

rens problèmes de Géométrie pratique (in 8.; 80 S., im Jahre XII); worin Servois zuerst die Haupttheoreme aus der Theorie der Transversalen zusammenstellt und dann deren Nutzen nachweist für die rationelle Geometrie, um Sätze zu beweisen, und für die praktische Geometrie, um auf dem Felde durch Abmessen verschiedene, besonders auf den Krieg bezügliche Probleme aufzulösen.

Die *Développemens* und die *Applications de Géometrie* von Ch. Dupin, worin man zum ersten Male die schwierigen Fragen über die Cubatur der Oberflächen durch rein geometrische Betrachtungen behandelt findet, zu welchen Euler und Monge alle Hülfsmittel der höchsten Analysis brauchten.

Die *Elémens de Géométrie à trois dimensions* (synthetischer Theil) von Hachette, worin mehre Aufgaben über Tangenten und Berührungskreise der Curven, für welche man bis dahin nur analytische Lösungen gehabt hatte, in ihrer ganzen Allgemeinheit durch rein geometrische Betrachtungen aufgelöst sind.

Das *Mémoire* von Brianchon, *sur les lignes du second ordre*, worin sich zum ersten Mal, aus dem berühmten Theorem von Desargues über die Involution von sechs Punkten, zahlreiche Eigenschaften der Curven abgeleitet finden.

Das *Mémoire sur l'application de la théorie des transversales* von demselben Verfasser.[9])

---

9) Dieses Werk hat, wie das von Servois, die Auflösung mehrer Probleme vermittelst der geraden Linie allein zum Gegenstand. Brianchon hatte sich schon mit diesem Theil der Geometrie unter dem Titel *Géométrie de la règle* beschäftigt. (S. *Correspondance sur l'école polytechnique*, Th. II, p. 383.)

Diese Art der Geometrie ist nicht durchaus neu. Wir haben von einem Werke von Schooten über diesen Gegenstand gesprochen und von einem etwas frühern Werke, betitelt: *Geometria peregrinans.* Die Abhandlung von Schooten: *De concinnandis demonstrationibus* etc., enthält auch Beispiele von dieser Geometrie; andre findet man in den *Récréations mathématiques* von Ozanam (Ausg. 1778) und in verschiedenen Behandlungen der Feldmesskunst, besonders in der von Mascheroni, betitelt: *Problèmes pour les arpenteurs, avec différentes solutions* (Pavia 1793).

Es bietet sich hier die Gelegenheit dar, die *Géométrie du compas* von Mascheroni zu erwähnen, ein eigenthümliches und vortreffliches Werk, welches zum Gegenstand hat die Auflösung, vermittelst des Zirkels allein, von Aufgaben, welche man gewöhnlich durch Zirkel und Lineal löst. Diese Geometrie ist reicher und ausgedehnter, als die des *Lineals*, weil sie die Aufgaben des zweiten Grades umfasst, welche alle die sind, welche das Gebiet der ge-

Der *Traité des propriétés projectives des figures* von Poncelet, welcher, wie es der Titel angiebt, die Untersuchungen derjenigen Eigenschaften zum Gegenstand hat, welche bei der Transformation der Figuren auf dem Wege der Projection dieselben bleiben, und worin durch eine glückliche Anwendung der drei viel vermögenden Doctrinen, des *Princips der Continuität*, der *Theorie der reciproken Polären* und der *Theorie der homologischen Figuren*, der gelehrte Verfasser verstanden hat, ohne den geringsten Calcul, alle bekannnten Eigenschaften der Linien und Oberflächen des zweiten Grades zu beweisen, und eine grosse Anzahl andrer, von denen mehre schon als die wichtigsten dieser reichen Theorie betrachtet sind.

Verschiedene Memoiren von Gergonne, Quetelet, Dandelin und andern Geometern, welche in wissenschaftlichen Journalen[10]) erschienen sind, haben auch die Wissenschaft mit kostbaren Entdeckungen, welche zu ihrem Fortschreiten beigetragen haben, bereichert.

---

wöhnlichen Geometrie bilden. Mascheroni zeigt, dass sie sich auch mit Leichtigkeit auf die annähernde Auflösung von Aufgaben anwendet, welche von den Kegelschnitten und einer höhern Geometrie abhängen.

Versuche derselben Art, als die Geometrie des Lineals und des Zirkels, welche so zu sagen die Mitte zwischen beiden halten, hatten schon lange Zeit vorher berühmte Mathematiker beschäftigt. Cardan hat zuerst in seinem Buch *de subtilitate* mehre Probleme des Euclid durch die gerade Linie und eine einzige Oeffnung des Zirkels aufgelöst, so, als hätte man in der Anwendung nur ein Lineal und einen unveränderlichen Zirkel. Tartalea folgte bald seinem Rival auf dieses Feld und erweiterte diese Materie durch neue Probleme: *General trattato di numeri, e misure; 5ta parte, libro terzo*; in fol. Venedig 1560. Endlich machte ein gelehrter Piemonteser, J. B. Benedicti, dieses zum Gegenstand eines Werks, welches den Titel führt: *Resolutio omnium Euclidis problematum, aliorumque ad hoc necessario inventorum, una tantummodo circini data apertura*; in 4., Venedig 1553.

10) Das *Journal* und die *Correspondance de l'école polytechnique*; die *Annales* von Gergonne; die *Correspondance mathématique et physique* von Quetelet; das *Mathematische Journal* von Crelle.

Mehre deutsche Geometer, Steiner, Plücker, Möbius u. a., würdige Mitarbeiter der berühmten Analysten Gauss, Crelle, Jacobi, Lejeune-Dirichlet u. a. schreiben in dem zuletzt genannten Journal über die neuen Lehren der rationellen Geometrie.

An dieser Stelle bedauert der Verfasser es lebhaft, die Arbeiten dieser Geometer nicht anführen können, weil ihm die deutsche Sprache unbekannt ist! *A. d. U.*

Neuere Methoden in der Geometrie.

§. 23. Das gemeinsame Verdienst aller dieser Werke bestand in den mannigfachen, überzeugenden Beweisen für die ungeheure Hülfe, welche die reine Geometrie durch sich selbst erhält, und aus ihnen sind diese einfachen und fruchtbringenden Wahrheiten entstanden, welche für sich allein schon die Vollkommenheit der Wissenschaft beweisen, deren wahre Grundlage sie bilden. Theorien, zu denen der Keim schon seit Jahrhunderten in den Schriften der Geometer lag, entstanden, entwickelten sich mit unglaublicher Schnelligkeit, und veranlassten die Methoden, welche die neue Geometrie begründen.

Von diesen Methoden heben wir heraus:

Erstlich, die Theorie der Transversalen, deren Hauptsatz in Bezug auf ein Dreieck, welches von einer Geraden geschnitten wird, schon bedeutend alt ist, den aber Carnot wieder hervorrief, indem er zuerst seine ganze Nützlichkeit und Fruchtbarkeit nachwies und ihn durch eine sehr glückliche Verallgemeinerung auf die Theorie der krummen Linien und Oberflächen übertrug. 11)

Zweitens, die Lehren von der Transformation der Figuren in andre derselben Art, wie es die Perspective thut.

Unter den Methoden dieser Gattung führen wir an:

1) Die Perspective selbst, deren Principien die Grundlage der Werke von Desargues und Pascal über die Kegelschnitte bilden und deren Anwendung sich seitdem erweitert und vermehrt hat.

2) Die Methode, welche darin besteht, die Gesichtslinien, welche nach den verschiedenen Punkten der Figur gezogen sind, in einem constanten Verhältniss wachsen zu lassen, um dadurch eine ähnliche und ähnlich liegende Figur zu bilden.

3) Die Methode, welche die Ordinaten der einzelnen Punkte einer Figur proportional wachsen lässt, ebenso wie man bei der Zeichnung eines Durchschnitts verfährt, dessen Dimensionen in der Höhe man leichter der Schätzung unterwerfen will. Diese Methode wurde von Dürer 12),

---

11) Ein analoges Theorem, bezüglich auf die Segmente, welche auf den drei Seiten eines Dreiecks durch drei gerade Linien gebildet werden, die von Einem Punkte ausgehen und respective nach den gegenüberliegenden Scheiteln gerichtet sind, ist auch einer von den Hauptsätzen in der Theorie der Transversalen. Man hat dieses Theorem bisher dem Johann Bernouilli zugeschrieben, es ist aber zuerst von Johann Ceva bewiesen. (S. die VIIte Note.)

12) *Institutiones geometricae.* Lib. I.

Porta [13]), Stevin, Mydorge und Gregoire von St. Vincent angewandt, um aus dem Kreise die Ellipse zu bilden. [14])

4) Die Methode, nach welcher man alle Ordinaten einer Figur um ihre Fusspunkte in der Projectionsebene dreht, indem man sie unter einander parallel lässt: ein Verfahren, welches man besonders in der Baukunst anwendet, um abschüssige Bögen zu construiren. [15])

5) Die Methode zur Construction der Basreliefs, die von Bosse und Petitot [16]) gelehrt und später von Brey-

---

13) *Elementa curvilinea*. Lib. I.

14) P. Nicolas, welcher in seinem Werk (*De conchoidibus et cissoidibus exercitationes Geometricae*, in 4., Tolosae 1692) von dieser Methode Gebrauch machte, hat die auf diese Art durch einander gebildeten Curven *homogene* genannt.

15) Man kann auch zu gleicher Zeit die Ordinaten proportional vergrössern. Hachette macht von dieser Art der Deformation bei zwei Sätzen der Geometrie Gebrauch, um zu beweisen, dass eine Eigenschaft der stereographischen Projection der Kugel in einer andern Oberfläche nur insofern stattfinden könne, als diese vom zweiten Grade ist. (S. *Correspondance polytechnique*, t. I, p. 77.) — Es ist leicht zu sehen, dass diese Art der Deformation darauf zurückgeführt werden kann, dass man die Ordinaten einer Oberfläche nach ihrer eignen Richtung und in constantem Verhältniss wachsen lässt.

16) Die Construction der Basreliefs ist so betrachtet worden, als wäre sie unbestimmt und ohne sichere Regeln, so wie es die Perspective noch vor zwei Jahrhunderten im Sinne der meisten Maler war. Inzwischen schrieb schon vor langer Zeit Bosse einige geometrische Regeln für diese Construction. Wir finden sie in seinem *Traité des pratiques géométrales et perspectives* (in 8., 1665). Eine Stelle aus diesem Werk beweist uns, dass Desargues, der den Ruhm hat, in die construirenden Künste die Grundsätze und die Strenge der geometrischen Operationen eingeführt zu haben, auf die Construction der Basreliefs seine Art der Perspective angewandt hat. Wir dürfen vermuthen, dass es die Ideen von Desargues oder selbst seine Methode sind, welche uns Bosse überliefert.

Seitdem finden wir ähnliche Regeln für die Basreliefs in dem Werke über Perspective von Petitot: *Raisonnement sur la perspective, pour en faciliter l'usage aux artistes*, in fol., Parma 1758. (Französisch und italienisch.)

Diese Regeln für die Construction der Basreliefs müssen wir unter die Methoden mit aufnehmen, welche wir hier aufzählen, indem sie Figuren erzeugt, welche von derselben Art sind, als die vorgelegten. Zwar ist es wahr, dass diese Regeln beinahe unbekannt sind, und besonders, dass sie niemals in der rationellen Geometrie zur Aufsuchung und zum Beweise von Eigenschaften der Figuren angewandt sind; aber nichts desto weniger sind sie einer solchen Anwendung fähig.

sig[17]) in seiner Theorie der Perspective für Maler auseinandergesetzt ist.

6) Die Methode der *Planiconiques* von De La Hire und die von Le Poivre, welche beide zum Zweck haben, in der Ebene der Basis eines Kegelschnitts dieselben Curven zu beschreiben, welche im Raume die Schnitte eines Kegels durch eine Ebene geben würden.

7) Die von Newton zur Transformirung von Figuren in andre derselben Gattung, die in dem 22sten Lemma des ersten Buchs seiner *Principia* enthalten ist und die von Waring[18]) verallgemeinert wurde.

8) Die, von der wir Gebrauch gemacht haben, um auf das Ellipsoid die beschreibenden Eigenschaften der Kugel anzuwenden, und welche darin besteht, dass man die Coordinaten der Punkte der Figur in constantem Verhältniss wachsen lässt. (*Correspondance sur l'école polytechnique*, t. III, p. 326.)[19])

---

17) Wir kennen von diesem Werke von Breysig nur den Titel, welchen uns Poncelet berichtet hat (Crelle's *Mathem. Journ.* t. VIII, p. 397); aber wir stehen durchaus nicht an, die darin enthaltene Constructionsart der Reliefs zu den Methoden zu rechnen, welche zur Transformation der Figuren dreier Dimensionen in andre Figuren derselben Gattung geeignet sind, weil Poncelet uns sagt, dass die Vorschriften dieses Verfassers in Uebereinstimmung mit seinen eigenen sind, welche solche Figuren erzeugen.

18) Wenn x und y die Coordinaten eines Punkts einer gegebenen Curve sind, und x^1, y^1 die des entsprechenden Punkts der transformirten Curve, so nimmt Waring diese Relationen:

$$x = \frac{px^1 + qy^1 + r}{Ax^1 + By^1 + C}, \quad y = \frac{Px^1 + Qy^1 + R}{Ax^1 + By^1 + C}.$$

Er stellt diese Art der Transformation als eine Verallgemeinerung von der des Newton dar, wonach man hat:

$$x = \frac{r}{x^1}, \quad y = \frac{Qy^1}{x^1}.$$

(*Princ. math.* Lib. I, Lem. 22); und begnügt sich zu zeigen, dass die neue Curve von demselben Grade sein wird, als die vorgegebene. (*Miscellanea analytica*, p. 82; *Proprietates curvarum algebraicarum*, p. 240.)

Wir werden nachweisen, dass die so construirten Curven, eben so gut wie die des Newton durch die Perspective erzeugt werden können, so dass die *Verallgemeinerung von Waring sich nur auf die Lage der neuen Curve in Bezug auf die vorgegebene bezieht und nicht auf ihre Form und ihre individuellen Eigenschaften.*

19) Euler hat diese Art von Transformation für ebene Curven angegeben, aber ohne Anwendungen davon zu machen; er sagt, dass die so construirten Curven eine Verwandtschaft besitzen und nennt sie *Lineas affines.* (*Introd. in Anal. Infin.* Lib. 2, Art. 442.)

9) Endlich, die schöne Theorie der *homologischen Figuren* (oder *perspective-relief*) von Poncelet, welche auf die von De La Hire und Le Poivre für den Fall ebener Figuren zurückkommt, welche aber noch nicht für die Figuren dreier Dimensionen aufgefasst war.[20])

Wir vereinigten unter einem gemeinsamen Titel diese verschiedenen Methoden, weil wir zeigen werden, dass sie alle und selbst die eigentliche Perspective sich aus einem einzigen Fundamental-Princip ableiten, von dem sie nur besondre Anwendungen sind.

Drittens, die Theorie der reciproken Polären, welche die Schüler von Monge aus den herrlichen Vorträgen dieses berühmten Professors schöpften. Von ihr wurde im Anfang ein besondrer Gebrauch zur Transformation von Figuren in andre gemacht, bei denen Punkten Gerade und Geraden Punkte entsprechen (s. Note XXVI), und auf sie hat der berühmte Verfasser des *Traité des propriétés projectives des figures* die Aufmerksamkeit der Geometer gelenkt, indem er sie zuerst auf die Transformation der Relationen der metrischen Winkel-Grösse anwandte.

Viertens, die Lehre von den stereographischen Projectionen, welche, zunächst auf der Kugel allein betrachtet, zur Construction geographischer Karten dient, und welche, um ein neues Theorem vermehrt und sehr allgemein auf die Oberflächen zweiten Grades ausgedehnt, heut zu Tage ein eben so einfaches, als schnell zum Ziele führendes

---

20) Le François hat in letzter Zeit die Theorie der homologischen Figuren als ein Mittel zur Deformation der Curven dritten Grades angewandt, hauptsächlich der *Focalen* des Quetelet und Van Rees. (*Dissertatio inauguralis mathematica de quibusdam curvis geometricis*; in 4., Gand. 1830.) Die Methode dieses Geometers unterscheidet sich von der des Poncelet dadurch, dass dabei zur Construction der homologischen Curven eine ihrer metrischen Relationen gebraucht wird. Aber diese Relation ist nicht die allgemeinste, welche diese Theorie mit sich bringt; sie ist ein *harmonisches* Verhältniss, während man ein *anharmonisches* Verhältniss wählen kann, welches grössere Allgemeinheit in der Construction der Figuren gewährt. Wir sprechen näher über diesen Gegenstand in unserm Memoire über die *homographische Deformation*.

Da die Betrachtung der metrischen Relationen der Figuren einen递 Haupttheil dieses Memoires ausmacht, erlauben wir uns hier anzuführen, dass dieses Memoire im Januar 1830 an die Academie von Brüssel geschickt ist und dass sie also der Veröffentlichung der Abhandlung von François vorhergegangen ist, welche uns dieser Geometer einige Zeit hernach freundlichst zuzuschicken die Güte hatte.

Mittel für die Untersuchung ist. [21]) Besonders die Memoiren der Academie zu Brüssel enthalten von Quetelet und Dandelin die glücklichsten Anwendungen dieser eleganten Doctrin.

§. 24. Diese scheinen uns die vier grossen Abtheilungen zu sein, an welche man unter dem philosophischen Gesichtspunkt der Methoden, bei dem gegenwörtigen Zustand der Geometrie, die meisten der zahlreichen neuen Entdeckungen anschliessen kann. In eine fünfte Abtheilung würde man einige besondre und specielle Theorien zusammenfassen, welche ihre Verfasser auf die Principien der reinen Theorie allein gegründet haben. Dergleichen sind unter andern die Theorie der *conjugirten Tangenten* von Dupin, welcher die möglichsten speculativen und praktischen Anwendungen davon machte; und die neue *Theorie der Brennlinien*, wodurch Quetelet auf einige Principien der elementaren Geometrie denjenigen wichtigen und schwierigen Theil der Optik zurückgeführt hat, zu welchem alle Mittel der Analysis nicht hinreichten.

Diese Theorien, welche beim ersten Anblick den Methoden fremd erscheinen können, von welchen wir gesprochen haben, können sich in gewisser Hinsicht daran anknüpfen und aus ihnen manchen Nutzen ziehen. Die einzelnen Annäherungen, welche Quetelet zwischen seiner Theorie der Brennlinien und der der stereographischen Projectionen versucht hat, sind dafür ein erster Beweis; wir werden noch Gelegenheit haben, andre zu geben. [22])

---

21) Die Theorie der stereograpischen Projection der Kugel, wie man sie heute in der speculativen Geometrie gebraucht, besteht aus folgenden zwei Principien:

1. *Die Projection jedes Kreises auf der Kugel ist ein Kreis;*
2. *Der Mittelpunkt dieses Kreises ist die Projection des Scheitels eines Kegels, welcher der Kugel nach dem projecirten Kreise umgeschrieben ist.*

Dieses zweite Theorem, welches eben so wesentlich als das erste ist, ist erst seit einigen Jahren bekannt; wir haben es zum ersten Male ausgesprochen und analytisch bewiesen in den *Elémens de Géométrie à trois dimensions* von Hachette (1817). Seitdem haben wir durch einfache Betrachtungen der Geometrie die Theorie der strereographischen Projection auf jede Oberfläche des zweiten Grades angewandt und sie in doppelter Hinsicht verallgemeinert: 1) indem wir statt der ebenen Schnitte die Oberflächen betrachteten, welche der vorgelegten eingeschrieben sind, und 2) indem wir zur Projectionsebene irgend eine Ebene nahmen. (S. *Annales des mathématiques*, t. XVIII, p. 305 und t. XIX, p. 157.)

22) Dupin hat z. B. in seiner schönen *Théorie géométrique de la courbure des surfaces* nicht ganz von analytischen Betrachtungen

Vervollkommnung der neuen Methoden.

§. 25. Ein gründliches Studium des gegenwärtigen Zustandes der reinen Geometrie rechtfertigt die von uns aufgestellte systematische Eintheilung, zeigt aber auch zugleich durch den Mangel an Allgemeinheit und bestimmten Charakter in einer Menge von Theoremen, welche sich an die angegebenen Methoden knüpfen, dass diese Methoden noch nicht die Ausdehnung und Fruchtbarkeit und den Grad von Macht erlangt haben, welche man ihnen wünschen muss.

So sind z. B. die Methoden, welche in der zweiten und dritten Abtheilung enthalten sind und welche sich leicht und allgemein auf die Entdeckung und den Beweis der *beschreibenden* Eigenschaften der Figuren anwenden lassen, nur in sehr beschränkter Weise auf die Relationen der *Grösse* (Linien, Oberflächen und Volumina) angewandt. Kann man nicht vermuthen, dass ihnen irgend ein Princip fehlt, welches sie auf viel allgemeinere Relationen und vielleicht auf alle Arten von Relationen anwendbar macht?

---

den Beweis folgenden Satzes befreit: „Wenn in zwei Oberflächen zweiten Grades die Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, so scheiden sich dieselben stets unter rechtem Winkel.“ Die neuen Methoden führen auf verschiedene Art zu einem rein geometrischen Beweis dieses Theorems.

Um ein Beispiel für die Wichtigkeit dieser Methode zu geben, wollen wir noch anführen, dass man ohne grössere Schwierigkeit zu folgendem viel allgemeinerm Satz gelangt: *Wenn in zwei Oberflächen zweiten Grades die Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, so scheinen sich ihre sichtbaren Umrisse, von welchem Punkt im Raum man sie auch betrachten mag, immer unter einem rechten Winkel zu schneiden.*

Wir fügen noch hinzu, dass die schönen Resultate, welche in einem Memoire über *die conjugirten Axen und die Momente der Trägheit der Körper* (16tes Heft des *Journal de l'école polytechnique*) enthalten sind, worin Binet von demselben Satze als Ch. Dupin und von denen Gebrauch gemacht hat, auf welche Ampère bei demselben Gegenstand in dem Memoire: *Quelques propriétés nouvelles des axes permanens de rotation des corps*, gekommen ist; wir fügen noch hinzu, sag' ich, dass diese schönen Entdeckungen, welche in das Gebiet der Mechanik gehören und welche ihre Erfinder durch die Analysis erhalten haben, auch aus rein geometrischen Betrachtungen abgeleitet werden können; und vielleicht dürfte man finden, dass dieser Weg diese verschiedenen Entdeckungen noch mehr an ihre ersten Principien knüpft, besser ihren Zusammenhang zeigt und ihre Exposition leichter und mehr rationell macht.

Es ist in der That wahr, dass die Geometrie, wenn man ihre Grenze weiter hinausschiebt, immer ihr Licht auf irgend einen neuen Theil der physikalisch-mathematischen Wissenschaften wirft.

Man sieht also, dass diese Methoden noch nicht auf hinlänglich starken Grundlagen ruhen. Und wir glauben in der That sagen zu können, dass jede von ihnen einer bedeutenden Erweiterung fähig ist.

Theorie der Transversalen.

§. 26. Die erste Methode, die der Transversalen, kann um neue Principien vermehrt werden, welche sie zu neuer Anwendung geeignet machen und welche bei tausend Gelegenheiten, besonders in der Lehre von den allgemeinen Eigenschaften der geometrischen Curven, die Analysis des Descartes ergänzen. In dem gegenwärtigen Zustand kann diese Methode bei verschiedenen Untersuchungen dienlich sein, welche ihr noch nicht unterworfen sind; z. B. bei dem allgemeinen Problem der *Tangenten* und bei dem der *Krümmungshalbmesser* aller geometrischen Curven, wovon wir die Lösungen in dem *Bulletin universel des sciences* (Juni 1830) angegeben haben. 23)

---

23) *Construction der Tangenten.* — Um die Tangenten für irgend einen Punkt m einer geometrischen Curve von beliebigem Grade zu bestimmen, ziehe man durch diesen Punkt zwei Transversalen mA und mA^1 in willkührlicher Richtung; darauf bilde man die Producte der Segmente, welche auf diesen Geraden zwischen dem Punkte m und den andern Punkten, in welchen sie die Curven schneiden, enthalten sind, und es seien P und P^1 diese Preducte; durch einen in der Ebene der Curve willkührlich gewählten Punkt μ ziehe man zwei Transversalen, welche mit mA und mA^1 parallel sind, und bilde die Producte der Segmente, welche auf diesen beiden Transversalen zwischen dem Punkte μ und der Curve liegen, und bezeichne sie durch Π und Π^1. — Auf den Geraden mA und mA^1 trage man endlich von m ausgehend zwei Linien auf, die respective den Verhältnissen $\frac{\Pi}{P}$ und $\frac{\Pi^1}{P^1}$ proportional sind, *so wird die Gerade, welche die Endpunkte dieser Linien verbindet, mit der Tangente im Punkte* m *parallel sein.*

Man könnte auch die Normale direct construiren. Zu diesem Ende würde man auf den beiden Transversalen, die von dem Punkte m ausgehen, Linien auftragen, welche den Verhältnissen $\frac{P}{\Pi}$ und $\frac{P^1}{\Pi^1}$ proportional sind und durch die Endpunkte dieser Linien und durch den Punkt m einen Kreis legen, *dann wird der Mittelpunkt dieses Kreises auf der Normale der Curve für den Punkt* m *liegen.*

Construction der Berührungskreise. — Um den Berührungskreis für einen Punkt m einer geometrischen Curve zu bestimmen, wird man durch diesen Punkt die Tangente an die Curve ziehen und irgend eine Transversale mA, ferner wird man die Producte der Segmente nehmen, welche auf diesen beiden Geraden zwischen dem Punkte m und den andern Aesten der Curve enthalten sind, diese Producte mögen T und P sein; durch einen in der Ebene der Curve willkühr-

§. 27. Die Lehre von den stereographischen Projectionen ist ausser der Ausdehnung, welche sie schon durch ihre Anwendung auf alle Arten von Oberflächen zweiten Grades erhalten hat, noch einer neuen Verallgemeinerung fähig, welche darin besteht, das Auge nicht mehr in einen Punkt der Oberfläche, sondern beliebig an irgend eine Stelle des

Stereographische Projectionen.

---

lich gewählten Punkt zieht man alsdann zwei Linien, parallel mit der Tangente und der Transversale, und bildet die Producte der Segmente, die auf diesen Parallelen zwischen dem Punkte μ und der Curve liegen; diese Producte seien τ und π. — Auf der Transversale mA trägt man endlich eine Linie $= \frac{P}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T}$ auf, so wird der Endpunkt dieser Linie auf dem gesuchten Berührungskreise liegen.

Aus dieser Construction folgt, dass, wenn man durch ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Transversale mA macht, der Krümmungshalbmesser $= R = \frac{1}{2 \sin. \vartheta} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T}$ sein wird.

Wenn die Curve vom Grade m ist, so enthalten τ und π, m lineäre Factoren, P enthält $m-1$, und T, $m-2$.

Wenn diese Curve gezeichnet ist, so werden diese Factoren die Linien sein, welche auf den Transversalen liegen; und wenn die Curve durch ihre Gleichung gegeben ist, so wird man vermittelst dieser Gleichung unmittelbar die Werthe der vier Grössen P, T, π, τ erkennen, was, wie man sieht, aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen folgt.

Wenn die Curve gezeichnet wird, so ist es nöthig, dass sie vollständig ist, d. h. dass alle ihre Aeste beschrieben sind, damit sie von den Transversalen in eben so vielen Punkten getroffen werde, als der Grad ihrer Gleichung anzeigt. Wenn die Curve z. B. eine von denen des vierten Grades ist, welche man *Ovalen des Descartes* nennt, so muss man ihre *Genossin* (*compagne*) kennen, welche eine zweite Ovale ist, die sich derselben Eigenschaften, als die erste, erfreut, und welche nicht durch die geometrische Construction angezeigt wird, die Descartes und andre Geometer gegeben haben, welche aber in derselben Gleichung mitbegriffen ist. (S. Note XXI.)

Die vorhergehenden Constructionen können noch vereinfacht werden, weil man statt vier Transversalen, von denen je zwei und zwei parallel sind, nur drei ziehen darf, von denen zwei von dem Punkte der Curve ausgehen und die dritte ganz willkührlich ist. Diese Modification der obigen Lösungen beruht auf der schönen allgemeinen Eigenschaft der geometrischen Curven, welche Carnot in seiner *Géométrie de position* p. 291 gegeben hat.

Poncelet hat auch eine Construction der Tangenten an geometrische Curven gegeben, in einem Memoire, welches September 1831 der Academie der Wissenschaften zu Paris vorgelegt wurde, unter dem Titel: *Analyse des transversales appliquée à la recherche de propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques.* (S. den VIII. Band des Journals von Crelle, p. 229.)

Raums, selbst ins Unendliche zu setzen. Auf diese Art werden die ebenen Schnitte der Oberfläche zweiten Grades in der Projection nicht mehr unter einander verwandte Kegelschnitte (*homothétiques*) sein, oder solche Kegelschnitte, die alle dieselbe Axe der Symptose haben, sondern diese Curven werden eine allgemeiner ausgedrückte Abhängigkeit haben, sie werden alle einen doppelten Contact (reell oder imaginär) mit ein und demselben Kegelschnitt haben, welcher die Projection des scheinbaren Umrisses der Oberfläche zweiten Grades sein wird (während dieser Kegelschnitt selbst imaginär sein kann).

Dieses Theorem gehört Poncelet an, welcher es in seinem *Traité des propriétés projectives* (art. 610) gegeben und dessen Anwendung gezeigt hat, bei der Untersuchung der Eigenschaften eines Systems von Kegelschnitten, die alle einen doppelten Contact mit Einem Kegelschnitt haben. Wenn man hiermit, wie in der eigentlich sogenannten stereographischen Projection, noch ein zweites Theorem verbindet, welches sich auf die Projection der Scheitel von Kegel bezieht, die der Oberfläche des zweiten Grades in der Richtung ihrer ebenen Schnitte unbeschrieben sind, so wird diese neue Theorie ein Feld von interessanten und unerschöpflichen Untersuchungen darbieten, in denen sich eine Menge von Problemen über die Construction von Kegelschnitten, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, aufgelöst finden. (S. Note XXVIII.)

Methoden der Deformation der Figuren.

§. 28. Obwohl die in unsrer zweiten Abtheilung enthaltenen Methoden einander fremd zu sein scheinen und zu verschiedenen praktischen Zwecken bestimmt sind, so können sie doch, als ein theoretisches Mittel zur *Deformation der Figuren* betrachtet, in ein einziges Princip der Deformation zusammengefasst werden, welches sie alle ersetzt. Dieses Princip scheint uns eine neue Lehre von grosser Wichtigkeit darzubieten, welche von leichterer und ausgedehnterer Anwendung ist, als die der verschiedenen Methoden. Sie beruht auf einem einzigen Theorem der Geometrie, welches wir als die letzte Verallgemeinerung und so zu sagen als das Urprincip für diese Methoden betrachten. Wir setzen noch hinzu, dass auch alle andern ähnlichen Methoden zur Verwandlung von Figuren in andre derselben Art, welche man noch in der Folge entdecken kann, nur Ableitungen aus diesem einzigen Princip sein werden.

Die reciproken Polären und andre ähnliche Methoden.

§. 29. Was die Theorie der reciproken Polären betrifft, welche zur Transformation von Figuren in andre von verschiedener Art, in denen Ebenen und Punkte respective Punkten und Ebenen der gegebenen Figuren entsprechen, und zur Umwandlung von Eigenschaften dieser Figuren in Eigenschaften der neuen Figuren dient, was eine beständige *Dualität* der Formen und Eigenschaften der ausgedehnten Grössen bildet, so haben wir schon (in den *Annales des mathématiques*, t. XVIII, p. 270) gesagt, dass diese Theorie nicht die einzige Methode für diesen Zweck ist, sondern dass es deren mehre giebt, welche diese *Dualität* augenscheinlich machen und welche sich eben so leicht anwenden lassen.

Princip der Dualität.

Die *Dualität* z. B., welche seit zwei Jahrhunderten[24]) in der Geometrie der Kugel bekannt ist, wo jede Figur ihre *supplementäre* hat, in der die Bögen grösster Kreise Punkten der ersten Figur entsprechen und durch denselben Punkt gehen, wenn diese Punkte der ersten Figur auf demselben grössten Kreise liegen, diese *Dualität*, sag' ich, macht die *Dualität* der ebenen Figuren augenscheinlich und bietet ein leichtes Mittel zu ihrer Transformation dar.

Man denke sich in der That auf einer Kugel irgend eine erste Figur und ihre *supplementäre* (d. h. die Figur hüllt die Bögen grösster Kreise ein, deren Ebenen senkrecht auf den Radien stehen, welche nach den Punkten der ersten Figur gehen), und bilde die Perspective dieser beiden Figuren in einer Ebene, indem sich das Auge im Mittelpunkt der Kugel befindet, so wird man in der Perspective zwei Figuren erhalten, von denen die eine die transformirte der andern sein wird und wo die *Dualität* offenbar ist.

Man erkennt aber leicht, dass diese Transformation einer ebenen Figur sich in der Ebene der Figur direct ausführen lässt, ohne die Kugel zur Hülfe zu nehmen. In der That wird das Perpendikel, welches von jedem Punkt der vorgelegten Figur auf die Gerade gefällt wird, welche diesem Punkt in der zweiten Figur entspricht, durch einen

24) Wir haben gesagt, dass das Theorem, auf welchem diese Dualität beruht, von Snellius ist, und dass seine Entdeckung vorbereitet war durch die Transformation der Triangel auf der Kugel, welche Vieta zur Auflösung einiger Fälle der sphärischen Trigonometrie angewandt hat.

festen Punkt gehen, der die senkrechte Projection des Mittelpunkts der Kugel auf die Ebene der Figur ist; und das Perpendikel wird in diesem Punkt in zwei Segmente getheilt sein, deren Product constant ist, nämlich gleich dem Quadrat der Entfernung des Mittelpunkts der Kugel von der Ebene der Figur. Um also die transformirte einer gegebenen Figur zu bilden, wird es hinreichen, durch einen festen Punkt in ihrer Ebene einen Radius nach jedem Punkte dieser Figur zu ziehen, auf der Verlängerung dieses Radius, jenseits des festen Punkts, eine Linie proportional dem inversen Werth desselben aufzutragen und durch den Endpunkt dieser Linie ein Perpendikel auf dem Radius zu ziehen. Alle diese Perpendikel entsprechen respective den Punkten der vorgelegten Figur und hüllen ihre transformirte ein.

§. 30. Es ist einleuchtend, das diese Constructionsart der transformirten Figuren sich auch auf Figuren dreier Dimensionen anwenden lässt. Wir sprechen dieses so aus:

Wenn man nach allen Punkten einer im Raume gegebenen Figur von einem willkührlich angenommenen Punkt Radien zieht und man auf diesen Radien (oder auch auf deren Verlängerungen über den festen Punkt hinaus) Linien aufträgt, welche ihnen respective proportional sind, und wenn man endlich durch die Endpunkte dieser Linien Ebenen senkrecht auf die Radien legt, so werden alle diese Ebenen eine zweite Figur einhüllen, welche die transformirte der vorgegebenen ist, wie man es bei dem Princip der Dualität erfährt. Das heisst also, den Ebenen in der vorgelegten Figur werden Punkte in der neuen Figur entsprechen, und wenn diese Ebenen durch *einen* Punkt gehen, so werden diese Punkte in *einer* Ebene liegen.[25])

Wenn auf den Richtungen der Radien, die von einem festen Punkte nach den Punkten der vorgegebenen Figur gezogen sind, Linien genommen werden, welche proportional den inversen Werthen dieser Radien sind, so können die Ebenen, welche in den Endpunkten dieser Linien senkrecht auf den Radien stehen, als die *Polar-Ebenen* der Punkte der vorgegebenen Figur betrachtet werden, in Bezug auf eine gewisse Kugel, die um den festen Punkt als Mittelpunkt beschrieben ist.

Unsre Transformationsweise umfasst also zugleich die Transformation, welche sich aus der Theorie der *recipro-*

---

25) Der Beweis dieses Theorems ist äusserst leicht. Wir geben ihn in der XXIXsten Note.

ken Polären, auf der Kugel betrachtet, ergiebt, und ist allgemeiner als diese, weil in der Theorie der Polären die Ebenen, welche den Punkten einer vorgegebenen Figur entsprechen, immer zwischen diesem Punkt und dem Mittelpunkt der Kugel gelegt werden, während bei unsrer Transformationsart diese Ebenen auch über den festen Punkt hinaus liegen können, welcher den Mittelpunkt repräsentirt. 26)

Dieser innige Zusammenhang zwischen der Theorie der reciproken Polären, einer ganz neuen Erfindung, und zwischen der Dualität der Figuren, die auf der Kugel gezeichnet werden, welche seit beinahe zwei Jahrhunderten bekannt und angewandt ist, schien uns hier eine Erwähnung zu verdienen.

§. 31. Wir gehen zu andern Arten der Transformation über.

Es giebt zwei, welche, wie die vorhergehende, auf bekannten Theorien beruhen. Die erste ist durch das Porisma des Euclid gegeben, welches wir bei Gelegenheit der mathematischen Sammlungen von Pappus angeführt haben (Erste Epoche, §. 31, in der Note); denn in diesem Porisma construirt man für jeden Punkt einer ebenen Figur eine gerade Linie, und erkennt leicht, wenn die Punkte der ersten Figur in gerader Linie liegen, dass die entsprechenden Geraden in der zweiten Figur durch *einen* Punkt gehen.

Die zweite folgt aus der Theorie der *reciproken* Curven und Oberflächen, für welche Monge den analytischen Ausdruck gegeben hat. (S. Note XXX.)

§. 32. Man kann auch noch andre Arten der Transformation ersinnen.

Man denke sich z. B. im Raum einen dreikantigen Winkel und ein Dreieck, welches in einer Ebene liegt, die durch den Scheitel dieses Winkels geht; durch jeden Punkt einer gegebenen Figur im Raum lege man drei Ebenen, welche durch die drei Seiten des Dreiecks

---

26) Die hier angegebene grosse Allgemeinheit findet nur in geometrischer Beziehung statt, nicht aber, wenn man den analytischen Weg wählt, weil man in letzterm Fall den Radius der Kugel, in Bezug auf welche man die Polären nimmt, imaginär annehmen kann, und dann die Polarebenen für die Punkte der vorgegebenen Figur über den Punkt hinaus liegen, welcher den Mittelpunkt der Kugel repräsentirt.

gehen, so schneiden diese respective die drei Kanten des Winkels in drei Punkten, welche eine Ebene bestimmen; alle diese Ebenen hüllen eine zweite Figur ein, welche zu der gegebenen die Beziehungen und Abhängigkeiten haben werden, welche die in Rede stehende *Dualität* bestimmen.

Wenn eine Figur im Raum gegeben ist und man theilt ihr irgend eine unendlich kleine Bewegung mit, und legt durch ihre verschiedenen Punkte Normal-Ebenen auf ihre Trajectorien, so werden alle diese Ebenen eine zweite Figur einhüllen, welche eine Transformation der vorgegebenen sein wird, von derselben Natur als die vorhergehende.

Wenn man von einer im Raum gegebenen Figur annimmt, dass sie von mehren Kräften sollicitirt wird, und wenn man durch jeden Punkt der Figur die Hauptebene dieser Kräfte in Bezug auf diesen Punkt legt, so werden alle diese Ebenen eine zweite Figur einhüllen, welche noch eine Transformation der gegebenen sein wird, von derselben Natur als die vorhergehenden.

§. 33. Von diesen drei Arten der Transformation im Raume hat die erste, welche von dem dreikantigen Winkel Gebrauch macht, ihre analoge in der Ebene; dieses ist das Porisma des Euclid. Die beiden andern haben nicht ihre analoge in der Ebene; sie sind aber nichts desto weniger geeignet zur Transformation ebener Figuren. Es sei in der That eine ebene Figur zu transformiren gegeben, so theile man ihrer Ebene eine unendlich kleine Bewegung im Raume mit, so werden die Normal-Ebenen auf die Trajectorien der verschiedenen Punkte der Figur eine conische Oberfläche einhüllen (deren Scheitel ein Punkt in der Ebene der Figur sein wird) [27]), und eine im Raum willkührlich gelegte Transversal-Ebene wird diese conische Oberfläche in einer Figur schneiden, welche die transformirte der gegebenen ist.

Man kann also zur Transformation der ebenen Figuren jedes Verfahren geeignet machen, welches man zur Transformation der Figuren im Raum gebraucht und welches nicht sein analoges in der Ebene hat.

---

27) Wir werden den Beweis dieses Theorems in einer Schrift über die geometrischen Eigenschaften der freien Bewegung eines Körpers im Raum geben.

§. 34. Wir könnten noch andre besondre Arten von Transformation anführen, welche, wie die vorhergehenden, theils im Raume, theils in der Ebene denselben Dienst leisten, als die Theorie der reciproken Poläwren. Aber alle diese Methoden können, wie das der *Deformation*, von dem wir oben gesprochen haben, durch ein einziges Princip ersetzt werden, welches allgemeiner und ausgedehnter ist, als jede von ihnen. Dieses Princip, welches eine vollständige Lehre von der *Transformation* der Figuren bestimmt, hat seinen Ursprung in einem einzigen Theorem der Geometrie, welches uns für diese Eigenschaft, welche den Formen der Ausdehnung innewohnt, für die *Dualität*, der erste Grund gewesen zu sein scheint. Ueber diese haben zwar gelehrte Geometer geschrieben, aber trotz der sehr philosophischen Gesichtspunkte, welche sie in diesen Theil der Geometrie gebracht haben, sind sie doch nicht bis zu dem anfänglichen Grundprincip, welches unabhängig von jeder besondern Lehre ist, zurückgegangen.

Das allgemeinste Princip der Transformation.

§. 35. Wir wollen nun zugleich zeigen, durch einige Betrachtungen über die Natur dieses Princips der Transformation und über die Theorie der reciproken Polären, wie es eine grössere Allgemeinheit gewährt, als diese Theorie.

Besonderer Charakter der Theorie der reciproken Polären.

Die Figuren, nach dieser Art der Transformation betrachtet, haben unter einander eine Uebereinstimmung oder Reciprocität, welche darin besteht, *dass jedem Punkt in der gegebenen Figur eine Ebene in ihrer abgeleiteten entspricht, und umgekehrt jedem Punkt in dieser eine Ebene in der gegebenen Figur*. Dies folgt aus einer einzigen Bedingung bei der Construction der zweiten Figur, nämlich, *dass alle Ebenen, welche in dieser Figur Punkten der gegebenen entsprechen, die in einer Ebene liegen, nothwendig durch ein und denselben Punkt gehen müssen.* Auf diese Weise entspricht einem Punkte der zweiten Figur eine Ebene der ersten.

Diese Bedingung bestimmt durch sich allein die Lehre der Transformation, von der wir sprechen, indem sie einen wesentlichen Unterschied von unendlich vielen andern Transformationsarten bildet, in welchen den Punkten Ebenen entsprechen oder auch den Ebenen Punkte, wo aber diese beiden Umstände nicht zu gleicher Zeit stattfinden. Und diese Bedingung findet sich in der Theorie der Polären erfüllt, wo man weiss, dass alle Polar-Ebe-

nen der Punkte einerlei Ebene, durch denselben Punkt gehen (oder mit andern Worten, wenn die Kegel, welche einer Oberfläche zweiten Grades umgeschrieben sind, ihre Scheitel in *einer* Ebene haben, so gehen die Ebenen ihrer Berührungscurven mit der Oberfläche durch *einen* Punkt). Hierin liegt es, weshalb die Theorie der Polären ein Mittel für die Transformation der Figuren darbietet und die *Dualität* bei den ausgedehnten Grössen erklärt.

Diese Theorie bietet aber einen besondern Umstand dar, dass nämlich der Punkt, durch welchen die Polar-Ebenen von solchen Punkten der ersten Figur gehen, welche in einerlei Ebene liegen, diese Ebene selbst zur Polar-Ebene hat: so dass sich die erste Ebene vermittelst der zweiten vollkommen auf dieselbe Art construirt, als diese zweite durch die erste construirt wordun ist. Auf diese Weise findet hier eine *Reciprocität* oder vielmehr eine vollkommene *Identität* der Construction zwischen beiden Figuren statt.

Da die Theorie der Polären bis auf den heutigen Tag das einzige Mittel war, welches zur Transformation der Figuren angewandt wurde, so könnte man glauben, dass sie ihre Uebereinstimmung oder Reciprocität der Formen, wovon wir eben sprachen, der Identität der Construction verdanken, welche bei dieser Theorie der Polären stattfindet. Das wäre aber ein grosser Irrthum. Denn diese Identität der Construction ist eine zufällige Eigenschaft, welche den Figuren, die durch die Theorie der Polären entstehen, eigenthümlich ist und welche sich auch bei andern Transformationsarten vorfindet; aber sie ist nicht *die* Eigenschaft, welche die Dualität bedingt, und in der That findet sie sich nicht bei den andern Arten der Transformation und namentlich bei der, welche, wie wir erwähnt haben, alle andern als Folgerungen oder besondre Fälle in sich schliesst. Auch wollen wir keinen Gebrauch von dieser Identität der Construction machen und sie von der Exposition unsrer Theorie der Transformation ausschliessen, weil sie ihr fremd ist und nur durch einen besondern und zufälligen Umstand darin eingeht.

Besondrer Charakter mehrer andern Arten von Transformation.

§. 36. Bei der Transformationsart auf dem Wege der unendlich kleinen Bewegung findet sich auch die Identität der Construction, eben so wie in der Theorie der Polären; d. h. die Normal-Ebenen auf den Trajectorien der Punkte einer ersten Figur hüllen eine zweite Figur ein, welche von der Beschaffenheit ist, dass, wenn sie schon construirt wäre und dieselbe Bewegung als die erste an-

nähme, die Normal-Ebenen auf ihren Trajectorien die erste Figur einhüllen würden.

Eine ähnliche Reciprocität findet auch bei den Figuren statt, welche vermittelst eines Systems von Kräften gebildet werden.

Nicht dagegen ist dieses der Fall bei den Transformationen, welche durch die Betrachtung des dreikantigen Winkels gebildet werden. Wenn ein Punkt eine gegebene Figur durchläuft, so hüllt die Ebene, welche auf die angeführte Art vermittelst des dreikantigen Winkels bestimmt ist, eine zweite Figur ein, welche die abgeleitete oder transformirte der ersten sein wird. Wenn aber der Punkt die zweite Figur durchläuft, so wird die bewegliche Ebene *nicht* die erste Figur einhüllen, so wie es in der Theorie der Polären und bei der Transformation vermittelst der unendlich kleinen Bewegung geschieht; sondern sie wird eine dritte vollkommen verschiedene einhüllen. Nur in dem ganz besondern Fall, dass die drei Scheitel des Dreiecks in den Ebenen der Seitenflächen des dreikantigen Winkels liegen, findet Identität statt, d. h. die dritte Figur wird dann von der ersten nicht verschieden sein.

Bei der Transformationsart der ebenen Figuren, welche das Porisma des Euclid liefert, kann niemals Identität der Construction stattfinden. Wenn der bewegliche Punkt eine gegebene Figur durchläuft, so hüllt seine correspondirende oder derivirte Gerade eine zweite Figur ein; wenn aber der bewegliche Punkt diese zweite Figur durchläuft, so wird die daraus abgeleitete Gerade eine dritte Figur einhüllen, welche von der ersten verschieden ist.

Man kann aber immer statt der Constructionsart, welche zur Bildung der zweiten Figur vermittelst der ersten gebraucht wurde, eine andre snbstituiren, welche zur Construction dieser ersten Figur vermittelst der zweiten dient. In solchen besondern Fällen, wie die sind, welche die Theorie der Polären, die unendlich kleine Beweguag der gegebenen Figur u. s. w. darbieten, fallen diese beiden Mittel der Construction, welche im Allgemeinen verschieden sind, in eines zusammen. Wir werden die allgemeinen Relationen angeben, welche zwischen diesen beiden Constructionsarten stattfinden, um immer die eine aus der andern abzuleiten.

Die Theorie der Polären ist nicht die allgemeinste Transformationsweise.

§. 37. Wir sind in diese Betrachtungen specieller eingegangen, um es dem Leser recht eindringlich zu machen, dass die Idee der *Dualität* keineswegs aus den Umständen der Construction hervorgeht, welche in der Theorie

der reciproken Polären den unterscheidenden Charakter zu bilden scheinen, für die Transformationsarten, welche sich zur Veranschaulichung der Dualität eignen.

Es folgt aus diesen Betrachtungen, dass die Theorie der reciproken Polären nicht die allgemeinste Transformationsart ist. Wenn aber dies die einzige Wahrheit wäre, welche wir herausstellen wollten, so würde es hinreichen zu sagen, dass man bei der allgemeinen Methode, welche alle andern in sich schliesst, um für eine gegebene Figur die correlative zu construiren, willkührlich im Raum fünf Ebenen annehmen kann, welche fünf bestimmten Punkten der ersten Figur entsprechen; während in der Theorie der reciprokenPolären zwei correlative Figuren eine viel beschränktere Abhängigkeit von einander haben. Denn wenn man zwei Tetraeder betrachtet, in welchen die Scheitel des einen den Flächen des andern entsprechen, so werden die vier Geraden, welche die Scheitel des ersten respective mit *den* Scheiteln des andern verbinden, welche den Ebenen gegenüber liegen, die den vier Scheiteln des ersten correspondiren — so werden diese vier Geraden, sag' ich, immer vier erzeugende Linien (*génératrices*) für dieselbe Art der Erzeugung eines Hyperboloids mit einem Fach sein. [28])

Die andern Transformationsarten bieten ebenfalls einige besondre Abhängigkeiten der Lage der Figuren und ihrer Transformirten dar, welche aber von der verschieden sind, die wir als die reciprok-polären Figuren angegeben haben.

Eben so findet man bei der Transformation vermittelst der unendlich kleinen Bewegung, dass irgend zwei Gerade und ihre Abgeleiteten immer vier erzeugende Linien für dieselbe Art der Erzeugung eines Hyperboloids sind.

Transformation der metrischen und Winkel-Beziehungen.

§. 38. Wir haben bis jetzt nur von den Relationen zwischen den Figuren und ihren transformirten in Bezug auf ihre Beschreibung und ihre Lage gesprochen; man muss aber

---

28) Dieses folgt daraus, dass *die Geraden, welche die vier Scheitel eines Tetraeders mit den Polen der gegenüberliegenden Seitenflächen, in Bezug auf irgend eine Oberfläche zweiten Grades genommen, vier erzeugende Linien für dieselbe Art der Erzeugung eines Hyperboloids mit einem Fache sind.*

Dieses Theorem, welches wir in den *Annales des mathématiques*, t. XIX, p. 76 bewiesen haben, hat noch mehre Corollare zur Folge. Man schliesst z. B. daraus, dass *die vier Perpendikel, welche von den Scheiteln eines Tetraeders auf die gegenüberstehenden Seitenflächen gefällt werden, vier erzeugende Linien für dieselbe Art der Erzeugung eines Hyperboloids sind.*

auch ihre Abhängigkeiten in Bezug auf die metrische und die Winkel-Grösse betrachten. Dieses werden die Abhängigkeiten sein, welche zur Uebertragung der Theoreme dienen, in welche die Relationen der Grösse eingehen.

Diese allgemeinen Abhängigkeiten der Grösse zwischen einer Figur und ihrer transformirten beruhen auf einem sehr einfachen Princip, welches in der Theorie der Polären nicht in Anwendung gebracht ist; auch ist diese Theorie, welche man in sehr allgemeiner Weise zur Transformation der beschreibenden Relationen angewandt hat, nur in sehr beschränkter Art bei den Relationen der Grösse gebraucht, erstlich, weil man ihr nicht alle Relationen unterworfen hat, für welche sie geeignet ist, und dann, was ein Fehler des Princips ist, von dem wir sprechen, weil man zwei besondre Fälle der Theorie annehmen muss, um die Transformation einer Relation der Grösse zu bilden. Man hat als Hülfsoberfläche entweder die Kugel angenommen, wie es zuerst Poncelet that in seinem *Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques* [29]), und hernach Bobillier [30]); oder ein Paraboloid, wie wir es in unsern zwei Memoiren über *Transformation parabolique des relations métriques* [31]) gethan haben.

Die Abhängigkeiten der Grösse zwischen einer Figur und ihrer abgeleiteten sind nicht dieselben bei beiden Arten der Transformation. In dem ersten Fall bestehen sie darin, dass der Winkel zweier Ebenen einer Figur genau dem Winkel zwischen *den* Radien der Hülfs-Kugel gleich ist, die nach zwei Punkten gezogen sind, welche diesen Ebenen in der zweiten Figur entsprechen; und im zweiten Fall ist das Segment, welches auf der Axe des Hülfs-Paraboloids zwischen zwei Ebenen einer Figur liegt, gleich der senkrechten Projection auf diese Axe von einer Linie, welche die, diesen beiden Ebenen entsprechenden, beiden Punkte in der andern Figur verbindet.

Diese Transformationsarten wandten sich beide mit gleicher Leichtigkeit auf alle Relationen an, welche in der Theorie der Transversalen vorkommen. Die erste ist ausserdem noch auf einige besondre Relationen der Winkel angewandt, z. B. auf die Theoreme von Newton und Maclaurin über die organische Beschreibung der Kegel-

---

29) *Crelle's Journal*, t. IV. Dieses Memoire wurde der Academie der Wissenschaften zu Paris am 12. April 1824 vorgelegt.

30) *Annales des mathématiques*, t. XVIII, J. 1827—28.

31) *Correspondance mathématique* von Quetelet, t. V et VI.

schnitte [32]); und die zweite auf mehre Relationen der geradlinigen Entfernungen, besonders auf die Theoreme von Newton über die geometrischen Curven, was uns zu einer ganz neuen Gattung von Eigenschaften dieser Curven geführt hat. [33])

§. 39. Ausser diesem Unterschied zwischen den allgemeinen Abhängigkeiten der Grösse sind diese beiden Transformationsarten noch von einander durch die beschreibenden Relationen verschieden, welche jeder von ihnen irgend etwas Besondres und Eingeschränktes geben.

Wenn man z. B. eine Kugel als Hülfs-Oberfläche anwendet und es findet sich eine andre Kugel in der Figur, welche man transformiren will, so wird ihr in der neuen Figur eine Revolutions-Oberfläche des zweiten Grades entsprechen, man wird also nicht die allgemeinen Eigenschaften irgend einer Oberfläche des zweiten Grades erhalten.

Eben so, wenn man als Hülfs-Oberfläche ein Paraboloid nimmt, und man hat eine Figur zu transformiren, in welcher ein Ellipsoid enthalten ist, so wird diesem in der zweiten Figur ein Hyperboloid entsprechen und niemals ein Ellipsoid. Aber es ist nicht dieses Fehlen der Allgemeinheit, welches die grösste Unbequemlichkeit hervorbringt; es ist vielmehr dies, dass alle Linien, welche man in der vorgegebenen Figur als in der Unendlichkeit liegend betrachten kann, zu ihren abgeleiteten in der zweiten Figur Linien haben, die mit der Axe des Paraboloids parallel gehen und also in einem unendlich weit entfernten Punkt zusammenlaufen. Man wird also eine Eigenschaft verschiedener unter einander parallelen Linien haben, während man bei einer andern Hülfsoberfläche die correspondirende Eigenschaft für Gerade erhalten hätte, welche in einem Punkt zusammenlaufen.

Es ist wahr, dass man auf einem andern Wege (und das ist der Gegenstand der Methoden, welche in unsrer

---

32) *Mémoire* von Poncelet über die reciproken Polären.

33) Wir führen z. B. folgendes Theorem an, welches zu dieser neuen Gattung von Eigenschaften der Curven gehört: *Wenn man an eine geometrische Curve alle ihre Tangenten zieht, die parallel mit irgend einer Geraden gehen, so wird der Mittelpunkt der mittleren Distanzen ihrer Berührungspunkte ein einziger sein, welches auch die gemeinsame Richtung der Tangenten sein mag.* Wir haben diesen Punkt den *Mittelpunkt* der Curve genannt. Dieselbe Eigenschaft findet bei den geometrischen Oberflächen statt.

zweiten Abtheilung enthalten sind) die Eigenschaften der Kugel auf die andern Oberflächen des zweiten Grades anwenden kann, und die Eigenschaften eines Systems paralleler Linien auf Gerade, die in einem Punkt zusammenkommen; man hätte aber dabei zwei graphische oder intellectuelle Operationen statt einer zu machen.

§. 40. Wenn man übrigens einige besondre Fälle abrechnet, in welchen die Relationen der Beschreibung oder der Grösse einer Figur zu beschränkt sind, als dass man das allgemeine Transformationsgesetz anwenden sollte, welches wir auseinandersetzen werden, so bietet dieses Princip beinahe immer, besonders in Bezug auf metrische Relationen, ausser dem Vortheil einer grössern Allgemeinheit in den Resultaten noch den einer leichtern und mehr natürlichen Anwendung dar, als irgend eine besondre Methode.

In dieser Beziehung scheinen uns dieses Princip der *Transformation* und das Princip der Deformation, welches die verschiedenen Methoden ersetzt, die wir in unsre zweite Abtheilung zusammengefasst haben, wenn sie in ihrer grössten Allgemeinheit und auf vollkommen abstracte Art angewandt werden, die Vorschrift des berühmten Verfassers der *Mécanique céleste* zu rechtfertigen: „Gebet den allgemeinen Methoden den Vorzug, bemüht Euch, sie auf die einfachste Weise darzustellen, und Ihr werdet gleichzeitig sehen, dass sie beinahe immer die einfachsten sind" 34); wozu noch Lacroix mit der Autorität, welche ihm seine grosse Erfahrung und seine gründlichen Kenntnisse in der Wissenschaft geben, hinzufügt: „Die allgemeinen Methoden sind auch am meisten geeignet, die wahre Metaphysik der Wissenschaft erkennen zu lassen." 35)

§. 41. Die Geometrie ist in den letzten dreissig Jahren um so viele und verschiedene Sätze und selbst neue Theorien vermehrt worden, dass wir in unserm Abriss der Geschichte ihrer Fortschritte in diesem Zeitraum uns darauf haben einschränken müssen, die hauptsächlichsten Methoden hervorzuheben, ihren Ursprung, ihre Natur und ihre Anwendung in der rationellen Geometrie zu zeigen.

Eine ausführliche Analyse so vieler Arbeiten, auf welchen in diesem Momente die Fortschritte und die Zu-

---

34) *Séances des écoles normales*, t. IV, p. 49, 1800., in 8.

35) *Essais sur l'enseignement*, 3te Ausg., in 8. 1828.

kunft der Geometrie beruhen, wäre bestimmt von grossem Nutzen, sie würde aber bedeutenden Raum erfordern und bei weitem die Grenzen überschreiten, welche wir hier beobachten müssen.

Indessen können wir es uns nicht versagen, unter vielen andern, zwei Doctrinen anzuführen, welche in verschiedener Hinsicht uns von grösserer Wichtigkeit zu sein scheinen, für die Vervollkommnung der speculativen Geometrie und für ihre Anwendungen auf Untersuchungen der physischen Phänomene. Wir wollen nämlich sprechen von der Theorie der Oberflächen des zweiten Grades und von der Geometrie der Kugel, d. h. von der Lehre der Figuren, die auf der Kugel beschrieben sind.

Diese letztere ist so alt und die Oberflächen des zweiten Grades sind ein, zumal in den letzten Jahren, so wiederholt behandelter Gegenstand, dass es vielleicht scheint, als wäre für diese beiden Gegenstände nichts Bedeutendes zu thun übrig geblieben und als verdienten sie nicht die Wichtigkeit, welche wir ihnen eben geben wollen. Wir müssen uns also bemühen, unsre Meinung zu rechtfertigen, um dem Gefühl des Unglaubens zuvorzukommen, von dem wir fürchten, dass es sich bei mehren Geometern finden dürfte, welche es für werth halten, uns zu lesen.

Geometrie der Kugel.

§. 42. Die Geometrie der Kugel ist von bedeutendem Alter, sie entstand an demselben Tage, an welchem der philosophische Astronom das Band aufzufinden sich vornahm, welches die Phänomene der planetarischen Welt an einander kettet. So haben wir gesehen, dass Hipparch, Theodosius, Menelaus und Ptolemäus in der sphärischen Trigonometrie sehr weit vorgeschritten waren. Aber diese ganze Theorie reducirte sich auf die Berechnung der Dreiecke, und wenn sie auch seitdem erweitert ist und unter den Händen unsrer berühmtesten Geometer einen hohen Grad von Vollkommenheit erlangt hat, so hat sie doch immer so ziemlich denselben Umfang beibehalten, weil sie beständig dieselbe Bestimmung erhielt, die Berechnung der Dreiecke für den Astronomen und den Schiffer und für die grossen geodätischen Unternehmungen, welche uns die wahre Gestalt des Erdballs kennen gelehrt haben. Aber diese Lehre, welche ungefähr der der geraden Linien und der Dreiecke entsprechen, macht nicht allein die Geometrie der Kugel aus. Wie viele andre Figuren, wie z. B. der Kreis, können nicht auf dieser krummen Oberfläche betrachtet wer-

den, nach Art der Figuren, die in der Ebene beschrieben sind?

Es sind jedoch erst ungefähr vierzig Jahre, dass diese so natürliche Erweiterung in die Geometrie der Kugel eingeführt ist. Denn wenn wir die Theorie der sphärischen Epicycloiden ausnehmen und noch einige isolirt stehende Untersuchungen, wie die über die Curven, welche Guido Grandi *clélies* genannt hat, so finden wir nicht leicht, dass man auf der Kugel dieselben Aufgaben aufzulösen versucht hat, die denen in der ebenen Geometrie entsprechen, bis Lexell in den *Actis Petropol.* (t. V und VI) die Eigenschaften der Kreise auf der Kugel untersuchte, welche denen der Kreise in der Ebene analog sind. Diesem Geometer verdankt man das elegante Theorem über die Curve, welche der geometrische Ort für die Scheitel aller sphärischen Dreiecke ist, welche gleichen Flächeninhalt und dieselbe Basis haben.

Bald darauf löste sein Landsmann Fuss in zwei Memoiren in den *Novis Actis* (t. II und III) einige Probleme aus der Geometrie der Kugel und beschäftigte sich hauptsächlich mit einer gewissen *sphärischen Ellipse*. Es ist diese Curve der geometrische Ort der Scheitel von Dreiecken, welche dieselbe Basis haben und in denen die Summe der beiden andern Seiten constant ist. Fuss findet, dass diese Curve der Durchschnitt der Kugel und eines Kegels vom zweiten Grade ist, welcher seinen Scheitel im Mittelpunkt der Kugel hat: mit andern Worten, es ist die Linie der Krümmung der Kegel vom zweiten Grade.[36])

Diese ersten Arbeiten von Lexell und Fuss wurden in den Memoiren derselben Academie [37]) von Schubert fortgesetzt, von dem wir schon angeführt haben, dass er die ganze sphärische Trigonometrie auf das einzige Theorem des Ptolemäus gegründet hat. Dieser Geometer löste mehre Aufgaben über die geometrischen Oerter der Scheitel von Dreiecken auf, welche auch einerlei Basis haben, wie in den Problemen von Lexell und Fuss, bei welchen

---

36) Diese Curve wird auf der Kugel, eben so wie die Ellipse in der Ebene, vermittelst eines Fadens beschrieben, dessen beide Enden in den Brennpunkten befestigt sind und welcher durch einen beweglichen Stift gespannt ist. Die analytischen Formeln, welche Fuss anwendet, führen zu dem merkwürdigen Resultat, dass, wenn die Länge des Fadens gleich der halben Peripherie der Kugel ist, die beschriebene Curve immer ein grösster Kreis ist, welche auch die Distanz der beiden Brennpunkte sein mag.

37) *Nova Acta*, t. XII, J. 1794, p. 196.

aber die beiden andern Seiten unter einander verschiedene andre neue Relationen haben.

Diese Art von Untersuchungen, welche eine reiche Ausbeute von neuen Wahrheiten verspricht, ist beinahe ganz unbeachtet geblieben, so dass das elegante Theorem von Lexell, obwohl es von Legendre in den zahlreichen Ausgaben seiner Geometrie reproducirt worden ist, doch die Existenz eines analogen und nicht weniger merkwürdigen Theorems hat ahnen lassen, welches die Theorie der *supplementaren* Figuren giebt. Erst in der letzten Zeit ist Sorlin darauf direct gekommen, in einem Memoire über sphärische Trigonometrie, worin die Dualität, d. h. die doppelten Eigenschaften der Figuren auf der Kugel in vollständiger Uebereinstimmung dargestellt sind. 38) Auch sind es nur wenige Jahre her, dass die *sphärische Ellipse* von Fuss durch Magnus in Berlin von Neuem in Betracht gezogen ist, welcher durch die Analysis die correspondirende Eigenschaft am Kegel entdeckte und direct bewies und hieraus die dieser Ellipse schloss. Aber dieser Geometer entdeckte auch noch eine zweite, nicht weniger schöne Eigenschaft, welche ebenfalls mit einer der Haupteigenschaften der ebenen Ellipse analog ist; es ist die, dass die beiden Bögen grösster Kreise, welche von den beiden Brennpunkten nach einem Punkt der Curve gezogen werden, mit dem tangirenden Bogen in diesem Punkt gleiche Winkel bilden. 39)

Einzelne andre Geometer haben, schon einige Jahre früher, verschiedene Aufgaben aus der Geometrie der Kugel aufgelöst und ihre Analogien mit denen der ebenen Geometrie aufgesucht. So hat Lhuillier aus Genf für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke Theoreme gefunden, welche den Haupteigenschaften der rechtwinkeligen geradlinigen Dreiecke analog sind, wie z. B. solche in Bezug auf das Quadrat der Hypotenuse 40); und hat den Mittelpunkt der mittlern Distanzen des sphärischen Dreiecks bestimmt. 41) Gergonne hat in den *Annales des Mathématiques* mehre Aufgaben aus der sphärischen Geometrie aufgestellt, welche auch ihre analogen in der Ebene haben. Wir führen unter andern folgende schöne Eigen-

---

38) *Annales des Mathématiques*, t. XV, J. 1824—1825.

39) *Ebend.*, t. XVI.

40) *Ebend.*, t. I, J. 1810—1811.

41) *Ebend.*, t. II, J. 1811—1812.

schaft des sphärischen Vierecks an, welche dieses gemeinschaftlich mit dem geradlinigen Viereck hat: *wenn die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten gleich ist der Summe der beiden andern Seiten, so lässt sich in das Viereck ein Kreis beschreiben.* [42]) Guéneau d'Aumont, Professor an der Facultät der Wissenschaften zu Dijon, hat bei den sphärischen Vierecken, welche einem Kreise eingeschrieben sind, diese charakteristische Eigenschaft bemerkt, welche in der Theorie der supplementären Figuren dem Theorem von Gergonne entspricht, dass nämlich *die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel im Viereck gleich ist der Summe der beiden andern Winkel* [43]); eine Eigenschaft, welche nothwendig eine der hauptsächlichsten in den Elementen der sphärischen Geometrie sein wird, da sie eine einfache und fruchtbare Relation zwischen vier Punkten ausdrückt, welche einem kleinen Kugelkreise angehören. Quetelet hat auf der Kugel Polygone betrachtet, welche ohne Unterschied von Bögen grosser oder kleiner Kreise gebildet sind, und hat zur Berechnung ihrer Oberflächen eine einfache und elegante Formel gegeben [44]): eine Untersuchung, welche schon wiederholt die Geometer beschäftigt hatte; zuerst Courcier [45]), von dem wir gesagt haben, dass er über gewisse Curven doppelter Krümmung geschrieben hat; sodann D'Alembert [46]) und Bossut [47]), welche die Hülfsmittel der Analysis angewandt haben und für welche diese Untersuchung ein Beweis gewesen war, dass die reine Geometrie oft einen leichtern und kürzern Weg darbiete, als der sinnreichste und feinste Calcul.

§. 44. Wir bemerken bis jetzt nur einige herausgerissene, schöne Sätze, welche fähig sind, den Geschmack an der sphärischen Geometrie anzuregen, welche aber noch nicht ein methodisches und zusammenhängendes Studium dieses Theils der Wissenschaft verkündigen. Erst in der letzten Zeit hat man es unternommen, die Theorie

---

42) Ausgesprochen t. V, p. 384, und von Durande bewiesen t. V, p. 49.

43) *Annales des Mathématiques*, t. XII, J. 1821—1822.

44) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. II, J. 1822.

45) *Supplementum sphaerometriae, sive triangularium et aliarum in sphaera figurarum quoad areas mensuratio*; 1676.

46) *Mémoires de la société royale de Turin*, tom. IV, p. 127, J. 1766—1769.

47) *Traité de calculs différential et intégral*, t. II, p. 522.

der Kugel gleich der der ebenen Geometrie zu begründen. Steiner hat, wie ich glaube, zuerst diesen Weg betreten, in seiner Abhandlung: *Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren* [48]), vermittelst graphischer Construction, welche auf dem angeführten eleganten Theorem von Guéneau d'Aumont beruht. Steiner beweist darin den Satz, welcher, nach der Theorie der supplementären Figuren, dem Theorem von Fuss über die sphärische Ellipse entspricht [49]), und erkennt bei diesen Curven zwei Bögen grösster Kreise, welche die Stelle der Asymptoten der ebenen Hyperbel vertreten. (Diese sind die beiden Bögen, welche wir in unserm Memoire über die sphärischen Kegelschnitte *cyklische Bögen* genannt haben und auf welche wir unsrer Seits durch die Betrachtung von Ebenen gekommen sind, welche einen Kegel zweiten Grades in Kreisen schneiden.

Wir können nicht näher auf die Arbeit von Steiner eingehen, da sie deutsch geschrieben ist und wir sie nur aus dem Bericht kennen, welcher sich darüber in dem *Bulletin universel des sciences* (t. VIII, p. 298) findet. Eben so führen wir auch noch Gudermann an, welcher auch noch specielle und tiefsinnige Untersuchungen über die Analogie der sphärischen Figuren mit den ebenen Figuren angestellt hat. [50])

§. 45. Auf diese Weise hat die Geometrie der Kugel in regulärer und dogmatischer Weise begonnen; und die

---

48) *Journal* von Crelle, t. II.

49) Dieser Satz ist folgender: *Die Enveloppe der Grundlinien von Dreiecken, welche denselben Flächeninhalt und einen gemeinschaftlichen Winkel haben, ist eine sphärische Ellipse.* Als auch wir diesen Satz bewiesen, zuerst in unserm Memoire über die Revolutions-Oberflächen des zweiten Grades, und sodann in einer besondern Schrift über die *sphärischen Kegelschnitte*, glaubten wir zuerst darauf gekommen zu sein, indem wir damals den Bericht über das Memoire von Steiner, welcher sich in dem *Bulletin des sciences* findet, noch nicht kannten. Ohne diesen Umstand hätten wir nicht unterlassen, die Arbeit dieses tiefsinnigen Geometers ebenfalls anzuführen, wie wir es bei mehren Gelegenheiten mit der von Magnus über denselben Gegenstand gethan haben.

50) Das *Bulletin des sciences* (t. XV, p. 75, Febr. 1831) sagt in seinem *compte rendu* über den VIten Band des *Journals* von Crelle: „Gudermann setzt einige Theoreme auseinander, welche sich auf die Theorie beziehen, die er *analytische Sphärik* nennt, eine Theorie, deren Principien er in einer vor Kurzem in Köln erschienenen Schrift gegeben hat. Es handelt sich darin, auf dem Wege der Analogie von den Eigenschaften der ebenen Figuren zu denen der Figuren auf der Kugel zu kommen, indem man sie auf ein sphärisches Coordinatensystem bezieht."

Namen der Geometer, welche dies unternommen haben, verbürgen uns schnelle Fortschritte in diesem Theile der Wissenschaft der Ausdehnung. Man wird nicht den theoretischen Nutzen solcher Untersuchungen bestreiten. Um ihn nachzuweisen, reicht es, wie ich glaube, hin, bemerklich zu machen, dass die ebene Geometrie nur ein besonder Fall von der Geometrie der Kugel ist, wenn man den Radius unendlich setzt; so dass alle Hauptwahrheiten der ersten auch an den allgemeinsten Eigenschaften der zweiten Theil nehmen müssen; und es ist immer von Nutzen, die geometrischen Wahrheiten zu betrachten in ihrer grössten Ausdehnung, in ihrer grössten Allgemeinheit, in ihrer, so zu sagen, grössten Annäherung an die höchsten Gesetze, deren Aufsuchung beständiger Zweck bei den Anstrengungen der Geometer sein muss. Sie sind, in diesem Zustand der Allgemeinheit, Verhältnisse und Analogien, welche man nicht in ihren Corollarien findet und welche die Verkettung zeigen und dazu dienen, sich immer höher zu erheben und allgemeine Principien zu entdecken, deren Spuren verwischt oder unbemerkt geblieben sind in den mehr umschriebenen oder mehr particulären Sätzen. Wenn also auch die Geometrie der Kugel nur als eine Art von Verallgemeinerung der Eigenschaften ebener Figuren betrachtet würde, unabhängig von ihrem eignen und absoluten Charakter und Werth, so würde sie doch die Aufmerksamkeit und das Studium der Geometer verdienen. Denn, wir haben es schon bei einer andern Gelegenheit gesagt[51]), in dem Zustande, zu welchem die Geometrie gekommen ist, ist die *Verallgemeinerung* das geeignetste Mittel, uns zu neuen Fortschritten und zu neuen Entdeckungen zu führen. Diese Art des Verfahrens bei dem Studium der Wissenschaft muss die Arbeiten des Geometers leiten.[52])

Oberflächen des zweiten Grades.

§. 46. Um unsre Uebersicht über den Weg und die Fortschritte der neuen Geometrie zu beenden, ist uns noch übrig, von einer ihrer wichtigsten und ausgebildetsten besondern Theorien zu sprechen, von der der Oberflächen des zweiten Grades.

---

51) Kapitel III, §. 20.

52) „Eine wahrhaft nützliche Darstellung der Wissenschaft ist die, welche in den Fortschritten, die sie täglich macht, Nichts sieht und Nichts sucht, als die Mittel, zu allgemeinen Gesetzen zu kommen und die erlangten Begriffe in Verallgemeinerungen einer höhern Ordnung zusammenzufassen." (Herschel, *Discours sur l'étude de la philosophie naturelle.*)

Die Alten scheinen von diesen Oberflächen, ausser dem Kegel und Cylinder, nur die gekannt zu haben, welche durch Umdrehung entstanden sind und welche sie *Sphäroide* und *Conoide* nannten [53]); und bis auf Euler hat man im Raum von keiner andern Analogie mit den so berüchtigten ebenen Curven, den *Kegelschnitten*, Etwas gewusst. Aber indem dieser grosse Geometer auf die krummen Oberflächen die analytische Methode übertrug, welche ihm zur Discussion der ebenen Curven gedient hatte [54]), entdeckte er in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen den drei rechtwinkligen Coordinaten, fünf verschiedene Arten von Oberflächen [55]), von denen die Sphäroide und Conoide der Alten nur besondre Formen waren. Euler beschloss seine Arbeit mit dieser Classification. Es war eine genügende Einleitung, um den Geometern ein weites Feld von Untersuchungen zu eröffnen, welches ihnen diese Theorie der Oberflächen zweiten Grades darbot.

Monge und sein College Hachette sahen die Wichtigkeit hiervon ein und entdeckten bei einer neuen analytischen Discussion dieser Oberflächen, welche gründlicher und vollständiger als die von Euler war, mehre ihrer vorzüglichsten Eigenschaften. Man bemerkt darin ihre doppelte Beschreibung durch einen beweglichen Kreis, welcher seit Desargues [56]) an dem Kegel bekannt war, der einen Kegelschnitt zur Grundfläche hat, welche seitdem aber von D'Alembert [75]) nur an dem Ellipsoid bemerkt wurde; man findet darin auch, zum ersten Mal, die doppelte Erzeugung zweier von diesen Oberflächen durch eine bewegliche Gerade, nämlich die des Hyperboloids mit einem Fach und des hyperbolischen Paraboloids. [58]) In

53) Man muss das Revolutions-Hyperboloid mit einem Fach ausnehmen, welches die Alten nicht betrachtet haben.

54) *Introductio in analysin infinitorum*, 2 Vol. in 4., 1748; Anhang, Cap. V.

55) Euler hat eine sechste Art von Oberflächen zweiten Grades angegeben, den paraboischen Cylinder; später aber hat man diese Oberfläche, so wie die Cylinder mit elliptischer und hyperbolischer Basis, als Unterarten der fünf Hauptarten betrachtet.

56) Wir haben bei Gelegenheit des Desargues gesagt, dass dieser Geometer die Aufgabe stellte, einen Kegel, dessen Basis ein Kegelschnitt ist, in einem Kreise zu schneiden, welche er selbst und Descartes auflösten.

57) *Opuscules mathématiques*, t. VII, p. 163.

58) Diese Entdeckung, eine der wichtigsten in der Theorie der Oberflächen zweiten Grades, von der man in der beschreibenden

einer Note, welche diesem *Traité* der Oberflächen zweiten Grades hinzugefügt ist, findet sich zum ersten Male eine

---

Geometrie und in ihren Anwendungen auf die Künste vielfältig Gebrauch macht, ist ein Eigenthum der *élèves chefs de brigade*, welche den Kern der polytechnischen Schule ausmachten. (S. das *Journal de l'école*, t. I, p. 5.)

Diese Eigenschaft des Hyperboloids war zuerst lange Zeit hindurch nur mit Hülfe der Analysis bewiesen. Während ich Schüler der polytechnischen Schule war, fand ich einen rein geometrischen Beweis, welcher in den Unterricht in der Schule aufgenommen und in verschiedenen Werken reproducirt ist. (S. den *Traité de Géométrie descriptive* von Vallée, p. 86, und den von Leroy, Professor an der polytechnischen Schule, p. 267.)

Dieser Beweis beruht auf folgendem Theorem: *Wenn ein nicht ebenes Viereck* (*quadrilatère gauche*) ABCD *gegeben ist und wenn eine bewegliche Gerade zwei gegenüberliegende Seiten* AB *und* CD *in zwei Punkten* m *und* n *schneidet, welche von der Beschaffenheit sind, dass man hat:*

$$\frac{mA}{mB} = a \cdot \frac{nD}{nC},$$

wo a *eine constante ist; so erzeugt diese Gerade ein Hyperboloid mit einem Fach.* Denn diese Gerade schneidet in allen ihren Lagen jede gerade Linie, welche die beiden andern gegenüberliegenden Seiten in zwei solchen Punkten p und q trifft, dass man hat:

$$\frac{qA}{qD} = a \cdot \frac{pB}{pC}.$$

(S. *Correspondance polytechnique*, t. II, p. 446.)

Der Beweis dieses Satzes ist sehr leicht, weil man dazu nur den Satz von Ptolemäus über ein Dreieck, welches von einer Transversale geschnitten wird, kennen darf. (*Correspondance polytechnique*, t. III, p. 6.) Später hat mir die Theorie des *anharmonischen Verhältnisses* noch einen einfachern und mehr elementaren Beweis geliefert, welcher ganz allein auf dem Begriff des anharmonischen Verhältnisses beruht. (S. Note IX.)

Dieses Theorem lässt sich auch auf die Erzeugung der Kegelschnitte anwenden und drückt eine hübsche allgemeine Eigenschaft dieser Curven aus. (S. *Corresp. mathém.* von Quetelet, tom. IV, p. 363.)

Wenn wir sagen, dass die doppelte Erzeugung des Hyperboloids mit einem Fach in der polytechnischen Schule aufgefunden ist, so meinen wir dabei nur das Hyperboloid mit ungleichen Axen, und wir müssen hinzufügen, dass die doppelte Erzeugung des Revolutions-Hyperboloids mit einem Fach vermittelst einer Geraden schon bekannt, aber vielleicht vergessen war, denn seine Entdeckung ist schon älter, ist aber selten reproducirt worden. Wir finden, dass sie von Wren ist, der sie in einer ganz kurzen Bemerkung in den *Philosophical-Transactions* (J. 1669, p. 961) unter dem Titel anführt: *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici, elaborandis lentibus hyperbolicis accomodati.* Wren giebt den Gebrauch an, wel-

ihrer schönsten Eigenschaften bewiesen, dass nämlich die drei Oberflächen, welche einen Mittelpunkt haben, das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide [59]), immer ein System von drei rechtwinkligen conjugirten Durchmessern haben. [60])

§. 47. Seitdem haben die Schüler von Monge mit Erfolg die Theorie der Oberflächen des zweiten Grades ausgebildet und die Untersuchung ihrer Eigenschaften weiter geführt; zunächst derer, welche sich nur auf die jeder Oberfläche eigenthümlichen Beschaffenheit beziehen, wenn man diese Oberfläche für sich allein betrachtet oder in ihren Beziehungen zu den geometrischen Objecten, die einfacher sind, als sie, d. h. zum Punkt, zur geraden Linie und Ebene; und darauf derjenigen Eigenschaften, welche aus der Vergleichung zweier oder mehrer Oberflächen unter einander entstehen. Monge selbst hat noch die ersten Schritte für diese zusammengesetztern Untersuchungen gethan. Wir können jedoch nicht näher auf alle diese Entdeckungen eingehen, so anziehend es auch sein möchte.

---

chen man von dieser Erzeugung durch eine Gerade zur Construction hyperbolischer Linsen machen kann.

Im Jahr 1698 hat auch Parent diese Eigenschaft des Drehungs-Hyperboloids gefunden, die er in zwei verschiedenen Memoiren bewiesen hat; durch die Analysis und durch einfache geometrische Betrachtungen. (*Essais et Recherches de mathématiques et de physique*, t. II, p. 645 und t. III, p. 470.) Diese Eigenschaft, welche die andern Oberflächen, die durch die Umdrehung eines Kegelschnitts um eine seiner Axen entstanden sind, nicht haben, verursachte bei Parent den Ausspruch, dass das Hyperboloid mit einem Fach die vollständigste dieser Oberflächen sei, weil man an ihr sechs verschiedene Schnitte erhalten kann: den parallelen Raum, den geradlinigen Winkel, den Kreis, die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel. Dieser Geometer nennt diese Oberfläche *hyperbolisches Cylindroid*, so wie Wren, und bedient sich auch ihrer Eigenschaft, dass sie durch eine Gerade erzeugt ist, zur Construction der hyperbolischen Steine, die in der Dioptrik nöthig sind.

Sauveur hat auch diese Eigenschaft des Revolutions-Hyperboloids bewiesen, so wie mehre andre Sätze, welche sich auf das Volumen und die Oberflächen der Conoide beziehen, deren Ausspruch Parent diesem Geometer mitgetheilt hatte. (*Essais et Recherches de mathématiques et de physique*, t. III, p. 526.)

59) Wir betrachten den Kegel zweiten Grades als einen besondern Fall der Hyperboloide, so wie man in der ebenen Geometrie das System zweier Geraden, als eine besondre Form oder Grenze der Hyperbel betrachtet. Deshalb rechnen wir nicht die conische Oberfläche zu den hauptsächlichsten Oberflächen, welche einen Mittelpunkt haben.

60) S. das 11te Heft des *Journal de l'école polytechnique*, p. 170.

Sie sind so innig mit allen geometrischen Untersuchungen verknüpft, welche seit dreissig Jahren in Anregung gebracht sind, dass wir gegen unsern Willen in eine Weitläufigkeit gerathen würden, welche wir durchaus vermeiden wollen. Um jedoch unser Stillschweigen über diesen Gegenstand zu ersetzen, verweisen wir auf die Stellen, worin Ch. Dupin, bei Gelegenheit der Analysirung der Arbeiten von Monge in der analytischen Geometrie, auch die Leistungen seiner Schüler anführt; und auf die Einleitung zu dem *Traité des propriétés projectives*, worin Poncelet mit einer ängstlichen, aber lobenswerthen Sorgfalt die Priorität anführt, welche andre in Bezug auf einen Theil der geometrischen Wahrheiten haben könnten, die sich auf ganz natürliche Weise aus seinen neuen Lehren ableiten müssen.

Fortschritte, deren die Theorie der Oberflächen zweiten Grades fähig ist.

§. 48. Ungeachtet der Wichtigkeit der Fortschritte, welche die Theorie der Oberflächen zweiten Grades gemacht hat, so müssen wir doch hinzufügen, dass sie nur einen kleinen Theil von denen ausmachen, deren sie uns noch fähig zu sein scheint. Man wird dies begreifen, wenn man nur einen Blick auf die vorzüglichen Eigenschaften der Kegelschnitte wirft, für welche wir noch nicht alle analogen Eigenschaften bei den Oberflächen des zweiten Grades kennen. Dass diese analogen Eigenschaften aber vorhanden sind, sieht man daraus, dass sie die Eigenschaften der Kegelschnitte als Corollare geben müssen, wenn man annimmt, dass die Oberfläche eine ihrer Dimensionen verliert und sich auf einen Kegelschnitt reducirt. Die Oberflächen des zweiten Grades müssen nicht allein alle Erscheinungen darbieten, welche die Kegelschnitte gewähren, sondern es müssen sich bei ihnen noch viele andre finden, welche in der vollständigern Form, nämlich in den drei Dimensionen liegen, und welche zugleich mit einer dieser Dimensionen verschwinden. Von dieser Art sind z. B. die Eigenschaften, welche sich auf die *Krümmungslinien* (*lignes de courbure*) beziehen und welche Monge zuerst kennen gelehrt hat, von denen aber hernach Binet und Dupin wunderbare Eigenschaften aufgefunden haben. [61])

---

61) Dupin ist unter andern schönen Resultaten und durch rein geometrische Betrachtung zu einer mechanischen Beschreibung der Krümmungslinien der Oberflächen zweiten Grades gekommen. (*Journal de l'école polytechnique*, 14ter Band.)

Um bei denjenigen Eigenschaften der Oberflächen zweiten Grades stehen zu bleiben, welche uns die einfache Analogie mit den Kegelschnitten vermuthen lässt, erinnern wir z. B. an die *Brennpunkte* dieser Curven, welche die Quelle eines Theils ihrer schönsten und wichtigsten Eigenschaften sind. Die Punkte finden sich in drei Revolutions-Oberflächen (das längliche Ellipsoid, das Hyperboloid mit zwei Fächern und das Paraboloid), wo Ch. Dupin an ihnen Eigenschaften erkannt hat, welche sowohl für die Theorie, als auch für die Anwendung auf gewisse physische Phänomene von Wichtigkeit sind. 62) Dieses war doch gewiss eine Andeutung, dass irgend etwas Aehnliches und Allgemeineres sich bei jeder Oberfläche des zweiten Grades finden müsse; ich weiss aber nicht, dass man noch untersucht hätte, was dieses sein könnte.

Ueberzeugt davon, dass eine solche Theorie, welche in den Oberflächen des zweiten Grades der der Brennpunkte bei den Kegelschnitten entspräche, eine neue Quelle interessanter Eigenschaften und besonders geeignet sein würde, um uns in der vollständigen Kenntniss dieser Oberflächen weiter zu bringen, haben wir dieselbe zum Gegenstand unsrer Untersuchungen gemacht. Die Analogie zwischen den *Brennpunkten* der Kegelschnitte und gewissen *Geraden* bei den Kegeln zweiten Grades 63), welche wir schon ziemlich weit verfolgt hatten, brachte uns natürlich auf den Weg der analogen Eigenschaften bei den Oberflächen, indem sie uns andeutete, dass es *Curven* wären, welche die Stelle dieser Geraden beim Kegel und dieser Punkte bei den Kegelschnitten vertreten müssten. Wir werden in der Note XXI einige Resultate anführen, welche uns zur Annahme berechtigen, dass wir auf die gesuchte Analogie gekommen sind. Wir denken diese Arbeit bekannt zu machen, aber zuerst die Elemente zu liefern, indem wir lebhaft wünschen, dass der Anfang, den wir in Bezug auf diesen Gegenstand machen, Anziehendes genug enthalten möge, um andre Kräfte, als die unsrigen, hervorzurufen.

§. 49. Es giebt noch eine andre Frage, von der gleichfalls die künftigen Fortschritte der Theorie der Oberflächen zweiten Grades abhängen und deren Wichtigkeit

---

62) *Applications de Géométrie*, in 4., 18.

63) *Mémoires de Géométrie, sur les cônes du second degré.*

von der Academie zu Brüssel anerkannt ist. Es ist dieses die Analogie, welche zwischen einer noch unbekannten Eigenschaft dieser Oberflächen und dem berühmten Theorem von Pascal für die Kegelschnitte stattfinden muss.[64]

Wenn man von den verschiedenen Transformationen abstrahirt, deren dieses Theorem fähig ist, und es nur unter der Form und der Aussprache betrachtet, welche ihm eigenthümlich sind, so kann man von demselben eine doppelte Ansicht fassen. Man kann es so betrachten, als drücke es eine allgemeine und constante Relation zwischen irgend welchen sechs Punkten eines Kegelschnitts aus, d. h. worin *ein Punkt mehr* enthalten ist, als zur Bestimmung der Curve nothwendig sind; oder auch so, als drücke es eine allgemeine Eigenschaft eines Kegelschnitts in Bezug auf ein Dreieck aus, welches willkührlich in seiner Ebene gezeichnet ist.[65]

Hiernach kann man auch das Analoge des Theorems von Pascal im Raume auf zwei Arten auffassen. Im ersten Fall wird es eine allgemeine Eigenschaft von zehn *Punkten* sein, welche einer Oberfläche zweiten Grades angehören, d. h. worin *ein Punkt mehr* enthalten ist, als zur Bestimmung einer solchen Oberfläche nothwendig sind. Im zweiten Fall wird es eine allgemeine Eigenschaft sein, welche aus dem Systeme einer Oberfläche zweiten Grades und eines Tetraeders entspringt, welches eine willkührliche Lage im Raume hat.

Die erste Aufgabe, welche zur Förderung der Theorie der Oberflächen zweiten Grades vorzüglich nützlich sein muss, wurde von der Academie zu Brüssel im Jahr 1825 vorgelegt, blieb aber ohne Lösung. Für die folgende Bewerbung verlangte die Academie nur das Theorem in Bezug auf die Oberflächen zweiten Grades, welches dem des Pascal in Bezug auf die Kegelschnitte analog wäre. Dieses war in der ersten Frage mitbegriffen und liess zugleich vollkommene Freiheit in Bezug auf die Betrachtung des Theorems von Pascal und der Analogie, welche zwi-

64) Das, was wir von dem Theorem des Pascal sagen, muss auch von dem des Brianchon gelten, welches in der Theorie der Kegelschnitte dieselbe Rolle spielt.

65) Dieses Dreieck wird z. B. von den Seiten mit ungeradem Index gebildet, die zu dem Seckseck gehören, welches in dem Theorem des Pascal betrachtet wird; und dann drückt dieses Theorem aus, dass drei von den Sehnen, die in dem Kegelschnitt zwischen den drei Winkeln des Dreiecks enthalten sind, die gegenüberliegenden Seiten respective in drei Punkten treffen, welche in einer geraden Linie liegen.

schen den Oberflächen und den Curven des zweiten Grades stattfinden muss.

Diese neue Aufgabe der Academie bot nicht so grosse Schwierigkeiten, als die erste, dar. In unsrer XXXIIIsten Note geben wir den Ausspruch eines Theorems, welches uns dieselbe zu lösen scheint. Denn es drückt eine allgemeine Eigenschaft eines Tetraeders und einer Oberfläche des zweiten Grades aus, welche der Eigenschaft eines Dreiecks und eines Kegelschnitts analog ist, die das Theorem von Pascal angiebt. Aber es ist dieses Theorem weit von der allgemeinen Relation zwischen irgend welchen zehn Punkten einer Oberfläche zweiten Grades entfernt, welche gewiss verdient, dass sich die Geometer mit deren Aufsuchung beschäftigen. Ohne Zweifel haben wir noch nicht alle, zu dieser Untersuchung nothwendigen Elemente; aber es ist nothwendig, die Eigenschaften der Oberflächen zweiten Grades in allen Beziehungen, in allen Gestalten zu untersuchen. Keine Theorie, keine Entdeckung, so klein sie auch anfangs erscheinen mag, darf ganz vernachlässigt werden; denn, wenn auch die unmittelbare Anwendung fehlt, so hat doch jede partielle Wahrheit den Vortheil, ein Glied in der zusammenhängenden Kette zu sein, welche alle Wahrheiten dieser weitläufigen Theorie unter einander verbindet; und dieses einfache Glied ist vielleicht der Keim zu grossen Entdeckungen, welche mit Schnelligkeit die Verallgemeinerungsmethoden der neuen Geometrie entwickeln werden.

§. 50. Um zu der Relation zwischen zehn Punkten zu gelangen, dürfte es vielleicht ein nützliches Vorstudium sein, vollständig und für alle Fälle das Problem aufzulösen, in welchem es sich um die Construction einer Oberfläche zweiten Grades handelt, die neun Bedingungen unterworfen ist, nämlich durch gegebene Punkte zu gehen und gegebene Ebenen zu berühren. Dieses Problem verdient schon an und für sich die Anstrengungen der Geometer. Wir sehen aber, dass bis jetzt nur Lamé sich mit einem der allgemeinen Fälle desselben beschäftigt hat. Dieser gewandte Professor hat die Elemente bestimmt, welche zur Construction einer Oberfläche des zweiten Grades hinreichen, die durch neun gegebene Punkte gehen soll. 66) Aber die Discussion seiner allgemeinen Lösung und die Prüfung ihrer Folgesätze und der besondern Fälle,

---

66) *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*; in 8., 1818.

welche sich dabei darbieten, verdienen neue Untersuchungen.

Vielleicht wäre es auch noch nützlich, bevor man an die Untersuchung der zehn Punkte einer Oberfläche zweiten Grades ginge, die allgemeine Relation zwischen neun Punkten aufzusuchen, welche einer Curve doppelter Krümmung vom vierten Grade angehören, die der Durchschnitt irgend welcher Oberfläche zweiten Grades sind. Acht Punkte im Raum bestimmen eine solche Curve, es muss also eine constante Relation zwischen diesen acht Punkten und einem neunten geben, damit dieser letztere sich auf derselben Curve befinde, welche die acht ersten bestimmen.

Oder auch müsste man noch vorher die Relation zwischen sieben Punkten der Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade bestimmen, welche der Durchschnitt zweier Hyperboloide mit einem Fache ist, die eine gemeinsame gerade Generatrix haben und welche immer durch sechs willkührliche Punkte im Raum bestimmt ist. Diese Aufgabe bietet nicht dieselben Schwierigkeiten als die andern dar und wir glauben sie gelöst zu haben. (S. Note XXXIII.)

Vielleicht müsste man endlich, statt das Theorem von Pascal als Norm und als Vergleichungsglied zu nehmen, dieselben Versuche mit einem der andern Theoreme anstellen, welche wie dieses eine neue Eigenschaft von sechs Punkten eines Kegelschnitts ausdrücken, und welche davon entweder Folgerungen, oder einfache Transformationen sind, wie wir in der XVten Note zeigen. Unter diesen Theoremen glaubten wir, dass das, welches wir als einen andern Ausspruch der *anharmonischen* Eigenschaft der Punkte eines Kegelschnitts (angef. Note, Art. 21) vermittelst dreier Transversalen, welche willkührlich im Raume angenommen sind, zu der gesuchten Relation der zehn Punkte einer Oberfläche des zweiten Grades führen könne. Unsere ersten Bemühungen sind zwar ohne Erfolg gewesen, indess setzen wir doch noch einige Hoffnung auf dieses selbe Theorem und wünschen, dass man aus ihm einigen Vortheil zu ziehen versuchen möge.

Curven doppelter Krümmung des dritten und vierten Grades.

§. 51. Die Curven dopelter Krümmung vom vierten und dritten Grade, welche sich so natürlich bei Gelegenheit der grossen Frage über zehn Punkte einer Oberfläche des zweiten Grades herausstellen, nehmen noch aus einem andern Grund eine Stelle in den Untersuchungen der Geometer ein. Diese Curven können auch, so

wie die Oberflächen zweiten Grades, im Raume gewisse Analogien mit den Kegelschnitten darbieten, und es giebt eine Menge von Fragen, bei welchen man sie finden wird, wenn man nicht mehr, in den Anwendungen der Geometrie, bei der einfachen Betrachtung der Kegelschnitte stehen bleibt und wenn man die schwierigeren Fragen gründlich zu behandeln versucht, welche sich durch die Combinirung der Oberflächen zweiten Grades auflösen.

Die Curven, von denen wir sprechen, sind bis jetzt noch sehr wenig behandelt worden, wir finden nur die vom vierten Grade, für welche Hachette, Poncelet und Quetelet einige allgemeine Eigenschaften gegeben haben.

Hachette betrachtet sie als den Durchschnitt zweier Kegel vom zweiten Grad und discutirt die Formen der ebenen Curven vom vierten Grad, welche ihre Projection oder Perspective in einer Ebene giebt. [67])

Poncelet beweist in seinem *Traité des propriétés projectives* (Art. 616), dass man durch die Curve des vierten Grades, welche aus dem Durchschnitt zweier Oberflächen zweiten Grades entsteht, im Allgemeinen vier Kegel des zweiten Grades legen könne.

Quetelet endlich zeigt, dass man durch die Projection der Durchschnittscurve zweier passend gewählten Oberflächen des zweiten Grades alle ebenen Curven des dritten Grades erzeugen kann. [68]) Dieses Theorem, welches dazu brauchbar sein wird, auf die ebenen Curven des dritten Grades gewisse Eigenschaften der Curven doppelter Krümmung und *umgekehrt* [69]) überzutragen, kann eine Art von Verallgemeinerung erhalten, welche seine Anwendungen oft leichter und ausgedehnter macht. Man kann sagen: *Die Durchschnittscurve zweier Oberflächen des zweiten Grades giebt in der Perspective auf eine Ebene, wenn das Auge sich in einem Punkt dieser Curve befindet, alle Curven des dritten Grades.*

---

67) *Correspondance sur l'école polytechnique*, tom. I, p. 368.

68) *Correspondance mathématique de Bruxelles*, t. V, p. 195.

69) Daraus z. B., dass eine ebene Curve des dritten Grades im Allgemeinen drei Beugungspunkte hat, welche in gerader Linie liegen, schliesst man: *dass man 1) durch irgend einen Punkt der in Rede stehenden Curve doppelter Krümmung vom vierten Grad im Allgemeinen drei Ebenen legen kann, welche diese Curve in drei andern Punkten berühren; und dass 2) diese drei Punkte und der, durch welchen die Ebenen gelegt sind, alle vier in einer Ebene liegen.*

Der schöne Satz von Quetelet war von der Art, dass er zu der Annahme verleiten konnte, die Projection oder allgemeiner die Perspective des Durchschnitts zweier Oberflächen zweiten Grades könne auch alle ebenen Curven des vierten Grades erzeugen, wozu es hinreichend wäre, das Auge ausserhalb des Perimeters der Curve anzunehmen. Aber wir glauben auf diese Frage verneinend antworten zu können und durch das folgende Theorem die besondre Natur dieser Curven des vierten Grades zu bestimmen, welche die Perspective der Durchschnittscurve zweier Oberflächen des zweiten Grades erzeugt; dass nämlich *eine solche Curve immer (und im Allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der besondern Modificationen) zwei doppelte oder conjugirte Punkte habe, welche imaginär sein können.*

Dieses Theorem verdient einige Beachtung. Denn die Folgerungen, welche man daraus ziehen kann, sind neu und antworten auf die Fragen, welche die Geometer in neuer Zeit beschäftigt haben.

Man schliesst daraus zunächst, dass die Curve vom vierten Grad, welche aus der Perspective des Durchschnitts zweier Oberflächen des zweiten Grades entsteht, nicht mehr als acht Tangenten haben kann, welche von einem willkührlich in ihrer Ebene gewählten Punkte ausgehen, während die allgemeinste ebene Curve vom vierten Grad zwölf Tangenten zulässt, die von demselben Punkte ausgehen.

Man schliesst hieraus auch noch, dass die developpable umgeschriebene zweier Oberflächen zweiten Grades im Allgemeinen und höchstens vom achten Grade ist. Diesen Grad der Oberfläche hat man noch nicht angegeben, Poncelet sagt nur, dass er nicht über den zwölften hinausgehen könne. [70])

Die Anwendungen des genannten Theorems auf die Theorie der ebenen Curven vom vierten Grade werden zahlreich sein; denn man stösst auf viele dieser Curven, von denen man erkennt, dass sie aus der Perspective oder Projection des Durchschnitts zweier Oberflächen zweiten Grades entstehen. [71])

---

70) *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* art. 103. *Mathematisches Journal von Crelle*, t. IV.

71) So sind z. B. die Ovalen des Descartes oder die aplanetischen Linien, die stereographische Projection der Durchschnittslinie einer Kugel mit einem Drehungskegel (*Theorem* von Quetelet, s. Note

§. 53. Indem wir von den Curven doppelter Krümmung des dritten und vierten Grades zu sprechen hatten, haben wir mit den letztern den Anfang gemacht, weil wir glauben, dass sie die einzigen sind, mit denen man sich bis jetzt beschäftigt hat. Das Studium der erstern ist jedoch viel einfacher und leichter. Wir haben gefunden, dass sie sich verschiedener interessanten Eigenschaften erfreuen, welche in vielen Untersuchungen vorkommen. Diese Materie könnte zu einer weitläufigen Entwickelung Gelegenheit geben, welche wir hier aber weglassen müssen.

Wir begnügen uns zu sagen, dass die Perspective der Curven doppelter Krümmung vom dritten Grade nicht alle ebenen Curven vom dritten Grade gebe, sondern nur die, welche einen doppelten oder einen conjugirten oder einen Rückkehr-Punkt haben.

§. 54. Wir wollen diese Betrachtungen über die Theorie der Oberflächen zweiten Grades und über die der Curven doppelter Krümmung, welche aus ihrem Durchschnitt entstehen, nicht weiter verfolgen. Das Gesagte zeigt schon hinlänglich, welcher Erweiterung beide fähig sind und welch ein neues Feld von neuen Untersuchun-

---

XXI). Man wird daraus schliessen, dass diese berühmten Ovalen immer zwei imaginäre *conjugirte* Punkte haben, die in der Unendlichkeit liegen. Dieses würde man auf anderm Wege vielleicht nicht sehen; denn man hat bis jetzt, bei der Untersuchung der singulären Punkte bei Curven, die imaginären Lösungen vernachlässigt, so wie auch selbst die Punkte, welche in der Unendlichkeit liegen, die oft der Analysis entgehen. Inzwischen gehören die einen, wie die andern, zu der besondern Beschaffenheit der Curven und müssen in ihrer Theorie eine wesentliche Rolle spielen.

So sind auch noch die Lemniscaten, welche durch die Fusspunkte der Perpendikel gebildet werden, die von einem festen Punkte auf die Tangenten eines Kegelschnitts gefällt werden, die stereographischen Projectionen des Durchschnitts einer Kugel mit einem Kegel zweiten Grades (*Theorem* von Dandelin, s. den 4ten B. der *Nouveaux Mémoires de l'Academie de Bruxelles*); man schliesst daraus, dass diese Curven zwei imaginäre conjugirte Punkte in der Unendlichkeit haben. Man weiss, dass sie einen dritten, immer reellen doppelten und conjugirten Punkt haben, welcher der Punkt ist, durch den man die Perpendikel zieht; daraus schliesst man, dass diese Curven nur sechs Tangenten zulassen, welche von demselben Punkte ausgehen. Auch andre Betrachtungen der ebenen Geometrie haben mich zu diesem Resultat geführt.

Viele andre Curven des vierten Grades haben ebenfalls imaginäre conjugirte Punkte, welche in der Unendlichkeit liegen. Solche sind die Schneckenlinien oder die ebenen Schnitte der ringförmigen Oberflächen, die Cassinoide u. s. w.

gen sie noch den Geometern eröffnen. Untersuchungen, welche wir zur Sicherung der fernern Fortschritte der Geometrie und der Wissenschaften, welche aus der Vereinigung der Geometrie mit der Physik entstehen, für unerlässlich halten.

Die Geometrie ist in der That, wie alle unsre positiven Wissenschaften, einer Bedingung unterworfen, welche den menschlichen Geist genirt und welche darin besteht, dass sie keinen Schritt anders weiter kommen kann, als progressive und immer von dem Einfachen zum Zusammengesetzten; und, so wie in der ebenen Geometrie der Kegelschnitte die einfachsten Curven gewesen sind, welche man hat gründlich untersuchen müssen, bevor man sich zu höhern Begriffen erhob, eben so sind in der körperlichen Geometrie die Oberflächen zweiten Grades die einfachsten Objecte, welche uns als die nothwendigen Elemente dienen müssen, um in die Kenntniss der Eigenschaften der Ausdehnung tiefer einzudringen.

Was die Wissenschaften der natürlichen Erscheinungen betrifft, so zweifeln wir nicht, dass die Oberflächen des zweiten Grades bei einer grossen Anzahl von Fragen vorkommen und eine eben so wichtige Rolle dabei spielen müssen, als die Kegelschnitte beim Planetensystem. In den gelehrtesten physikalisch-mathematischen Untersuchungen hat die Analysis schon die Gegenwart dieser Oberflächen gezeigt, aber meist hat man einen so glücklichen Umstand als zufällig und beiläufig betrachtet, ohne daran zu denken, dass er im Gegentheil direct mit der ersten Ursache des Phänomens verknüpft sein könne, und als wahrer Ursprung und nicht als eine zufällige Sache, für alle Umstände, welche dasselbe darbieten kann, angenommen werden dürfte.

Jetzt, da die reine Geometrie in sich selbst die Mittel besitzt, auf rationelle Weise und ohne zu dem Calcul und den schwierigen und mühsamen Transformationen der Analysis ihre Zuflucht zu nehmen, die zahlreichen Eigenschaften der Oberflächen des zweiten Grades darzustellen und die darauf bezüglichen Aufgaben aufzulösen, jetzt scheint uns die Vermuthung natürlich, dass man bei den allgemeinen Erscheinungen, welche den Gegenstand der Physik bilden, wo diese Oberflächen eine hinlänglich bedeutende Rolle spielen, ebenfalls wird mit der alleinigen Hülfe ihrer Eigenschaften und der allgemeinen Gesetze des Gegenstandes, nur durch Raisonnement und durch die reine Geometrie zu der Erklärung und zur vollständigen Theorie der Phänomene gelangen können. Das heisst, mit einem Wort,

dass die *auf physische Phänomene angewandte Geometrie* diese Wissenschaft eines Kepler, Huygens, Newton, Maclaurin, Stewart und Lambert bedeutend erweitert wurde durch die Vervollkommnung der Theorie der Oberflächen zweiten Grades, dieser so nützlichen und fruchtbaren Doctrin, welche ihr nach einer Ruhe von mehr als einem Jahrhundert einen neuen Aufschwung zu nehmen erlaubte. Und wir zweifeln nicht, dass diese directe und natürliche und dem Geiste genügende Methode wesentlich dazu beiträgt, ihren Gang zu erklären und ihre Entdeckungen in allen Theilen der Naturphilosophie zu erweitern. [72])

---

72) In einem kürzlich erschienenen Memoire von Poinsot über die Rotation der Körper ist ein frappantes Beispiel von der Leichtigkeit und dem Vortheil der geometrischen Methode gegeben. Diese so schwierige Frage, auf welche die berühmtesten Analysten seit einem Jahrhundert hauptsächlich ihre Mühe gewandt haben, ist darin mit einer so ausserordentlichen Klarheit und Leichtigkeit behandelt worden, dass dadurch ein besondres Vorurtheil vernichtet wurde: indem man nämlich bei der Geometrie nur auf ihr hohes Alterthum und nicht auf die Natur ihrer Leistungen und ihrer allgemeinen Bestimmung sah, verläugnete man ihren Character der Vollkommenheit und machte sie zu einer todten Sprache, die weiterhin für den menschlichen Geist ohne Nutzen und Einfluss ist. Diesem Irrthum, welcher dem Fortschreiten der Wissenschaft nur nachtheilig sein kann, erlaube man uns, den bedeutsamen Ausspruch des berühmten Verfassers der *Mécanique analytique* entgegenzusetzen, welchen er in seinem sechzigsten Jahre bei Gelegenheit einer der schwierigsten Fragen des Weltsystems that, wobei die Geometrie der Analysis zuvorgekommen war: „Mag auch die algebraische Analysis vor den geometrischen Methoden der Alten, was man gewöhnlich, obgleich uneigentlich, *Synthesis* nennt, einige Vorzüge haben, so giebt es nichts desto weniger Probleme, in denen *diese* vorzüglicher scheint, theils wegen der innewohnenden Klarheit, theils wegen der Eleganz und Leichtigkeit ihrer Lösungen. Es giebt selbst einige Probleme, für welche die algebraische Analysis gewisser Maassen nicht genügt und bei denen es scheint, dass die synthetische Methode allein sie erreichen könne." (*Sur l'attraction sphéroides elliptiques. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, J. 1773.)

Sechstes Kapitel.*)

§. 1. Die beschreibende Geometrie von Monge ist in den Unterricht über Mathematik aufgenommen. Auch die Theorie der Transversalen von Carnot, welche einer der gründlichsten Kenner der Geometrie schon längst in die Elemente eingeführt wissen wollte [1]), ist von dem grössern Theil der Professoren anerkannt, welche gegenwärtig die Haupttheoreme derselben in ihren Cursus mit aufnehmen. Aber die andern genannten Methoden sind noch in den Memoiren der einzelnen Geometer, welche sich derselben bedient haben, zerstreut, und ihre Lectüre kann, wegen der grossen Anzahl der darin enthaltenen neuen Resultate, langweilig und mühsam erscheinen. Hierin liegt, wie ich glaube, der wahre Grund der Entfremdung von der rationellen Geometrie, in der man, obwohl irrthümlich, nur ein Chaos von neuen Sätzen zu sehen glaubt, welche, zufällig gefunden, ohne Verbindung unter einander stehen und keinen wesentlichen Einfluss auf die Vervollkommnung der Wissenschaft der Ausdehnung haben.

Um diesen Irrthum zu zerstören, glaubten wir, dass es von Nutzen sein würde, alle diese partiellen und isolirt

---

*) *Bemerkung des Uebersetzers.* In diesem Kapitel giebt der Verfasser den Inhalt eines eignen Memoirs über Geometrie an, welches er diesem historischen Abriss beigefügt hat, welches wir aber, wegen seiner Unabhängigkeit davon, dem deutschen Leser als besondres Werk mittheilen werden.

1) „....; diese geistreiche Theorie der *Transversalen*, deren einfache und fruchtbare Principien es verdienen, in die Elemente der Geometrie aufgenommen zu werden ...." (*Journal de l'école polytechnique*, H. 10; *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, von Poinsot.

stehenden Wahrheiten zu coordiniren, sie alle aus nur einigen der allgemeinsten unter ihnen abzuleiten und diese auf die genannten Methoden zurückzuführen, wodurch wir zugleich eine Rechtfertigung unsrer Classification erhalten. Diese Arbeit soll den Titel führen: *Essais de complémens de Géométrie rationelle.* Ihr Hauptzweck wäre eine dogmatische Auseinandersetzung der in Rede stehenden Methoden und ihrer hauptsächlichsten Anwendungen. Wir würden damit eine neue und rein geometrische Theorie der Oberflächen zweiten Grades verbinden und eine, ebenfalls geometrische Theorie der ebenen Curven des dritten Grades, mit welchen man sich doch endlich vertraut machen muss, weil es die nothwendige Bedingung für das weitere Fortschreiten der Geometrie ist, wie es bisher die genaue Kenntniss der Curven des zweiten Grades gewesen ist.

Unser Material war mehr oder weniger bedeutend geworden, wie man aus den verschiedenen Noten sehen kann, welche wir daraus entlehnt haben, um uns derselben in dieser Schrift zu bedienen. Wie es aber bei einer solchen Arbeit, welche so viele verschiedene Untersuchungen umfasst, geschehen muss, der Stoff wuchs immer mehr an, und wir erkannten, dass eine längere Zeit und ein grösserer Raum nöthig wäre, als wir anfänglich glaubten, um sie ohne zu grosse Unvollstängkeit auszuführen. Da nun das zu weite Hinausschieben auch sein Unangenehmes hat, so sind wir entschlossen, zunächst über die verschiedenen Parthien einzeln zu schreiben, welche wir für dieses Werk bestimmten, indem wir das Versprechen geben, später auf unser erstes Vornehmen zurückzukommen, und dabei wünschen, dass eine gewandtere und fähigere Feder uns in der Ausführung eines Unternehmens zuvorkommen möchte, von dem wir glauben, dass es der Geometrie nützlich sein würde.

§. 2. Wir nehmen uns in diesem Memoire vor, die Methoden zu behandeln, welche in unsrer zweiten und dritten Abtheilung enthalten sind, und die beiden Hauptprincipien auseinanderzusetzen, von denen wir gesagt haben, dass sich alle diese Methoden darauf zurückführen lassen, und welche die beiden allgemeinen Lehren der *Deformation* und der *Transformation* ausmachen.

§. 3. Wir werden diese beiden *Principien* auf eine doppelte Art beweisen, welche absolute und abstracte Wahrheiten frei und unabhängig von allen besondern Methoden macht, die zur Rechtfertigung und Erleichterung der Anwendung in besondern Fällen geeignet sind.

Wir werden sie, wie wir gesagt haben, in grösserer Allgemeinheit, als irgend eine dieser Methoden darstellen. Die Ausdehnung, welche wir ihnen geben, wird ihren besondern Nutzen in einem sehr einfachen Princip der Relationen der Grösse finden, welches sie auf unzählige neue Fragen anwendbar macht.

Dieses Princip beruht auf einer einzigen Relation, auf welche man alle andern zurückführt. Diese Relation ist die, welche wir das *anharmonische Verhältniss* von vier Punkten oder von einem Bündel von vier Geraden genannt haben. Dieses ist der einzige Typus aller Relationen, welche durch die beiden Principien, die wir beweisen werden, *transformabel* sind. Und das Gesetz des Entsprechens einer Figur und ihrer transformirten besteht in der Gleichheit der entsprechenden anharmonischen Verhältnisse.

Die Einfachheit dieses Gesetzes und die des anharmonischen Verhältnisses machen diese Form der Relation ausserordentlich geeignet, um eine so wichtige Rolle in der Wissenschaft der Ausdehnung zu spielen.

Wenn die vorgegebenen Relationen zuerst nicht in diese Formel einzugehen scheinen, so wird die Kunst des Geometers darin bestehen, sie darauf durch verschiedene vorbereitende Operationen zurückzuführen, welche in gewisser Hinsicht den Aenderungen der Variabeln und den Transformationen in der Analysis entsprechen.

§. 4. Wir werden mit dem Princip der *Transformation* anfangen, von welchem die Theorie der reciproken Polären Anwendungen darbietet, weil das zweite, obwohl eben so allgemein in seiner Bestimmung, eine natürliche Folgerung daraus sein wird. Wir nennen es, nach dem Ausdruck Gergonne's, das Princip der *Dualität*, und wir sagen von zwei Figuren, welche unter einander die Abhängigkeiten haben, die von den Gesetzen dieses Princips vorgeschrieben werden, dass sie *correlative* Figuren seien.[2])

---

2) Da das Wort *correlativ* ganz allgemein bei vielen andern Gelegenheiten gebraucht wird, so wäre es wünschenswerth, ein andres Adjectiv zu haben, welches von dem Wort *Dualität* abgeleitet wäre. Deshalb dachten wir das Wort *Diphanie* für Dualität zu substituiren, welches diese doppelte Art der Eigenschaften bezeichnen könnte, welche alle Figuren der Ausdehnung darbieten: wir würden dann von dem *Princip der Diphanie* sprechen und diejenigen Figuren *diphanische* nennen, welche unter einander die, von diesem Princip vorgeschriebenen Beziehungen hätten. Wir wollten uns aber nicht erlauben, für eine schon allgemein angenommene Benennung eine neue zu substituiren.

Nachdem wir dieses Princip bewiesen haben, zeigen wir mehre Anwendungen davon, welche uns zu neuen Sätzen führen, von denen mehre ganz neue allgemeine Eigenschaften der ebenen Curven, der Curven doppelter Krümmung und der geometrischen Oberflächen sind. Darauf geben wir die analytische und die geometrische Construction der *correlativen Figuren*, und endlich setzen wir die Beziehungen auseinander, welche zwischen diesem Princip und der Theorie der reciproken Polären stattfinden, und leiten daraus mehre andre besondre Methoden ab, welche, so wie diese Theorie, leichte Mittel darbieten würde, um dieses Princip in Anwendung zu bringen, wenn es nicht direct und *à priori* als eine mit der begrenzten Räumlichkeit innig verbundene Eigenschaft bewiesen wäre.

§. 5. Unter den Anwendungen des Princips der Dualität giebt es eine, welche es verdient, dass wir sie schon hier besonders anführen.

Wenn man den Zustand der Geometrie betrachtet, bevor man die Theorie der Polären zur Transformation gewisser Theoreme angewandt hatte, so findet man, dass nur sehr wenige Wahrheiten bekannt waren, welche als die correlativen andrer bekannten Wahrheiten betrachtet werden konnten. In der Theorie der Curven z. B. hatte keine der allgemeinen Eigenschaften ihre correlative. Dieser Umstand zeigt, dass die analytische Methode des Descartes, welcher man die schönsten Entdeckungen, besonders in der Geometrie der Curven verdankt, nicht dazu geeignet ist, oder wenigstens sehr bedeutende Hindernisse darbieten würde, wenn man versuchen wollte, sie auf diese Art von Theoremen anzuwenden, welche man mit Hülfe des Princips der Dualität als die correlative von den Theoremen erhält, die durch die Methode des Descartes bewiesen sind. In dieser Hinsicht gewährt also das Princip der Dualität der reinen Geometrie einen unläugbaren Vortheil vor der analytischen Methode.

Hieraus wird man aber nicht schliessen, dass die Algebra, dieses wunderbare Werkzeug, welches bis auf den heutigen Tag bei allen geometrischen Auffassungen gebraucht ist, ihren Beistand den neuen Eigenschaften der Ausdehnung verweigern müsse, welche sich dem Verfahren des Descartes zu entziehen scheinen. Man wird vielmehr überlegen, dass es hinreiche, beim Gebrauch die grossen Gedanken Descartes's zu modificiren, indem man in der Anwendung der algebraischen Symbole auf die Vor-

stellungen der Figur und der Ausdehnung ein ihr angemessenes Object erkennt.

Das von Descartes angewandte Mittel bestand darin, eine Curve als die Vereinigung von Punkten zu betrachten, welche nach einem gegebenen Gesetz auf einander folgen und die Lage aller dieser Punkte durch eine constante Relation zwischen den Distanzen jedes dieser Punkte von zwei festen Axen auszudrücken.

Man sieht ohne Mühe, dass das analoge Verfahren in der *neuen analytischen Geometrie* das sein wird, jede Curve als die Enveloppe aller ihrer Tangenten zu betrachten und die Lage aller dieser Geraden durch eine einzige Gleichung zwischen zwei Variabeln auszudrücken, bei welchen jedes System von Werthen einer dieser Geraden entsprechen wird.

Das Princip der Dualität selbst, angewandt auf geometrische Verfahrungsarten und Relationen, welche die Gleichung einer Curve oder einer Oberfläche nach dem System des Descartes darbietet, führt unmittelbar zu diesem *neuen System der analytischen Geometrie.* Dieses wollen wir kurz in dieser Schrift als eine einfache Anwendung des Princips der Dualität auseinandersetzen, indem wir uns vorbehalten, auf diesen Gegenstand zurückzukommen, welchen wir direct und ohne Hülfe des Princips der Dualität behandelt haben, indem wir beinahe denselben Weg verfolgten, welcher für die Exposition der gebräuchlichen analytischen Geometrie angenommen ist.

Wir haben schon mit wenigen Worten gesagt, worin unser neues *Coordinaten-System* besteht, und davon Anwendungen gemacht (s. *Correspondance mathématique* von Quetelet, t. VI, p. 81). Wenn wir uns aber nicht beeilt haben, diese Arbeit zu veröffentlichen, welche, wenn das Princip der Dualität nicht bekannt wäre, von bedeutendem Nutzen sein würde, weil sie zum directen Beweise aller Theoreme dient, welche die correlativen von denen sind, die man durch die Geometrie des Descartes erhält, so lag das darin, dass sie nicht unumgänglich nothwendig war, da gegenwärtig das Princip der Dualität zur augenblicklichen Transformation dieser Wahrheiten dienlich ist.

Nichts desto weniger scheint uns dieses *neue System der analytischen Geometrie* die Entwickelung zu verdienen, indem es mit der Coordinaten-Lehre von Descartes zusammen das Werk vervollständigt, welches sich dieser grosse Philosoph in seiner erhabenen Auffassung der Anwendung der Algebra auf die Geometrie vorgesetzt hatte.

§. 6. Das, was wir eben von der analytischen Geometrie in Bezug auf die Eigenschaften der Ausdehnung, welche durch das Princip der Dualität entdeckt sind, gesagt haben, gilt zum Theil auch von der Theorie der Transversalen, wie sie Carnot gebildet hat und wie sie seit dreissig Jahren angewandt ist. Diese Theorie passt, in ihrem gegenwärtigen Zusande, nicht zum Beweise vieler auf Linien und krumme Oberflächen bezüglichen Theoreme, welche die correlativen von andern Theoremen sind, die man durch dieselbe Theorie bewiesen hat. Inzwischen lässt sie sich auf diejenigen dieser Theoreme anwenden, welche sich nur auf die Systeme gerader Linien beziehen, weil Carnot in diese Theorie das Theorem von Johann Bernoulli (oder vielmehr von Johann Ceva, wie wir in der Note VI gesagt haben) mit einbegriffen hat, welches sich als das correlative von dem des Ptolemäus findet.

Es wird eben so hinreichen, in die Theorie der Transversalen einige Theoreme einzuführen, welche sich auf krumme Linien und Oberflächen anwenden lassen, um sie fähig zu machen, durch sich selbst und direct den doppelten Fragen zu genügen, welche sich beständig bei den geometrischen Speculationen darbieten müssen. Diese Theoreme, welche genau die correlativen von den gegenwärtigen Principien der Theorie der Transversalen sind, sind schon längst von Poncelet in seinen Anwendungen der Theorie der reciproken Polären erhalten worden, und dieser gewandte Geometer hat davon Gebrauch gemacht in seinem Memoire: *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives de lignes et surfaces géométriques* (s. *Journal* von Crelle, t. VIII).

Nutzen des Princips der Dualität in der Algebra.

§. 7. Nachdem nachgewiesen ist, dass das Princip der Dualität sich durch die Einführung eines neuen Coordinatensystems auf die analytische Geometrie anwenden lasse, müssen wir noch hinzufügen, dass der Einfluss und die Wichtigkeit dieses Princips sich selbst auf die Algebra, in ihrer absoluten Abstraction betrachtet, ausdehnen lasse. Man darf sich darüber nicht wundern; denn Monge hat uns durch hinlänglich schöne Beispiele gezeigt, dass den Gesetzen der Ausdehnung und allen allgemeinen Auffassungen der Geometrie Betrachtungen und Resultate der reinen Algebra entsprechen können.

Unter zwei Gesichtspunkten können wir den Nutzen des Princips der Dualität in der Algebra betrachten. Zuerst als ein Mittel der Integration in mehren Fällen, und dann, indem es vermittelst des algebraischen Ausdrucks

gewisser Resultate der Geometrie, manche Theoreme der Algebra liefern kann.

Wir wollen mit wenigen Worten diese doppelte Anwendung des Princips der Dualität auf die algebraische Analysis auseinandersetzen.

§. 8. Einer gegebenen Oberfläche entspricht, nach dem Princip der Dualität, die correlative Oberfläche, und jeder Eigenschaft der ersten Oberfläche entspricht eine Eigenschaft der zweiten.

Wenn die erste Oberfläche durch eine Gleichung (nach irgend einem Coordinatensystem) ausgedrückt ist, so werden die geometrischen Relationen, welche zwischen ihr und der zweiten Oberfläche stattfinden, dazu dienen, von dieser Gleichung zu *der* der zweiten Gleichung in demselben Coordinatensystem überzugehen, und umgekehrt von dieser Gleichung der zweiten Curve zu *der* der ersten. (Wir führen die hierzu dienlichen Formeln in dem Coordinatensystem von Descartes an.) Wenn die erste Oberfläche nur durch eine Gleichung zwischen partiellen Differentialen gegeben ist, so wird dieser Gleichung eine andre entsprechen, welche ihre correlative sein wird und der zweiten Oberfläche angehört. Diese andre Gleichung wird im Allgemeinen von der vorgegebenen verschieden sein und wird sich mehr oder weniger leicht als diese den Integrationsmethoden fügen. Wenn man sie integriren kann, so hat man die Gleichung der zweiten Oberfläche, und man wird vermittelst der in Rede stehenden Formeln von dieser Gleichung zu der der ersten Oberfläche kommen: dieses wird dann also das Integral der vorgegebenen Gleichung mit partiellen Differentialen sein.

Diese Methode ist, wie man sieht, dieselbe, welche wir in der Note XXX über die *reciproken* Oberflächen von Monge entwickeln, indem sie der Gegenstand dieser Theorie der reciproken Oberflächen gewesen sein kann.

Diese Methode ist, analytisch betrachtet und abgesehen von jeder geometrischen Betrachtung, im Grunde nichts andres, als eine Art algebraischer Transformation, wobei die Relationen zwischen den correspondirenden Variabeln uns *a priori* durch den analytischen Ausdruck *der* Relationen angegeben sind, welche zwischen den correlativen, nach dem Princip der Dualität construirten Figuren, stattfinden.

§. 9. Die zweite Art, auf welche man das Princip der Dualität auf die Entdeckung verschiedener Theoreme der Algebra anwenden kann, ist folgende:

Wenn man vermöge dieses Princips ein geometrisches Theorem gefunden hat und man beim Versuche, dieses Theorem analytisch d. h. nach der Coordinaten-Methode zu beweisen, auf eine unüberwindliche Schwierigkeit stösst, welche aus der gegenwärtigen Unvollkommenheit der Algebra entspringt, so wird man versuchen, den Punkt der Schwierigkeit genau zu bestimmen, oder, mit andern Worten, den algebraischen Begriff anzugeben, welcher zugelassen werden muss, um zu dem verlangten Schluss zu gelangen. Dieser algebraische Begriff wird ein Theorem der Algebra sein, welches sich auf diese Weise durch geometrische Betrachtungen bewiesen findet.

Ein Beispiel wird diese Verfahrungsart hinlänglich deutlich machen.

Gesetzt, man wollte durch die gebräuchliche Coordinaten-Methode folgendes Theorem beweisen: *Wenn man an eine gegebene geometrische Oberfläche alle ihre Tangenten-Ebenen legt, welche mit einer Transversal-Ebene parallel sind, so werden die Punkte, in denen sie die Oberfläche berühren, zu ihrem Mittelpunkt der mittlern Entfernungen immer denselben Punkt im Raum haben, welches auch die Lage der Transversal-Ebene sein mag.*

Wenn man durch $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche darstellt, so werden die Coordinaten der Berührungspunkte der tangirenden Ebenen durch diese Gleichung und durch die beiden folgenden gegeben:

$$\frac{dF}{dx} + a \cdot \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + b \cdot \frac{dF}{dz} = 0;$$

worin a und b die beiden Winkelfunctionen sind, welche die gemeinsame Richtung der Tangenten-Ebenen bestimmen. Wenn man aus diesen drei Gleichungen y und z eliminirt, so erhält man eine Gleichung in Bezug auf x, deren Wurzeln die Abscissen der Berührungspunkte sein werden. Es muss also, nach dem ausgesprochenen Theorem, die Summe dieser Wurzeln dieselbe sein, welches auch die gemeinsame Richtung der Tangenten-Ebenen

sein mag, d. h. welches auch die beiden Parameter a und b sein mögen. Hieraus folgt also folgendes Theorem der Algebra:

Wenn man zwischen den drei Gleichungen:

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} + a\frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + b\frac{dF}{dz} = 0,$$

die beiden Variabeln y *und* z *eliminirt, so wird in der resultirenden Gleichung für* x *die Summe der Wurzeln unabhängig von den beiden Coefficienten* a *und* b *sein.*

Dieses Beispiel gnügt, um zu zeigen, wie man das Princip der Dualität zur Aufstellung algebraischer Theoreme anwenden könne.

Anwendung des Princips der Dualität auf die Dynamik.

§. 10. Die Idee der Dualität, welche wir in den vorigen Paragraphen auf zwei geometrische Lehren, die Coordinaten-Methode des Descartes und die Theorie der Transversalen und auf eine algebraische Theorie, die Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen angewandt haben, erstreckt sich auch auf andre Theile der Mathematik, besonders auf die Dynamik. Hier ist aber nicht der Ort, diesen Gegenstand zu behandeln, wir verweisen deshalb auf Note XXXIV.

Princip der Homographie.

§. 11. Der zweite Theil dieser Schrift wird dem zweiten allgemeinen Princip, dem der *Deformation* der Figuren, gewidmet sein.

Da die Figuren, welche man in den Anwendungen dieses Princips anzuwenden hat, von einerlei Art sind, d. h. dass jedem Punkte, jeder Geraden, jeder Ebene der *einen*, respective ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene in der andern entsprechen, so wie dieses z. B. bei zwei ähnlichen Figuren der Fall ist, oder auch bei zwei ebenen Figuren, von denen die eine die Perspective der andern ist, so wollen wir diese Figuren *homographische* nennen, und das darauf bezügliche Princip soll das *Princip der homographischen Deformation* oder einfach das *Princip der Homographie* heissen.

§. 12. Es wird vielleicht nicht unnütz erscheinen, bevor wir auf die Materie selbst eingehen, den philosophi-

schen Charakter dieses Princips und die Natur seiner Anwendungen in der rationellen Geometrie genau zu bestimmen.

Seine erste Bistimmung ist, die Eigenschaften der Ausdehnung zu *verallgemeinern.* *Gebrauch des Princips der Homographie.*

Hieraus entspringt eine doppelte Anwendung, deren es fähig ist. Denn diese Verallgemeinerung kann auf zweifache Art geschehen, sie kann auf der Construction und der Form der Figur beruhen, oder auch auf den Eigenschaften dieser Figur.

Im ersten Fall stellt man sich die Aufgabe: *Wenn man die Eigenschaften einer gewissen Figur kennt, auf die analogen Eigenschaften einer Figur von derselben Art, aber von allgemeinerer Construction daraus zu schliessen.*

Wenn z. B. gewisse Eigenschaften des Kreises oder der Kugel gegeben sind, so schliesst man von ihnen auf die entsprechenden Eigenschaften der Kegelschnitte oder der Oberflächen zweiten Grades.

Im zweiten Fall kann man die Aufgabe so aussprechen: *Wenn man einige besondre Fälle einer gewissen noch unbekannten allgemeinen Eigenschaft einer Figur kennt, daraus auf diese allgemeine Eigenschaft zu schliessen.*

Wählt man z. B. drei conjugirte Durchmesser einer Oberfläche zweiten Grades, so weiss man, dass die Summe ihrer Quadrate einer constanten Grösse gleich ist. Dieses Theorem giebt zu folgender Frage Veranlassung: Wenn eine Oberfläche zweiten Grades gegeben ist und man wählt irgend einen Punkt im Raume, durch den man drei Gerade zieht: welchen Bedingungen der Construction müssen diese Geraden genügen, damit sie in dem besondern Falle, wenn dieser Punkt im Mittelpunkt der Oberfläche liegt, drei conjugirte Durchmesser werden? und welches wird diejenige Eigenschaft dieser drei Geraden sein, welche in die genannte Eigenschaft der drei conjugirten Durchmesser übergeht?

Dieses sind also die beiden Aufgaben, für welche das Princip der *homographischen Deformation* bestimmt ist.

§. 13. Die erste dieser Aufgaben führt zu einer wirklichen Methode der Untersuchungen.

In der That, wenn es sich darum handelt, eine solche Eigenschaft einer Figur zu beweisen, so wird man unter

der unendlichen Anzahl der möglichen *homographischen* Figuren die wählen, bei welcher wegen ihrer Einfachheit oder wegen andrer Umstände das Theorem, wenn auch nicht evident, so doch wenigstens leichter zu beweisen ist. Auf diesem Wege hat man oft, durch die Anwendung der Perspective, die Untersuchung über die Eigenschaften der Kegelschnitte auf die des Kreises zurückgeführt.

§. 14. Unter dem Gesichtspunkt der zweiten Aufgabe kann des Princip der *homographischen Deformation* als zur Klasse der inversen Methoden gehörig, betrachtet werden. Die ihr eigenthümliche Operation ist die entgegengesetzte von der, welche wir täglich dazu anwenden, um aus einem allgemeinen Theorem die daran sich anknüpfenden besondern Fälle abzuleiten. Als eine solche Methode betrachtet, verdient dieses Theorem vielleicht einige Beachtung. Denn so leicht es auch immer in der Geometrie sein mag, von einer Wahrheit zu ihren Corollarien überzugehen; so hat man doch noch nicht umgekehrt Regeln, um von einer dieser besondern Wahrheiten zu der allgemeinen Wahrheit zu gelangen. Die Induction, die Analogie oder einige besondre Betrachtungen können zwar in gewissen Fällen auf die Spur dieser primitiven Wahrheit führen und sie ahnen lassen, aber hernach wird ihr Beweis eine ganz neue Aufgabe, wofür man keine specielle Methode hat. Das *Princip der Homographie* und die verschiedenen daraus folgenden Arten der Deformation liefern eine Methode dieser Art, eine wahrhafte Methode der *Verallgemeinerung*, die einzige, wie ich glaube, welche man in die rationelle Geometrie einzuführen versucht hat. [3]) Man wird gewiss den Ein-

---

3) Ich wage es, in Folge dieser Betrachtung, einen Vergleichungspunkt zwischen dieser Methode und der Integralrechnung anzudeuten. Der Zweck ist bei beiden derselbe: es handelt sich darum, von der *Derivation* eines Objects zu diesem Object überzugehen.

Wenn irgend eine Grösse gegeben ist, so weiss man immer und zwar augenblicklich ihr Differential anzugeben; für die entgegengesetzte Frage aber, für irgend eine Quantität oder eine Differential-Gleichung das Integral zu finden, dafür hat man nicht allgemeine Methoden. Eben so kann man, wenn ein allgemeiner Satz gegeben ist, sogleich die besondern Fälle angeben; für die entgegengesetzte Frage dagegen, wobei man, wenn ein besondrer Fall eines noch unbekannten allgemeinen Satzes gegeben ist, diesen allgemeinen Satz zu bestimmen verlangt, hat man eben so wenig eine allgemeine Methode.

fluss solcher Methoden auf das schnellere Fortschreiten der Wissenschaft anerkennen. Denn es giebt keine, ein wenig wichtige Entdeckung, von der man nicht schon vor längerer Zeit einige Keime und einige besondre Fälle gekannt hätte, welche mit Hülfe dieser Verallgemeinerungsmethoden zu dieser Entdeckung hätten führen können. Es ist also von Wichtigkeit, diese Methoden aufzusuchen und auszubilden.

§. 15. Wir werden verschiedene Anwendungen von der homographischen Deformation machen; die eine davon wird sich auf das Coordinatensystem beziehen, welches die Geometrie des Descartes ausmacht, und wird zu einem neuen System einer allgemeinern analytischen Geometrie führen, welche geeignet sein dürfte, direct analytisch die Sätze zu beweisen, für welche sich dieses Princip geeignet hätte, um sie als eine Verallgemeinerung von denen zu beweisen, auf welche sich die Lehre des Descartes anwendet.

Methoden, welche aus dem Princip der Homographie abgeleitet sind.

§. 16. Das allgemeine Princip der homographischen Deformation umfasst mehre besondre Methoden, welche bei speciellen und eingeschränkteren Untersuchungen brauchbar sind. Wir unterscheiden unter ihnen drei:

Die erste ist die Theorie der homologischen Figuren von Poncelet, welche z. B. dazu dienen wird, aus den Eigenschaften der Kugel eine Menge von Eigenschaften der Umdrehungsoberflächen zweiten Grades, welche einen Brennpunkt haben, abzuleiten. Wir werden aber damit noch das Princip der metrischen Relationen verbinden, ohne welches diese elegante Theorie eine Menge von Untersuchungen nicht erreichen könnte und unvollständig wäre.[4])

Diese Zusammenstellung wird vielleicht weniger fremd erscheinen, wenn wir sagen, dass der eigentliche Charakter des Princips der Homographie, wodurch es sich von den andern Transformationsarten der Figuren mehr entfernt hält, wie bei der Integralrechnung das Uebergehen vom *Unendlichen* zum *Endlichen* ist. Es sind die Eigenschaften einer Figur, die Partieen in der Unendlichkeit hat, welche man am häufigsten bei der Anwendung des Princips der Homographie auf eine Figur derselben Art übertragen will, bei der aber dieselben Partieen in endlicher Entfernung liegen.

4) Dieses Princip der Relationen der Grösse ist z. B. für das Erkennen der metrischen Eigenschaften eines Systems irgend zweier Kegelschnitte unumgänglich nothwendig, wofür Poncelet beschreibende

Die zweite ist eine Methode, welche sich zur Erweiterung der Winkel-Relationen eignet, die besonders zur Anwendung der Eigenschaften der Kugel auf die Drehungsoberflächen des zweiten Grades, welche keinen Brennpunkt haben, geeignet ist. Noch keine Transformationsart passte für diese Gattung der Untersuchung.

Und die dritte ist für eine sehr zahlreiche Klasse von Eigenschaften bestimmt, welche der Geometrie des Maasses angehören, d. h. der Länge, der Oberfläche und dem Volumen der Figuren: es wird die Uebersetzung in die reine Geometrie von der analytischen Methode sein, welche wir schon zur Uebertragung der Eigenschaften der Kugel auf die Oberflächen des zweiten Grades angewandt haben. Diese Methode wird uns besonders dazu dienen, die schon bekannten schönen Eigenschaften und noch viele andre der conjugirten Durchmesser der Oberflächen zweiten Grades durch reine Anschauung zu beweisen, welche man bisher nur mit Hülfe der Analysis bewiesen hat.

§. 17. Ueberhaupt werden uns unsre Anwendungen des Princips der Homographie auf die Oberflächen des zweiten Grades auf ganz natürlichem Wege zu vielen Eigenschaften dieser Oberflächen führen, welche das bis heute angewandte analytische Verfahren nicht hat angeben können; und diese Anwendungen werden vielleicht die Möglichkeit nachweisen, auf rein geometrische Betrachtungen und ohne Hülfe des Calculs eine sehr ausgedehnte Theorie der Oberflächen zweiten Grades zu gründen, wie wir es schon weiter oben angedeutet haben. Die Analysis hat unter so vielen andern Umständen so herrliche und so ungeheure Vorzüge vor der Geometrie, dass man uns den Zusatz erlauben wird, dass sie in dieser Theorie der Oberflächen zweiten Grades der geometrischen Methode nachsteht. Letztere ist hierbei viel schneller und fruchtbarer, als der Weg des Calculs; sie ist auch klarer, weil sie, nur vermöge der Natur der Sache selbst und ohne Hülfs-Betrachtungen, besser den Zusammenhang zeigt, bis zu ihrem Ursprung durchdringt und aus irgend einer anfänglichen Relation zwischen den Figuren auf unendlich viele Deductionen schliessen kann, welche

---

Eigenschaften gegeben hat. Eben so verhält es sich mit der Theorie der Basreliefs, deren metrische Eigenschaften nicht weniger wichtig sind, als ihre rein beschreibenden Eigenschaften.

eben so viele verschiedene Sätze bilden, deren Beziehungen nicht immer in den analytischen Formeln und Transformationen sichtbar werden, und welche verschiedene, oft lange und schwierige Beweise erfordern. [5])

§. 18. Unabhängig von der Anwendung dieses Princips der Homographie, als ein Beweis- und Verallgemeinerungs-Mittel der Eigenschaften der Ausdehnung, hat dieses Princip an und für sich noch einen dritten Nutzen, welcher in dem Begriffe selbst der *Homographie* der Figuren besteht. In der That liefern die Betrachtung zweier homographischen Figuren und die Kenntniss der Beziehungen, welche die eine mit der andern verbinden, neue geometrische Wahrheiten, an welche sich als Corollarien eine Menge bekannter Theoreme anknüpfen lassen und welche zu vielen andern neuen Resultaten führen können, die man ohne Hülfe dieser Lehre von den homographischen Figuren nur mit Mühe erhalten würde.

Wir führen z. B. an, dass die verschiedenen Arten der Kegelschnitte zu beschreiben, welche von Newton, Maclaurin, De Witt u. A. angegeben sind, und eine grosse Anzahl von Eigenschaften dieser Curven, welche keine Beziehung unter einander zu haben scheinen, unmittelbare Folgerungen aus der Theorie der homographischen Figuren sind. (S. die Noten XV und XVI.)

Die Eigenschaften, welche das System zweier vollkommen gleichen Körper oder zweier ähnlichen Körper, die irgendwie im Raume liegen, darbietet, sind auch Folgerungen aus derselben Theorie. Und diese Eigenschaften, welche man noch nicht aufgesucht hat, sind zahlreich und führen zu verschiedenen vortrefflichen Theoremen über die unendlich kleine Bewegung und selbst über irgend eine endliche Ortsveränderung eines festen Körpers. [6])

---

5) Wir glauben schon in unserm *Memoire über die Eigenschaften der Kegel des zweiten Grades* ein Beispiel von den Vortheilen gegeben zu haben, welche in der Theorie der Oberflächen des zweiten Grades die geometrische Methode oft vor der Analysis haben kann. Denn ausser dass die analytische Methode nicht auf die Spur der verschiedenen Theoreme geführt hat, zu welchen wir durch geometrische Betrachtungen gelangt sind, so würde sie dieselben auch auf weitläuftigere Art beweisen, als wir es gethan haben. Hiervon sind wir überzeugt worden, indem wir unsere ersten Beweise in die Analysis übertrugen.

6) Wir wollen z. B. das Theorem anführen, welches in die Principien der praktischen Mechanik eingehen kann: *Man kann im-*

In diesem Memoire werden wir die homographischen Figuren nur als ein Mittel der Deformation betrachten, welches zum Beweis und zur Verallgemeinerung von Theoremen dienlich ist; indem wir uns vornehmen, in einer andern besondern Schrift die erwähnten allgemeinen Eigenschaften auseinander zu setzen.

Schluss.

§. 19. Nach den hier aufgestellten Betrachtungen über die Natur und die Bestimmung der beiden Principien der Dualität und der Homographie, wird man vielleicht glauben, dass, wenn es in der Wissenschaft der Ausdehnung einige grosse und fruchtbare Grundgesetze giebt, so wie in der Analysis die Infinitesimalrechnung, welche alle Methoden der Quadratur und der Maxima in sich aufnimmt und vervollkommnet, so wie in der Mechanik das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, aus dem Lagrange alle andern abgeleitet hat, so wie für die Erscheinungen am Himmel das grosse Gesetz des Newton 7), so wird man vielleicht glauben, sag' ich, dass die beiden einfachen Theoreme der Geometrie, aus denen sich die beiden Principien der Dualität und der Homographie ableiten, diejenigen sind, welche sich, bei dem gegenwärtigen Zustand der Geometrie, am meisten solchen grossen allgemeinen Gesetzen nähern, die uns bis jetzt noch unbekannt sind.

---

mer einen festen Körper aus einer ersten Lage in eine bestimmte zweite bringen, durch die continuirliche Bewegung einer Schraube, an welche man diesen Körper befestigt hat. (S. das *Bulletin universel des sciences*, Novb. 1830; oder die *Correspondance mathématique de Bruxelles*, t. VII, p. 352.)

7) Dieses ist ohne Zweifel die Meinung derjenigen, welche sich daran gewöhnt haben, die Eigenschaften der Ausdehnung, ihre Natur, ihre Verkettung unter einander und besonders diese wunderbare *Continuität* zu betrachten, die ihnen einen so hohen Grad und einen Charakter von unbegrenzter Ausgedehntheit giebt, welchen die andern positiven Wissenschaften, wie z. B. die der Zahlen, nicht

Diese beiden Theoreme umfassen in der That, in ihren directen Folgen, nicht nur eine Menge von besondern Wahrheiten, sondern auch fruchtbare und wichtige Theorien und Methoden.

Ohne in ein Detail über die Anwendungen dieser beiden Theoreme und über die neuen Wege, welche sie der geometrischen Speculation eröffnen, einzugehen, mag es hinreichend sein zu sagen, dass das erste alle Eigenschaften der Ausdehnung in zwei grosse Klassen theilt; dergestalt, dass es keine Eigenschaft giebt, so allgemein sie auch sein mag, welche dasselbe nicht in eine andre, eben so allgemeine derselben Art umwandeln lehrte.

Das zweite Theorem verallgemeinert alle besondern und isolirt stehenden Wahrheiten, zeigt ihre gemeinsamen Beziehungen und verbindet sie unter einander, indem es sie an eine einzige allgemeine Wahrheit anknüpft. Dieses Theorem umfasst, eben so wie das erste, Methoden in ihren unzähligen Corollarien.

§. 20. Die Principien der Dualität und der Homographie und die verschiedenen daraus abgeleiteten Methoden; die andern Transformationsarten, welche wir in der *Géométrie descriptive* von Monge und in der *Géométrie perspective* von Cousinery erkannt haben, und die, welche die Theorie der stereographischen Projectionen darbietet, bilden mit der Theorie der Transversalen gegenwärtig die mächtigsten Lehren der neuen Geometrie und geben ihr den Charakter der Leichtigkeit und Allgemeinheit, wodurch sie sich von der alten Geometrie unterscheidet.

Diese Transformationsarten sind in der That eben so viele sichere Mittel oder so zu sagen Formen (*moules*),

---

an sich haben. Diese Meinung über die Geometrie ist die eines Gelehrten, welchem seine Arbeiten in den verschiedenen Theilen der Mathematik und seine hohe Stellung, die er, obgleich noch jung, in den ersten Academien von Europa einnimmt, eine bedeutende Autorität verschaffen. „Es ist unangenehm, schreibt Quetelet an mich, dass der grösste Theil unsrer jetzigen Mathematiker mit solcher Geringschätzung von der reinen Geometrie urtheilt.... Es hat mir geschienen, dass das, was sie am meisten davon zurückhält, der Mangel an Allgemeinheit der Methoden ist, welchen sie darin zu sehen glauben. Aber ist dies die Schuld der Geometrie, oder derer, welche dieselbe cultiviren? Ich wäre sehr geneigt zu glauben, dass es einige grosse Wahrheiten giebt, welche, so zu sagen, die Quelle aller andern sind, so wie es etwa das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für die Mechanik ist."

welche dazu dienen, nach Willkühr geometrische Wahrheiten ohne Zahl zu erschaffen.

Man nehme irgend eine Figur im Raume und eine ihrer bekannten Eigenschaften, wende auf diese Figur eine dieser Transformationsarten an und verfolge die verschiedenen Modificationen oder Transformationen, welche das Theorem, wodurch diese Eigenschaft ausgedrückt wird, erfährt, so wird man eine neue Figur und eine Eigenschaft dieser Figur haben, welche der der ersten Figur entspricht.

Diese Mittel der neuen Geometrie, die geometrischen Wahrheiten bis ins Unendliche zu vervielfachen, können den allgemeinen Formeln und Transformationen der Algebra verglichen werden, welche mit Sicherheit und Schnelligkeit die Antwort auf die verschiedenen Fragen geben, welche man ihnen unterlegt, oder auch den Reagentien des Chemikers, welche auf bestimmte und unveränderliche Art die Umwandlung der Materien hervorbringen, auf die man sie wirken lässt; diese Mittel sind also wirkliche Instrumente, welche die alte Geometrie nicht besass und welche den unterscheidenden Charakter der modernen Geometrie ausmachen.

In der alten Geometrie standen die Wahrheiten isolirt, neue waren schwierig zu erdenken oder zu erschaffen und nicht konnte jeder Geometer, der es wollte, Erfinder werden. Gegenwärtig kann Jeder irgend eine Wahrheit aufnehmen und sie den verschiedenen allgemeinen Principien der Transformation unterwerfen, er wird daraus verschiedene oder allgemeinere Wahrheiten ableiten, welche wieder ähnlichen Operationen unterworfen werden können, so dass man beinahe bis ins Unendliche die Zahl der neuen Wahrheiten, welche aus der ersten abgeleitet werden, vervielfältigen kann. Alle werden freilich nicht verdienen angeführt zu werden; aber eine gewisse Anzahl von ihnen wird von Interesse sein und selbst zu irgend etwas Allgemeinem führen.

Da also bei dem gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft Jeder, der es will, in der Geometrie verallgemeinern und erschaffen kann, so ist das Genie nicht mehr unumgänglich erforderlich, um einen neuen Stein zu dem Gebäude hinzuzufügen.

Auch glauben wir die Geometrie betrachten zu können, als befände sie sich in dem Zustande des schnellsten Fortschreitens und Vervollkommnens; und wir denken gegenwärtig mit Recht von dieser Wissenschaft das

sagen zu können, was in einer Zeit den ausschliesslichen Charakter der analytischen Geometrie ausmachte: „Der Geist der modernen Geometrie besteht in der Erhebung der alten oder neuen Wahrheiten zur grösstmöglichen Allgemeinheit." [8])

8) Fontenelle, *Histoire de l'Académie des sciences*, 1704; *sur les spirales à l'infini.*

Noten.

Note I.

(Erste Epoche, §. 5.)

Ueber die Schneckenlinien des Perseus. Stelle aus Hero von Alexandrien, die sich auf diese Curven bezieht.

Proclus ist der einzige Schriftsteller, der uns den Namen des Geometers Perseus überliefert hat, in seinem Commentar zum ersten Buch des Euclid. Dieses Werk ist aber nicht das einzige aus dem Alterthum, welches die *Schneckenlinien* (*spiriques*) erwähnt, wie man es bisher geglaubt zu haben scheint. Ein sehr altes Werk von Hero von Alexandrien unter dem Titel: *Nomenclatura vocabulorum geometricorum*, 1571 und 1579 von Conrad Dasypodius [1]) reproducirt, enthält eine sehr genaue Definition von *spire* oder der ringförmigen Oberfläche und der beiden verschiedenen Formen, welche diese Oberfläche annimmt, *deren Schnitte Curven sind, welche ihre besondern Eigenschaften haben.*

Die Stelle aus Hero ist folgende: *Speira fit quando circulus aliquis centrum habens in circulo et erectus existens, ad planum ipsius circuli fuerit circumductus, et revertatur iterum unde coeperat moveri*; *illud ipsum*

---

1) *Euclidis Elementorum liber primus.* Item *Heronis Alexandrini vocabula quaedam Geometrica, antea nunquam edita*; graece et latine, per Conradum Dasypodium. Argentinae 1571, in 8.

Oratio C. Dasypodii *de Disciplinis mathematicis.* Ejusdem *Heronis Alexandrini Nomenclaturae Vocabulorum geometricorum translatio*; ejusdem *Lexicon mathematicum*, *ex diversis collectum antiquis scriptis.* Argent. 1579, in 8.

figurae genus nominatur κρικος orbis. Discontinua autem speira est, quae dissoluta est, aut dissolutionem habet. Continua vero, quae uno in puncto concidit. Diminutionem habens est, quando circulus qui circumducitur, ipsemet seipsum secat. Fiunt autem et harum sectiones, lineae quaedam proprietatem suam habentes.

Die Stelle bei Proclus über die Schneckenlinien ist ein wenig ausführlicher und hat noch den Vorzug, den Erfinder dieser Curven zu nennen. Diese Stelle ist in seinem griechischen Text reproducirt und übersetzt von Quetelet, in einer äusserst interessanten und beachtungswürdigen Notiz über die *lignes spiriques.* Es findet sich diese Notiz gedruckt als Anhang zu einem Memoire von Pagani über diese Curven, welches von der Academie zu Brüssel 1824 gekrönt wurde, und in der *Correspondance mathématique* von Quetelet, t. II, p. 237.

Die *lignes spiriques* haben beinahe alle Schriftsteller, welche von ihnen gesprochen haben, zu einem Irrthum verleitet; die Einen haben diese Curven für die *Spiralen* genommen und die Andern haben ihren Erfinder Perseus in eine zu späte Zeit gesetzt.

Ramus setzt diesen Geometer, in seinen *Scholis mathematicis*, nach Hero und Geminus.

Dechales setzt ihn auch nach Geminus und spricht diesem letztern die *lignes spiriques* zu, während er den Perseus zum Erfinder der Spiralen macht. [2])

Blancanus macht eine eigenthümliche Verwirrung. Er lässt den Geminus vor dem Perseus geboren werden, spricht diesem letztern die *lignes spiriques* zu und sagt nichts desto weniger, dass Geminus über dieselben Curven geschrieben habe. [3])

G. J. Vossius stellt Perseus zwischen Thales und Pythagoras und spricht ihm die Spiralen zu. [4])

Bernardin Baldi macht ihn zum Zeitgenossen von Archimedes und Apollonius (250 v. Chr.) und definirt, nach Proclus, ganz genau die Schneckenlinien, deren Erfinder er ist. [5])

---

2) *Cursus mathematicus*, t. I, de progressu matheseos, p. 8.

3) *De natura mathematicarum scientiarum tractatio, atque clarorum mathematicorum chronologia.* Bononiae 1615, in 4.

4) *De universae matheseos natura et constitutione liber; cui subjungitur chronologia mathematicorum.* Amstelodami 1660, in 4.

5) *Cronica de' Matematici overo Epitome dell' istoria delle vite loro.* In Urbino, 1707, in 4. „*Perseo, non si sà bene di qual patria si fuisse. Fù egli, come s'ha da Proclo, inventore delle*

Heilbronner begeht denselben Fehler, als Vossius und Dechales, in Bezug auf den Namen der Curven von Perseus; aber er scheint uns diesem Geometer die ihm gebührende Epoche anzuweisen. [6]) Er stellt ihn zwischen Aristäus und Menächmus. Dasselbe Alter glauben wir ihm geben zu müssen.

Montucla macht ihn viel jünger. Er setzt ihn in die beiden ersten Jahrhunderte der christlichen Zeitrechnung. Dieses ist ein Fehler, der unläugbar zu sein scheint, nach einer Stelle im Proclus, der von dem Geminus sagt, dass er über die Schneckenlinien geschrieben habe, und nach der im Hero, die wir angeführt haben.

Montucla glaubte, dass man vor ihm die *lignes spiriques* mit den *spirales* des Archimedes confundirt habe und dass er der erste wäre, welcher gezeigt habe, was diese Curven eigentlich bedeuten. [7]) Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass Dechales, Vossius und Heilbronner in der That diesen Fehler begangen haben, dass aber Bernardin Baldi und Blancanus nicht daran Theil nahmen. Zwei andre Schriftsteller haben vollkommen die Natur der Schneckenlinien erkannt. Der erste ist Dysapodius, der in seinen *Definitiones et divisiones Geometriae* [8]) mehre Male von diesen Curven spricht. Der zweite ist der gelehrte Savilius, welcher in seinen *Praelectiones tredecim in principium elementorum Euclidis* (Oxonii 1621, in 4.) die von den Alten betrachteten Linien aufzählt und wörtlich die Stelle des Proclus anführt, welche die Erzeugung der Schneckenlinien kennen lehrt. (*Lect. quarta*, p. 73.)

---

linee spiriche, le quali nascono dalle varie settioni della spira." (p. 25.)

6) *Historia matheseos universae.* Lipsiae 1742, in 4.

7) *Histoire des mathématiques*, t. I, p. 316.

8) *Lexicon mathematicum, ex diversis collectum antiquis scriptis*; welches einen Theil von dem oben genannten Werk von 1779 ausmacht.

Speiricae sectiones ita se habent, ut altera sit incurvata, implicata similis caudae equinae. Altera vero in medio quidem est latior; ex utraque vero parte deficit. Est etiam alia, quae oblonga cum sit, in medio, intervallo utitur minore; sed ex utraque parte dilatatur.

Note II.

(Erste Epoche, §. 8.)

Ueber Euclid's Oerter auf der Oberfläche.

Montucla sagt S. 172 im ersten Band seiner *Histoire des mathématiques*, dass die *Oerter auf der Oberfläche* (τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν) von Euclid, *Oberflächen* seien, und S. 215 desselben Bandes sagt er, dass sie *Curven doppelter Krümmung* wären, welche auf krummen Oberflächen beschrieben sind, so wie die Schraubenlinie auf dem Kreiscylinder. Es ist möglich, dass die Alten durch dieses Wort im Allgemeinen Oberflächen und die auf ihnen gezogenen Curven bezeichnet haben. Aber welche sind denn nun eigentlich die *Loca ad superficiem* des Euclid? Zur Beantwortung dieser Frage bleibt uns keine andre Andeutung, als die vier Lemmen des Pappus, welche sich auf dieses Werk beziehen; und da diese Lemmen nur Kegelschnitte behandeln, so müssen wir glauben, dass Euclid nur die Oberflächen behandelt hat, welche wir heute *Oberflächen des zweiten Grades* nennen. Und wir sind geneigt zu glauben, dass sie *Umdrehungs-Oberflächen* waren. Denn eines Theils ist es gewiss, dass die Umdrehungs-Oberflächen des zweiten Grades schon vor Archimedes untersucht sind, weil er nach Anführung einiger Eigenschaften ihrer ebenen Schnitte, am Ende des 12ten Satzes seines Werks über *Sphäroide und Conoide* sagt: „Die Beweise aller dieser Sätze sind bekannt"; und ferner bemerken wir, dass das letzte Lemma des Pappus eine Haupteigenschaft des Brennpunkts und der Directrix eines Kegelschnitts ist. Dieses Theorem scheint uns aber zum Beweise gedient zu haben, dass der Ort eines Punkts, dessen Entfernungen von einem festen Punkt und von einer Ebene ein constantes Verhältniss haben sollen, ein Sphäroid oder ein Conoid ist; oder auch zum Beweise, dass der Schnitt dieses Orts durch eine Ebene, welche durch den festen Punkt gelegt wird, ein Kegelschnitt ist, der seinen Brennpunkt in diesem Punkt und zur Directrix den Durchschnitt der Ebene dieser Curve mit der festen Ebene hat.

So scheint es uns nun wahrscheinlich, dass die *Loca ad superficiem* des Euclid Umdrehungs-Oberflächen des zweiten Grades und auch Schnitte waren, welche auf diesen Oberflächen, wie auf dem Kegel, durch eine Ebene gebildet wurden.

Note III.

(Erste Epoche, §. 8.)

Ueber die Porismen des Euclid.

Man verdankt es R. Simson, dass er die Ausdrucksweise, welche die von den Alten *Porismata* genannten Sätze charakterisirt, wieder hergestellt hat, und auch mehre von denen errathen hat, welche von Pappus so unvollständig angedeutet sind. Im Verlauf seines Werks reproducirt Simson mit ihren oft vereinfachten und vervollständigten Beweisen die 38 Lemmen der *Collectiones mathematicae*, welche sich auf die *Porismata* beziehn, und giebt hernach noch den Beweis für fünf Sätze von Fermat in Porismen übersetzt, und für verschiedene andre sehr allgemeine auf den Kreis bezügliche Sätze, welche von Matth. Stewart erfunden sind und wirkliche Porismen bilden.

Aber Simson scheint uns nicht verschiedene andre Fragen behandelt zu haben, welche eine vollständige Divination über die Lehre von den Porismen enthalten müsste. So ersehen wir nicht daraus, welches die Meinung von Euclid war, als er sein Werk in so ungewöhnlicher Form verfasste; in welcher Hinsicht es die besondre Auszeichnung verdient, die ihm Pappus zu Theil werden lässt; durch welche Methoden oder Operationen es sich bei den Neuern ersetzt findet; und endlich, wie verschiedene Stellen des Pappus über die Porismen und die Definition des Proclus eine genügende Auslegung erhalten können. Wir wollen mit einem Wort sagen, dass die Lehre von den Porismen, ihr Ursprung oder die philosophische Absicht, welche sie erschaffen hat, ihre Bestimmung, ihr Gebrauch, ihre Anwendungen und ihre Transformation in die modernen Lehren, eben so viele Geheimnisse sind, welche in dem Werk von Simson nicht entschleiert werden. Hierzu fügen wir noch, dass nur sechs von den dreissig Sätzen wiederhergestellt sind, welche Pappus angeführt hat.

Ein gewisses Dunkel scheint uns noch auf dieser grossen Frage zu ruhen, die wir von dem Alterthum als Erbtheil erhalten haben, wenn nicht seitdem andre Schriften, die uns unbekannt sind, zur Aufhellung desselben erschienen sind oder wenn nicht unsre Einsicht zu geringe ist, um das Werk von Simson zu begreifen.

Diese Reflexionen hatten uns lange Zeit ganz für sich eingenommen und uns oft von dem Studium abgewandt, dem

wir uns widmen wollten; denn das Interesse war mächtiger als unser Wille. So sind wir dahin gekommen, uns über die Lehre von den Porismen einige Conjecturen zu bilden und die 24 Aussprüche des Pappus wieder herzustellen, welche Simson unberührt gelassen hat. Wir wollen eine kurze Analyse unsrer Arbeit geben, wobei wir aber auf die Nachsicht des Lesers rechnen; denn wir gehen an eine solche Untersuchung, welche die Wissbegierde der grössten Geometer rege gemacht hat, nur mit Furcht und Misstrauen, welche das Gefühl unsrer Schwäche in uns nothwendig erregt.

Bei dem Mangel an hinreichenden Documenten, um auf analytischem Wege die Lehre von den Porismen vollständig wieder herzustellen, muss man sie gewisser Maassen *a priori* durch die reine Synthesis wieder zusammensetzen. Es ist ein System, welches sich nach allen den Fragen bilden und allen den Proben unterworfen werden muss, zu welchen die uns übrigen Fragmente Gelegenheit geben können.

Die Auffassung der *Porismata* scheint uns aus der der *Data* abgeleitet werden zu müssen, wie diese auch, nach unsrer Ansicht, ihr Ursprung im Sinne des Euclides gewesen ist.

Die *Porismata* waren dasselbe in Bezug auf die *Oerter*, was die *Data* in Bezug auf die einfachen Theoreme der *Elemente* waren; so dass die Porismen mit den Datis eine Ergänzung der Elemente der Geometrie bildeten, welche zur Erleichterung der Anwendung dieser Elemente auf die Auflösung von Aufgaben dienten. [9])

Unter diesem Gesichtspunkt war die specielle Bestimmung der *Porismen* die, zur Kenntniss der *Oerter* zu gelangen, indem sie die Mittel darboten, aus den Bedingungen, durch welche ein unbekannter Ort bestimmt wird, einen einfachern

---

9) Hier wollen wir eine Betrachtung wagen, welche wir uns nicht erlaubten, als wir von den *Datis* des Euclides sprachen.

Obgleich es schwer ist, in den von Pappus hinterlassenen Porismen den Sinn zu errathen, so erkennt man doch, dass bei dieser Gattung von Sätzen irgend eine Sache zu finden ist. Pappus bezeichnet diese gesuchte Sache durch das Wort *δεδόμενον*, so wie es Euclid in seinem Buche der *Δεδόμενα* gethan hat, und wendet dasselbe Wort zu gleicher Zeit auf jede Sache an, die durch die Hypothesis der Frage gegeben ist. Die Aussprüche des Pappus würden verständlicher gewesen sein, wenn er nur die letztern *gegeben*, und die andern, welche zu finden sind, *bestimmt* genannt hätte.

Diese Bemerkung findet auf das Werk der Data von Euclid ihre Anwendung, mir wurde aber, als ich mich mit der Deutung der Porismen beschäftigte, das Unpassende ein und desselben Worts für zwei verschiedene Dinge fühlbar.

Ausdruck dieses Orts zu erhalten, der seine Natur und seine Lage näher kennen lehrt.

Wenn man z. B. nach einem Punkt fragt, für welchen die Quadrate seiner Entfernungen von zwei festen Punkten, respective noch multiplicirt durch zwei Constante, eine constante Summe haben, so wird man beweisen, dass es einen gewissen festen Punkt von der Beschaffenheit giebt, dass die Entfernung jedes gesuchten Punkts von diesem festen Punkt constant ist, und durch diese Data der Aufgabe allein die Lage dieses festen Punkts und dieser constanten Entfernung bestimmen.

Dieses wird ein Porisma sein, welches zeigt, dass der Ort des gesuchten Punkts die Peripherie eines Kreises ist.

Dieses Beispiel zeigt, welches der Gebrauch der Porismen gewesen ist. Wir sagen also, dass eine Sammlung von Porismen ein Verzeichniss von verschiedenen Eigenschaften oder von verschiedenen Ausdrücken der Curven wäre (in dem Werke Euclid's nur von geraden und Kreis-Linien) und dass dies Verzeichniss die Transformationen dieser Eigenschaften darstelle; so dass die Porismen, im Sinne Euclid's, gewisser Maassen die *Gleichungen* der Curven waren. Sie gewährten die Leichtigkeit und den Kunstgriff der Coordinaten-Verwandlung (wenn man unter diesem Wort alle mögliche Arten versteht, auf welche man eine Curve durch zwei oder mehre Variable ausdrücken kann).

Die Lehre der Porismen war somit die ***analytische Geometrie*** der Alten, und man würde vielleicht in ihr, wenn sie auf uns gekommen wäre, den Keim zur Lehre des Descartes finden. Wir glauben wenigstens, dass die Gleichung der geraden Linie, abgesehen von der algebraischen Form, unter welcher wir sie anwenden, in den Porismen des Euclid enthalten gewesen ist. Deshalb haben wir auch diese im Text als Beispiel gewählt. Wir werden zu einer andern Zeit diese Meinung durch mehre Gründe unterstützen. Und wenn diese ersten Conjecturen nicht jede Wahrscheinlichkeit zu entbehren scheinen, so können wir hinzufügen, dass dem Euclid nur der Gebrauch der Algebra fehlte, um das Coordinatensystem zu erschaffen, welches sich von Descartes datirt.

Folgende ist die allgemeine Aufgabe, für welche, wie es uns scheint, Euclid seine Porismen hat bestimmen können:

„Wenn ein Ort durch eine allen seinen Punkten gemeinschaftliche Construction, oder durch ein gewisses Coordinatensystem bestimmt ist, dann eine andre Construction oder ein andres Coordinatensystem zu finden, welche allen Punkten dieses Orts genügen und wodurch man die Natur und die Lage desselben erkennt."

Nach dem Ausspruch dieser allgemeinen Aufgabe wäre der Zweck der Porismen gewesen, die Aenderungen in der Construction der Oerter oder die Aenderungen in den Coordinaten, welche allen Punkten angehören, zu erleichtern und das Werk von Euclid wäre eine Sammlung von Formeln gewesen, welche zur Erreichung dieses Zwecks dienten.

Diese Aenderungen der Construction und diese Transformationen der Coordinaten waren in der That die einzigen Mittel, welche die Geometrie der Alten anwenden konnte, um die Curven, die sich bei ihren Speculationen darboten, zu untersuchen und um sich derselben bei Auflösung von Problemen zu bedienen.

Proclus sagt also mit Recht, dass es sich in den Porismen um die *Auffindung einer Sache* handelt, *welche man nicht um ihrer selbst willen sucht und betrachtet.* Denn in der That sind diese gesuchten neuen Constructionsarten, diese neuen Coordinaten nur Hülfsgrössen, welche nur zur Untersuchung und zur Betrachtung der Curve dienen, mit der man operirt.

Die in den drei Büchern des Euclid enthaltenen Porismen waren eine Sammlung von Formeln, welche zur Construction von Oertern für die Gerade, den Punkt und den Kreis dienen. Es waren die damals bekannten oder von Euclid erfundenen Arten, um durch zwei Coordinaten, die unter einander durch eine gewisse Relation verbunden sind, die verschiedenen Beschreibungen dieser drei Oerter auszudrücken und von einer dieser Beschreibungen zu einer andern überzugehen.

Sie hatten zum Zweck, auf eine und dieselbe Beschreibung oder auf ein und dasselbe Coordinatensystem die verschiedenen Partien einer Figur zurückzuführen, welche nach den Annahmen der Aufgabe durch die verschiedenen Beschreibungen oder Coordinaten erzeugt waren. Eine Operation, welche gewisser Maassen der Reducirung mehrer Zahlen- und Buchstaben-Brüche auf gemeinsamen Nenner analog ist. Eine Operation endlich, deren Nutzen von den heutigen Geometern anerkannt wird, indem sie dieselbe täglich in allen Theilen der Mathematik anwenden, wenn sie sich verschiedener Arten von Hülfscoordinaten bedienen und die einen in die andern, nach dem Bedürfniss der Aufgabe, transformiren.

Wir werden den Nutzen der Porismen vielleicht deutlicher zeigen, wenn wir sie mit andern neuen Methoden zusammenstellen.

Die Alten hatten nicht, wie wir seit Descartes, Vergleichungsglieder zwischen den Oertern, auf welche sie bei ihren geometrischen Untersuchungen geführt wurden. Für uns

genügt es, einen Ort durch gewöhnliche Coordinaten auszudrücken und wir kennen dann unmittelbar seine Natur; die Discussion seiner Gleichung lehrt uns sodann, die singulären Beschaffenheiten und Umstände dieses Orts und den Rang, welchen er als Varietät in der Familie, zu der er gehört, einnimmt. So ist die Gleichung des Orts in der Lehre des Descartes gewisser Maassen das einzige Experiment, dem wir ihn nur unterwerfen dürfen, um seine Natur, seine Lage und seine Beziehungen zu den andern bekannten Oertern zu erkennen. Die Alten dagegen besassen kein solch allgemeines und gleichförmiges Verfahren der Untersuchung. Da sie nicht ein einziges Vergleichungsglied hatten, so mussten sie verschiedene Hülfsmittel auffinden, um zur Erkennung der Beziehungen zu gelangen, welche zwischen einem Ort, der sich zum ersten Male darbot, und den andern schon bekannten Oertern stattfinden. Diese Mittel konnten nur Aenderungen der Beschreibung oder der Coordinaten des Orts sein, um zu den einfachsten Beziehungen, selbst um zur Identität mit den Beschreibungsarten bekannter Oerter zu gelangen.

Dieses ist der Ursprung der Porismen. Sie hatten zum Zweck, für einen geometrischen oder analytischen Ausdruck eines Orts einen andern geometrischen oder analytischen Ausdruck desselben Orts zu substituiren.

Diese Betrachtungen zeigen das Verhältniss der Lehre von den Porismen zu unsern neuern Methoden, sie beweisen zugleich, wie sehr nützlich diese Porismen sein mussten. Denn, auf diese Weise betrachtet, bildeten sie wirklich eine *analytische Geometrie*, welche sich von der unsrigen nur durch die Symbole und die Verfahrungsarten der Algebra unterscheidet, für deren Einführung dem Descartes der Ruhm gebührt. So also ersetzten die Porismen bei den Alten unsre heutige Analysis, welche ohne unser Wissen in die Stelle jener getreten ist. Aber es ist sehr merkwürdig, dass die Sache nur den Namen geändert hat. Denn die Analysis des Descartes bietet selbst nichts Anderes in ihren Anwendungen dar, als ein continuirliches Porisma, aber immer von derselben Beschaffenheit und von bestimmter Form, welche zu dem Gebrauch sehr geeignet ist, zu dem wir dasselbe anwenden. Denn diese Analysis hat, wie die Lehre von den Porismen des Euclid, den Zweck, aus den Bedingungen eines Ortes einen neuen Ausdruck für diesen Ort zu erhalten, der uns schon bekannt ist und der durch seine Beziehungen zu gewissen Vergleichungsgliedern uns die Natur und die Lage dieses Ortes kennen lehrt.

Man verlange z. B. einen solchen Punkt zu finden, dass das Quadrat seiner Entfernung von einem festen Punkt in einem gegebenen Verhältnisse zu seiner Entfernung von einer festen Geraden stehen.

Wenn man in der Ebene der Figur zwei rechtwinklige Axen annimmt und x und y die Distanzen des gesuchten Punkts von diesen beiden Axen nennt, so findet man zwischen diesen Variabeln eine Relation von der Form:

$$x^2 + y^2 + ax + by = c^2,$$

wo a, b, c constante Coefficienten sind, welche von den Datis der Aufgabe abhängen. Diese Gleichung drückt folgendes Porisma aus:

„Man kann zwei Linien a, b und ein Quadrat c^2 finden, so dass die Quadrate der Entfernungen des gesuchten Punkts von zwei in der Ebene der Figur gezogenen Axen, dazu addirt die Producte aus diesen Entfernungen und respective den beiden Linien a und b, eine Summe geben, welche dem Quadrate c^2 gleich ist."

Dieses Porisma zeigt, vermöge der Elemente der analytischen Geometrie, dass der gesuchte Ort ein Kreis ist.

Wenn aber diese Elemente nicht vorhanden wären, oder man wollte sich derselben nicht bedienen, so würde man durch Veränderung des Anfangspunkts der Coordinaten die obige Gleichung vereinfachen und zu einer Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 = A^2$$

kommen, welche dieses zweite Porisma ausdrücken möchte:

„In der Ebene der Figur giebt es einen gewissen Punkt, welchen man bestimmen kann und der sich immer in einer und derselben ebenfalls bestimmbaren Entfernung von den gesuchten Punkten befindet."

Dieses zweite Porisma zeigt, dass der Ort des gesuchten Punkts ein Kreis von bestimmter Grösse und Lage ist.

Diese Resultate, zu welchen wir durch die Coordinatenmethode des Descartes gekommen sind, hätte man auch ohne Rechnung und auf rein geometrische Weise erhalten können. Welches aber auch der Weg sein mag, den man verfolgt, so sieht man doch, dass man sie als Porismen betrachten kann. Und dieses erklärt zugleich, inwiefern wir meinen, dass die Methode des Descartes die Porismen ersetzt habe, indem man, mit Hülfe des Calculs, für die verschiedenen Arten von Porismen, deren sich die Alten bedienten, eine einzige allgemeine Formel substituirt, welche sich mit einer wunderbaren Leichtigkeit auf alle Arten von Aufgaben anwendet.

Nachdem wir die Ideen ausgesprochen haben, welche wir uns über die Lehre von den Porismen gemacht haben, müssen wir sie noch der Interpretation des Textes unterwerfen, welchen Pappus uns über diese Materie hinterlassen hat. Diese Note ist aber zu lang und wir können hier nicht in solche Entwickelungen eingehen. Wir begnügen uns Folgendes zu sagen: Indem wir unsre Auffassungsart der Lehre von den Porismen zum Ausgangspunkt und zur Grundlage annahmen, sind wir zu einer hinlänglich einfachen Interpretation der 24 Aussprüche der Porismen gekommen, welche Simson nicht wieder hergestellt hat. Wir sind bei dieser Arbeit unterstüzt durch die 38 Lemmen des Pappus über die Porismen und durch seine Sätze über die *loca plana* des Apollonius. Denn da die Porismen des Euclid Localsätze über die gerade Linie und den Kreis sind, so haben wir geglaubt, dass Apollonius sich deren hat bedienen müssen, um seine *loca plana* zu erzeugen, welche zur Bildung eines Werks über die Porismen dienen könnten.

Die Grenzen, in welche wir uns einschränken müssen, erlauben uns nicht, hier die Porismen anzuführen, die wir, als dem Texte des Pappus entsprechend, gefunden haben. Aber wir wollen zwei sehr allgemeine Sätze angeben, welche in ihren zahlreichen Corollarien die 15 Sätze des Pappus umfassen, die dem ersten Buch der Porismen von Euclid entsprechen und aus denen man also eben so viele entsprechende Theoreme ableiten kann.

Aus diesen beiden Sätzen leiten sich auch mehre Coordinatensysteme, besonders das des Descartes, ab. Es folgt daraus der eigentliche Zusammenhang zwischen den Porismen des Euclid und den heutigen Coordinatensystemen, welches ein Anfang für die Rechtfertigung der Ideen sein wird, welche wir über die Lehre von den Porismen geäussert haben.

Die beiden in Rede stehenden Sätze, welche wir in der Form von Porismen aussprechen, sind folgende:

Erstes Porisma: *Man nehme in einer Ebene zwei Punkte* P *und* P^1, *zwei Transversale, welche die Gerade* PP^1 *in zwei Punkten* E *und* E^1 *treffen, und auf diesen beiden Transversalen zwei feste Punkte* O *und* O^1; *wenn man nun von jedem Punkte einer gegebenen geraden Linie zwei Gerade nach den Punkten* P *und* P^1 *zieht, welche respective die beiden Transversalen* EO *und* E^1O^1 *in zwei Punkten* a *und* a^1 *treffen, so wird man zwei solche Quantitäten* λ *und* μ *finden können, dass man immer diese Relation hat:*

$$\frac{Oa}{Ea} + \lambda \cdot \frac{O^1a^1}{E^1a^1} = \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Zweites Porisma: *Es seien in einer Ebene zwei feste gerade Linien gezogen, welche sich in einem festen Punkt* S *schneiden, und man nehme auf diesen beiden Geraden respective zwei feste Punkte* O *und* O^1; *wenn man nun um einen gegebenen Punkt eine Transversale drehen lässt, welche die beiden festen Geraden in zwei Punkten* a *und* a^1 *trifft, so wird man zwei Quantitäten* λ *und* μ *finden können, dass man immer diese Relation hat*:

$$\frac{Oa}{Sa} + \lambda \cdot \frac{O^1a^1}{Sa^1} = \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Die reciproken dieser beiden Sätze sind auch wahr, d. h.

1) Wenn die Gleichung (1) zwischen den Segmenten stattfindet, welche die beiden veränderlichen Punkte a und a^1 auf den beiden festen Geraden EO und E^1O^1 begrenzen, so schneiden sich die beiden Geraden Pa und P^1a^1 in einem Punkt, dessen geometrischer Ort eine gerade Linie ist, welche durch die Werthe der beiden Constanten λ und μ bestimmt wird.

2) Wenn die Gleichung (2) zwischen den Segmenten stattfindet, welche zwei veränderliche Punkte a und a^1 auf den beiden festen Geraden SO und SO^1 begrenzen, so geht die Gerade aa^1 immer durch einen und denselben Punkt, welcher durch die Werthe der beiden Constanten λ und μ bestimmt wird.

Aus dem ersten Porisma und seinem reciproken schliesst man leicht auf folgendes sehr allgemeine Porisma, das sich auf alle geometrische Curven bezieht:

Allgemeines Porisma: *Wenn man dieselben Dinge wie im ersten Porisma voraussetzt und von jedem Punkt einer gegebenen geometrischen Curve gerade Linien nach den beiden Punkten* P *und* P^1 *zieht, welche die beiden festen Transversalen respective in den Punkten* a *und* a^1 *schneiden: so giebt es Werthe für die Coefficienten* α, β, γ, δ *u. s. w., welche der allgemeinen Gleichung vom* m*ten Grade zwischen den Verhältnissen* $\frac{Oa}{Ea}$ *und* $\frac{O^1a^1}{E^1a^1}$ *genügen*:

$$\left(\frac{Oa}{Ea}\right)^m + \left(\alpha \cdot \frac{O^1a^1}{E^1a^1} + \beta\right) \cdot \left(\frac{Oa}{Ea}\right)^{m-1} + \text{etc.} = 0.$$

Hieraus lassen sich unendlich viele Coordinatensysteme folgern, die zur Darstellung aller Punkte einer Curve geeignet sind; das von Descartes findet man, wenn man den Punkt P in die Unendlichkeit der Transversale O^1E^1 setzt und den

Punkt P^1 in die Unendlichkeit der Transversale OE, und wenn man von den Punkten O und O^1 annimmt, dass jeder in dem Durchschnitt der beiden Transversalen liege.

Das zweite Porisma mit seinem reciproken geben ebenfalls Gelegenheit zu einem sehr allgemeinen Porisma, das sich auf alle geometrische Curven bezieht.

Allgemeines Porisma: *Man ziehe in der Ebene einer geometrischen Curve zwei Transversale, die sich in einem Punkte* S *schneiden, und man nehme auf diesen Geraden respective zwei feste Punkte* O *und* O^1. *Jede Tangente der Curve wird diese beiden Geraden auch in zwei Punkten* a *und* a^1 *schneiden. Wenn nun die Curve zum allgemeinen Charakter hat, dass man von einem Punkte ausserhalb im Allgemeinen und höchstens* m *Tangenten an sie ziehen kann; so wird es Werthe für die Coefficienten* α, β, γ, ... *geben, welche der allgemeinen Gleichung vom* m*ten Grade zwischen den beiden Verhältnissen* $\frac{Oa}{Sa}$ *und* $\frac{O^1a^1}{Sa^1}$ *genügen:*

$$\left(\frac{Oa}{Sa}\right)^m + \left(\alpha \cdot \frac{O^1a^1}{Sa^1} + \beta\right) \cdot \left(\frac{Oa}{Sa}\right)^{m-1} + \text{etc.} = 0.$$

Wir kehren zu unsern beiden ersten allgemeinen Sätzen zurück.

Jede der Gleichungen (1) und (2) lässt sich auf verschiedene Art in andre transformiren, welche zwei, drei oder vier Terme haben werden. Mehre dieser Transformationen sind zur Erklärung der Porismen im ersten Buche Euclid's nothwendig. Wir müssen noch hinzufügen, dass jede der Gleichungen, welche man hier erhält, mehre verschiedene Porismen ausdrückt, weil man statt die constanten Coefficienten, wie wir es gethan haben, verschiedene Partien der Figur als Unbekannte des Porisma annehmen kann, wie etwa die Punkte O und O^1 oder die Richtungen der Transversalen.

Auf diese Weise wird man aus unsern beiden allgemeinen Sätzen eine Menge Porismen erhalten, und wir glauben nicht zu übertreiben, wenn wir ihre Zahl auf zwei bis drei Hundert anschlagen. Ein solcher Ueberfluss stimmt auch ganz mit dem überein, was Pappus von dem Reichthum der Porismen des Euclid sagt: „*Per omnia Porismata non nisi prima principia, et semina tantum multarum et magnarum rerum sparsisse videtur.* (Euclides.)"

Von den eben erwähnten identischen Gleichungen haben wir als Beispiele die beiden (1) und (2) ausgewählt, weil sie diejenigen sind, welche die vorzüglichsten der unendlich vie-

len bei dieser Materie vorkommenden Sätze umfasst, und besonders weil sie diejenigen sind, welche ihre analoge im Raume haben und welche zur Ausdehnung der Lehre der Euclidischen Porismen auf die körperliche Geometrie dienen.

Die beiden allgemeinen Theoreme, welche zu diesem Zwecke dienen, wollen wir in Form von Porismen aussprechen.

Erstes Porisma: *Es seien im Raume ein Dreieck* ABC *und irgend drei Transversalen gegeben, welche die Ebene des Dreiecks in den Punkten* E, E^1, E^{11} *treffen, und man nehme auf diesen drei Geraden drei feste Punkte* O, O^1, O^{11} *an. Wenn man nun von jedem Punkte einer gegebenen Ebene drei Ebenen legt, welche respective durch die drei Seiten* AB, BC, CA *des Dreiecks gehen und die drei Transversalen respective in den drei Punkten* a, a^1, a^{11} *treffen*: *so wird man drei solche constante Quantitäten finden können, dass man immer folgende Gleichung hat*:

$$\frac{Oa}{Ea} + \lambda \cdot \frac{O^1a^1}{E^1a^1} + \mu \cdot \frac{O^{11}a^{11}}{E^{11}a^{11}} = \nu.$$

Und wenn umgekehrt die Coefficienten λ, μ, ν gegeben sind, so wird ihnen immer eine Ebene entsprechen, welche man bestimmen kann.

Zweites Porisma: *Man nehme im Raum einen dreikantigen Winkel, dessen Scheitel in* S *liegt, und auf seinen drei Kanten drei feste Punkte* O, O^1, O^{11}. *Wenn man um einen gegebenen Punkt eine Transversalebene drehen lässt, welche die drei Kanten des Winkels in den Punkten* a, a^1, a^{11} *schneidet*: *so wird man drei solche constante Quantitäten* λ, μ, ν *finden können, dass man immer diese Gleichung hat*:

$$\frac{Oa}{Sa} + \lambda \cdot \frac{O^1a^1}{Sa^1} + \mu \cdot \frac{O^{11}a^{11}}{Sa^{11}} = \nu.$$

Und umgekehrt, wenn in dieser Gleichnng die drei Coefficienten λ, μ, ν gegeben sind, so wird ihnen immer ein gewisser Punkt im Raume entsprechen.

Diese beiden allgemeinen Theoreme lassen eine unendliche Anzahl von Corollarien zu, worunter sich das Princip der *Transformation* der Figuren in andre derselben Art, und das der *Dualisation* der Eigenschaften der Ausdehnung befinden. Wir können aber hier nicht in alle diese Einzelnheiten eingehen.

Wir müssen noch bemerken, dass, obgleich wir die Lehre von den Porismen nur auf *Local*-Sätze angewandt

haben, dass wir sie dennoch nach der allgemeinen Definition von Simson auf alle andere Arten geometrischer und algebraischer Sätze ausdehnen, in denen es gewisse veränderliche Grössen giebt,

Zum Schluss dieser Note geben wir noch ein Verzeichnis von Autoren, welche über die Porismen geschrieben haben oder welche auch nur dies Wort gebraucht haben, ohne genau die Bedeutung anzugeben, welche sie ihm unterlegten.

Wir erinnern zunächst, dass das Wort *πόρισμα* bei den Griechen, in seiner gewöhnlichen und allgemeinen Auffassung, *corollarium* bedeutet. In diesem Sinne gebraucht es Euclid vielfältig in seinen Elementen. In seinem Werk aber über die *Porismen* hat es eine besondre Bedeutung.

Diophantus hat in seinem Werk *Problemata arithmetica* mehre Male das Wort Porisma gebraucht, um gewisse auf die Theorie der Zahlen bezügliche Sätze zu bezeichnen, auf welche er seine Beweise stützt und welche wahrscheinlich ein Werk bilden, das nicht auf uns gekommen ist. (S. z. B. die Sätze 3, 5 und 19 des V. Buches.)

Pappus und Proclus haben uns, wie wir gesagt haben, verschiedene Erklärungen von den Porismen des Euclid hinterlassen.

Diese drei sind die einzigen ältern Schriftsteller, bei denen wir das Wort Porisma in einem andern Sinn, als in der gemeinen Bedeutung, Corollar, gebraucht finden.

Bei den Neuern findet man es zuerst in dem Cosmolabium von Besson (Paris 1567, in 4.), wo es in gleichem Sinn mit dem Wort Corollar zur Bezeichnug von Sätzen gebraucht wird, welche aus einem Hauptsatze abgeleitet sind. (p. 203, 207 und 210.)

Um dieselbe Zeit hat Dasypodius in seinem Buch: *Volumen II mathematicum, complectens praecepta mathematica, astronomica, logistica* (Argentorati 1570, in 8.), eine Definition von Porismen im Sinne des Proclus gegeben. (p. 243 u. ff.)

Vieta bediente sich des Worts Porisma, als er von dem Corollarium sprach, welches auf den 16ten Satz im III. Buch der Elemente des Euclid folgt. (*Variorum de rebus mathematicis responsorum* liber VIII, cap. XIII.)

Neper nennt in seinem unsterblichen Werk: *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus in utraque trigonometria* etc. (Edinb. 1614, in 4.), Porisma eine Art von allgemeiner Scholie, in welcher er die für die rechtwinkligen oder rechtseitigen sphärischen Dreiecke gegebenen Regeln zusammenfasst.

Alexander Anderson nennt Porisma ein Local-Problem, in dem es sich um die Auffindung des Orts der Scheitel von Triangeln handelt, in welchen bei derselben Basis die beiden andern Seiten ein constantes Verhältniss unter einander haben. S. *Animadversionis in Franciscum Vietam a Clemente Cyriaco nuper editae, brevis Διάκρισις,* per Alexandrum Andersonum. (Paris 1617, in 4., 7 S.) [10])

Bachetus de Meziriac hat auch, eben so wie Diophantus, das Wort Porisma angewandt und mit diesem Namen eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der Zahlen belegt, welche seiner Einleitung und seinem Commentar zu den sechs arithmetischen Büchern des griechischen Analysten vorangehen. Diese Porismen bestehen aus drei Büchern, unter dem Titel: *Claudii Casparis Bacheti Sebusiani in Diophantum, Porismatum libri tres.* (Paris 1621, in fol.)

Savilius giebt in seinen *Praelectiones tredecim in principium elementorum Euclidis* (Oxonii 1621, in 4.) eine Definition der Porismen im Sinne des Proclus. (Lect. prima, p. 18.)

Albert Girard kündigte in seiner Trigonometrie (Haag 1626, in 16.) und in seinem Commentar zu den Werken Stevin's (Leyden 1634, in fol., p. 459) an, dass er die Porismen des Euclid wieder hergestellt habe. Dieses Werk ist aber nicht erschienen. Wär' es doch denkbar, dass es nicht ganz verloren ging!

Kircher in dem Theile seiner *Ars magna Lucis et Umbrae* (Romae 1646, in fol.), welcher von den Kegelschnitten handelt, bedient sich gleichmässig der drei Worte *corollarium*, *consectarium* und *porisma*, um dadurch die Folgerungen eines Hauptsatzes zu bezeichnen. Meisten Theils jedoch wird das letzte auf einen Satz angewandt, der nicht die Folge eines bewiesenen Satzes ist, sondern der im Gegentheil eine Verallgemeinerung desselben ist oder sich auf ihn bezieht, indem er einen Theil derselben Theorie ausmacht. Nachdem z. B. eine Eigenschaft der Parabel, unter dem Titel

---

10) Anderson hätte mehre andre Werke über die geometrische Analyse der Alten geschrieben, welche nicht veröffentlicht sind. Mersenne hält in seinem Buch *de la Vérité des sciences* (1625, in 12., p. 752) eine grosse Lobrede auf diesen Geometer, der, wie er sagt, in seinem Leben nicht nach Verdienst behandelt ist, obwohl er sich einem Archimedes und Apollonius näherte. Hernach fügt er hinzu, dass Anderson mehre Werke vorbereitet habe, um diejenigen der Alten, welche nicht auf uns gekommen sind, zu ersetzen; und fordert die Personen, welche in deren Besitz sind, auf, dieselben nicht der Wissenschaft zu entziehen.

Propositio, bewiesen ist, findet man unter der Ueberschrift *Porismata* die analogen Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel (s. p. 237 und 238, 242 und 243).

Schooten betitelt in seinen *Sectiones triginta miscellaneae* (Lib. V der *Exercitationes mathematicae*, Leyden 1657, in 4.) die 24ste Section *Porisma*, worin er, um ein Beispiel von der Manier zu geben, wie man in der Geometrie die Eigenschaften der Figuren entdecken könne, sich vorsetzt, für eine Figur die ihr zukommenden Eigenschaften aufzufinden, wenn dieselbe durch verschiedene Gerade, die auf eine gewisse Art in der Ebene eines Kreises gezogen sind, gebildet wird (p. 484 in den *Exercitationes mathematicae*).

Die vier folgenden Geometer haben förmlich über die Divination der Porismen gehandelt:

Marin Ghetaldi, *De resolutione et compositione mathematica*, lib. V; opus posthumum. Romae 1640.

Bulliaud, *Exercitationes geometricae tres*: 1. *circa demonstrationes per inscriptas et circumscriptas figuras*; 2. *circa conicarum sectionum quasdam propositiones*; 3. *de Porismatibus*. Parisiis 1657, in 4.

Renaldini, *De resolutione et compositione mathematica, libri duo*. Patavii 1668, in fol.

Fermat, *Varia opera mathematica*. Tolosae 1679, in fol.

Porismatum Euclidaeorum renovata doctrina, et sub forma isagoges recentioribus geometricis exhibita. Diese Schrift von vier Seiten wurde mehre Jahre vorher von Fermat mehren Geometern mitgetheilt und unter andern auch Bulliaud, welcher dieselbe in seinem genannten Werke erwähnt.

Nachdem darauf ein Jahrhundert vorübergegangen war, ohne uns irgend eine Schrift über die Porismen zu liefern, finden wir:

Lawson, *Treatise concerning Porisms*, 1777, in 4. — Dieser Geometer ist der Verfasser eines andern Werks über die Geometrie der Alten, betitelt: *Geometrical analysis of the ancients*, 1775, in 8.

Wallace, *Geometrical Porisms*, 1796, in 4.

Playfair, *On the origin and investigation of Porisms* (*Transactions of the Royal society of Edinburg*, tom. III, 1794, und *Oeuvres de Playfair* in 4 Bänden, 1822, in 4., tom. III, p. 179).

Lhuillier, *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique*, 1809, in 4.

J. Leslie, *Geometrical analysis*, Lib. III, in 8., Edinb. 1809 und 1821. Dieses Werk ist von Auguste Comte ins Französische übersetzt und dem *Second supplément à la géométrie descriptive* von Hachette, 1818, in 4., angehängt.

In den letzten Jahren hat Hoene Wronski eine Interpretation gegeben und sich dieses Worts bedient in seiner *Introduction à la philosophie des mathématiques*, Paris 1811, in 4. (p. 217).

Eisenmann, Professor an der *école des ponts et chaussées de France*, welcher sich mit einer Uebersetzung der Werke des Pappus, neben dem griechischen Text, beschäftigt, hat seine besondre Aufmerksamkeit auf die Lehre von den Porismen gewandt, für die er eine neue Erklärung verspricht. (S. *Traité des propriétés projectives*, Einleit. p. 37.) Wir wünschen mit Poncelet lebhaft, dass die Erscheinung dieses Werks, welches für die Geometrie von so wesentlichem Nutzen werden muss, sich nicht gar zu lange verzögere.

Castillon, der berühmte, in der alten Geometrie so bewanderte Geometer des letzten Jahrhunderts, glaubte, dass das *Werk der Porismen* im Orient noch im XIII. Jahrhundert existirte und dass ein Commentar des berühmten Astronomen und Geometers Nassir Eddin al Thusi zu einem Werk des Euclid, von dem Herbelot in seiner *Orientalischen Bibliothek* spricht, sich auf dieses Werk selbst bezieht, welches allein würdig sein konnte, von diesem berühmten persischen Geometer commentirt zu werden. „Glücklich! ruft Castillon aus, glücklich die Geometer, welche diese bewundernswerthen Bücher besitzen und ihren Werth erkennen!" (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1786—1787.)

Kostbare Entdeckungen werden noch in den Bibliotheken des Orients[11]) gemacht werden können, wenn sie einst unter den Auspicien einer Regierung ausgeforscht werden, welche den Wissenschaften befreundet und eifersüchtig auf den Ruhm ist, den diese über die Zeiten der Ptolemäer, der Medici und des Louis XIV verbreitet haben.

---

11) Die Perser behaupten einige griechische Werke zu besitzen, welche wir nicht besitzen, und wir sehen in der That, dass die Araber mehre uns unbekannte citiren. (Montucla, *Histoire des math.*, tom. I, p. 373 u. 394.)

Note IV.

(Erste Epoche, §. 12.)

Ueber die Art, die Brennpunkte beim schiefen Kegel zu construiren und ihre Eigenschaften zu beweisen.

Apollonius nennt die *Brennpunkte* der Kegelschnitte *Anwendungspunkte* (*Puncta ex applicatione facta*) und definirt sie auf folgende Art: Jeder dieser Punkte theilt die grosse Axe der Ellipse oder die erste Axe der Hyperbel in zwei Segmente, deren Product dem Quadrate der halben conjugirten Axe gleich ist, oder in der Sprache des Apollonius, dem vierten Theil der *Figur* gleich ist. *Figur* nennt er das Rechteck, welches aus der grossen Axe und dem *latus rectum* construirt ist.

Diese Construction knüpft sich, wie man sieht, nur sehr indirect an den Kegel an; und ich weiss nicht, dass man von diesen Punkten eine allgemeine und directe Construction am Kegel selbst gegeben hätte, in der Art, wie es Jacob Bernoulli für den *latus rectum* that; mit Ausnahme für den speciellen Fall eines geraden Kegels, wie wir im Verlauf dieser Note sehen werden.

Für den Fall des schiefen Kegels ist Folgendes die Construction, auf welche wir gekommen sind:

Wenn man die schneidende Ebene, so wie bei den Kegelschnitten des Apollonius, senkrecht gegen das Axendreieck annimmt, lege man durch einen der beiden Scheitel der Curve eine Ebene parallel mit der Basis des Kegels und eine zweite Ebene antiparallel; diese beiden Ebenen werden den Kegel in zwei Kreisen schneiden: durch die Mittelpunkte derselben ziehe man einen Kreis, welcher den in der Ebene des Axendreiecks liegenden Durchmesser der Curve berührt; dann ***wird dieser Berührungspunkt einer der Brennpunkte der Curve sein.***

Wenn der Durchmesser der Curve zwischen den Mittelpunkten der beiden Curven liegen, so lässt sich diese Construction nicht mehr ausführen; dann ist dieser Durchmesser nicht mehr die grosse Axe der Curve, welche in diesem Fall immer eine Ellipse ist, sondern die grosse Axe steht dann senkrecht auf dem Axendreieck. Die Construction der Brenn-

punkte für diesen Fall ist eine andre, sie wird aber noch einfacher als für den allgemeinen Fall. Ueber der Geraden, welche die Mittelpunkte der beiden Kreise verbindet, als Durchmesser angenommen, beschreibe man einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Ebene des Axendreiecks steht: *die Punkte, in welchen dieser Kreis die grosse Axe der Curve trifft, werden die gesuchten Brennpunkte sein.*

Diese beiden Constructionen führen zu einem einzigen allgemeinen Ausdruck für die Excentricität eines Kegelschnitts am Kegel selbst betrachtet, nämlich: *Die Excentricität ist die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen des Mittelpunkts der Curve von den Mittelpunkten der beiden kreisförmigen Schnitte, welche man durch einen der beiden Scheitel der Curve, die in der Ebene des Axendreiecks liegen, durchlegen kann.*

Wenn der Kegel ein gerader ist, so wird der Ausdruck für die Excentricität ausserordentlich einfach: *Von dem Centrum der schneidenden Ebene des Kegels ziehe man nach der Axe des Kegels eine schräge Linie, parallel mit der einen der beiden Seitenlinien des Kegels, die in der Ebene des Axendreiecks liegen; diese Schräge wird der Excentricität des Schnittes gleich sein.*

Bemerkung. — Unsre Construction der Brennpunkte am schiefen Kegel zeigt, dass die *Focalen* von Quetelet und van Rees (diese Curven vom dritten Grade, die der geometrische Ort der Brennpunkte von Kegelschnitten sind, welche von Ebenen, die durch eine Tangente am Kegel senkrecht auf eine seiner Hauptebenen gelegt sind, gebildet werden), dass diese Curven, in der Ebene betrachtet, der geometrische Ort der Berührungspunkte von Tangenten sind, welche durch einen festen Punkt an mehre Kreise gezogen werden, die durch dieselben zwei Punkte gehen, oder allgemeiner, von denen je zwei dieselbe *axe de symptose* haben. Ein Satz, den wir schon ohne Beweis ausgesprochen haben. (*Correspondance math.* von Quetelet, tom. VI, p. 207.)

Man sieht aber auch ferner, dass diese *Focalen* nicht immer der *vollständige* geometrische Ort für die Brennpunkte der Kegelschnitte sind, und wenn diese Schnitte durch Ebenen gebildet werden, welche senkrecht auf dem *Axendreieck* stehen, dass es *ausser der Curve des dritten Grades* einen Kreis in einer andern Ebene giebt, welcher diesen geometrischen Ort vervollständigt.

Diese Bemerkung ist der von van Rees, in seinem interessanten Memoire über die Focalen, angewandten Analysis entgangen. (*Correspondance math.*, tom. V, p. 361.)

Die angegebene Construction für die Brennpunkte der Kegelschnitte, am schiefen Kegel, liefert nicht den Beweis für die Eigenschaften dieser Punkte, und ist nicht geeignet, ihr Vorhandensein bei den Kegelschnitten *a priori* anzudeuten. Es ist also noch übrig zu untersuchen, wie man durch die Betrachtung der Kegelschnitte am Kegel zur Entdeckung ihrer Brennpunkte geführt werden könne. Diese Frage hat schon einige Geometer beschäftigt.

Hamilton, Verfasser eines vorzüglichen Werks (*De sectionibus conicis tractatus geometricus, in quo, ex natura ipsius coni, sectionum affectiones facillime deducuntur, methodo nova.* Dublin 1758, in 4.), hat aus der Natur des Kegels selbst die Eigenschaften der Directrix der Kegelschnitte abzuleiten versucht. Er bedient sich aber des geraden Kegels und setzt *a priori* den Brennpunkt jedes Kegelschnitts als bekannt voraus. (p. 100 u. 122.)

In letzterer Zeit sind Quetelet und Dandelin, durch die Betrachtung der Kegelschnitte am Körper, zu ausgezeichneten, neuen Resultaten gekommen, von denen das folgende, wie ich glaube, die erste Construction liefert, welche man für die Brennpunkte der Kegelschnitte am Kegel gegeben hat:

Wenn ein gerader Kegel durch eine Ebene geschnitten ist, und man denkt sich die beiden in den Kegel eingeschriebenen Kugeln, welche diese Ebene tangiren, so werden die beiden Berührungspunkte die Brennpunkte für die Curve sein, in welcher der Kegel von der Ebene geschnitten wird; und die beiden Geraden, in denen diese Ebene von den Ebenen der Berührungscurven der Kugeln mit dem Kegel geschnitten wird, sind die diesen Brennpunkten respective entsprechenden Directrices.

Dandelin hat dieses Theorem auf Kegelschnitte ausgedehnt, welche auf dem Drehungshyperboloid, statt auf dem geraden Kegel, betrachtet werden (*Mémoire de l'Académie de Bruxelles*, tom. III); später haben wir es noch mehr verallgemeinert, indem wir es als Corollar an eine allgemeine Eigenschaft der Oberflächen des zweiten Grades anknüpften. (*Annales des mathématiques*, tom. XIX, p. 167.)

Ein andres Corollar dieser allgemeinen Eigenschaft ist selbst eine Eigenschaft der Brennpunkte, am schiefen Kegel betrachtet, nämlich:

Wenn ein schiefer Kegel von einer Ebene geschnitten ist und man beschreibt in den Kegel eine diese Ebene tangirende Oberfläche des zweiten Grades so ein, dass der Berührungspunkt der Endpunkt eines der beiden Diameter ist, welche die Oerter für die Mittelpunkte

der kreisförmigen Schnitte der Oberfläche sind, so ist dieser Berührungspunkt der Brennpunkt des Kegelschnitts, der durch die Ebene am Kegel gebildet wird.

Dieses Theorem ist sehr allgemein; man begreift aber, dass es nicht zur Entdeckung der Brennpunkte führen und nicht zum Beweise der Eigenschaften dieser Punkte dienen kann. Das Theorem von Quetelet und Dandelin dagegen ist zu diesem Zweck vollkommen brauchbar; es bezieht sich jedoch nur auf Kegelschnitte am geraden Kegel. Man hat also noch das Mittel aufzufinden, aus der Natur des schiefen Kegels die Erkennung und die Eigenschaften der Brennpunkte abzuleiten.

Wir schlagen dazu zwei Methoden vor. Die eine besteht darin, die schneidende Ebene (welche senkrecht auf dem Axendreieck, wie bei den Kegelschnitten des Apollonius, angenommen wird) so zu wählen, dass die Axe des Kegels mit dieser Ebene einen Winkel macht, gleich dem, welchen sie mit der Basis des Kegels bildet. *Der Punkt, in welchem diese Axe die schneidende Ebene trifft, wird der Brennpunkt des Schnittes sein.* Dieser Brennpunkt wird dem Mittelpunkt des Kreises entsprechen, der dem Kegel zur Basis dient, d. h. er wird dessen Perspective sein; und die Eigenschaften dieses Mittelpunkts werden die charakteristischen Eigenschaften der Brennpunkte geben.

Die zweite Art besteht darin, die Eigenschaften des Kegels zu untersuchen, ohne Rücksicht auf die Schnitte, welche eine schneidende Ebene erzeugen kann. Man findet zunächst die Eigenschaften, welche sich auf *zwei* durch den Scheitel gelegte *Ebenen* beziehen, von denen die eine parallel mit der Basis (die ein Kreis ist) geht und die zweite parallel mit der Ebene eines Wechselschnitts, und sodann andre Eigenschaften, wobei *zwei gerade Linien*, die auf eine gewisse Weise durch den Scheitel des Kegels gezogen sind, in einer Hinsicht eine analoge Rolle spielen, als die der beiden Ebenen ist, und eine grosse Analogie mit den *Brennpunkten* der Kegelschnitte darbieten.

Wenn man den Kegel durch eine Ebene schneidet, die auf einer dieser Geraden senkrecht steht, so wird der dabei gebildete Kegelschnitt den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit dieser Geraden zum Brennpunkt haben; und zum Theil werden die Eigenschaften der geraden Linie, auf dem Kegel betrachtet, sich auf diesen Brennpunkt, in Beziehung auf den Kegelschnitt betrachtet, anwenden lassen.

Man erkennt hierin ein zweites Mittel, die Eigenschaften der Brennpunkte am Kegel selbst zu untersuchen.

Was die Eigenschaften des Kegels, in Bezug auf die genannten beiden Ebenen oder beiden Geraden, betrifft, so erhält man dieselben sehr leicht durch einfache geometrische Betrachtungen. Wir haben auf diesem Wege eine Anzahl derselben gefunden, in einer Schrift, die im sechsten Bande der *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles* sich befindet.

Note V.

(Erste Epoche, §. 15.)

Ueber die Definition der Geometrie. — Betrachtungen über die Dualität, als ein Gesetz der Natur.

Der Unterschied, welchen Aristoteles und Descartes zwischen den beiden verschiedenen Untersuchungen gemacht haben, die den beständigen Gegenstand der mathematischen Wissenschaft bilden, berechtigt uns, eine kritische Bemerkung über die Definition der Geometrie zu versuchen, wie man sie beinahe in allen elementaren Schriften findet. Sie ist, wie man sagt, *die Wissenschaft, deren Gegenstand das Maass der Ausdehnung ist.* Aber das Maass, als solches, bildet nur einen sehr kleinen Theil von den Eigenschaften der Ausdehnung, welche den Gegenstand in den Arbeiten der Geometer ausmachen. So wissen wir nicht, dass Gergonne, Poncelet, Steiner, Plücker u. m. A., deren neuere Arbeiten gewiss nicht ohne Bedeutung sind, das *Maass*, in dem Sinne, in welchem es in der angeführten Definition zu nehmen ist, betrachtet haben. Die *Géométrie descriptive* von Monge, welche wesentlich zur Wissenschaft von den Eigenschaften der Ausdehnung gehört, kann zwar dazu dienen, das Maass der Körper zu finden, aber dieses ist gewiss nur die geringste ihrer Anwendungen. Die in Rede stehende Definition ist also unvollständig und ungenügend.

Aber diese Unzulänglichkeit ist nicht ohne unangenehme Folge und trägt vielleicht zur Vernachlässigung bei, welche dieser Wissenschaft zu Theil geworden ist. Denn die Mathematiker, welche seit dreissig Jahren die Fortschritte der Geometrie nicht verfolgt haben, kennen von dieser Wissen-

schaft nur die Methoden der Quadraturen von Kepler, Cavalleri, Pascal, Gregoire von St. Vincent u. A., weil sie die innigsten Beziehungen zu den Theorien des Integralcalculs haben, welche täglich den Gegenstand ihrer tiefsten Untersuchungen bilden. Und man kann nicht läugnen, dass der Integralcalcul, die abschliessende und höchste Vervollkommnung dieser geometrischen Methoden, sie alle auf wunderbare Weise ersetzt. Daher kommt die Idee, dass das Studium der reinen Geometrie eine unnütze Sache sei, weil sie ganz in den Intergralformeln, d. h. in einer einfachen und einer einzigen Aufgabe der Analysis enthalten wäre.

Wenn man aber in die Definition dieser Wissenschaft die Beziehungen der *Form* und der *Lage* der Figuren mit aufnimmt, so wird man nicht mehr glauben, dass eine einzige analytische Formel die unendliche Mannigfaltigkeit der verschiedenen möglichen Fragen lösen könne; eine genauere Prüfung dieser Fragen führt im Gegentheil zur Erkenntniss der grössten Schwierigkeiten, auf welche das Universalmittel der Mathematik, die Analysis des Descartes, stossen kann. Man erkennt sogar eine allgemeine Klasse von Aufgaben, für welche diese Analysis, in ihrer gegenwärtigen Gestalt, als nicht zureichend erscheint, wie wir es Kap. VI, §. 5 zeigten. Wir glauben auch, dass aus dieser Prüfung noch die Ueberzeugung folgen dürfte, dass das Studium der reinen Geometrie, für sich selbst ausgebildet und vermöge ihrer eigenen Hülfsmittel, durchaus nothwendig ist, um die Eigenschaften der Ausdehnung gehörig zu erkennen, um zur Lösung einer grossen Zahl von wichtigen Aufgaben zu gelangen und den Weg der Analysis zu erklären, bei allen ihren Anwendungen auf die Geometrie selbst oder auf Natur-Phänomene.

Es ist ein beachtungswerther historischer Punkt, dass die Lateiner, welche nur sehr schwache Geometer waren, nichts desto weniger das Mangelhafte in der alten Definition der Geometrie gefühlt und dafür folgende substituirt haben, welche sich in der Geometrie von Boethius findet: *Geometria est disciplina magnitudinis immobilis, formarumque descriptio contemplativa, per quam uniuscujusque rei termini declarari solent.* Diese Definition, welche beinahe mit denselben Worten auch Cassiodorus [12]) giebt, scheint seitdem von den Schriftstellern des Mittelalters angewandt worden zu sein. Wir führen z. B. Vincent de Beauvais (aus dem 13ten

12) Aurelii Cassiodori, senatoris, etc. *Opera omnia.* Rotomagi 1679, in fol., Lib. II, p. 583.

Jahrhundert) an, welcher sie in seinem *Speculum doctrinale* (Lib. XVI, Cap. XXXVI) [13]) giebt. Bei dem Wiederaufleben war sie noch im Gebrauch. Man findet sie in der *Margarita philosophica* von Reisch [14]); und die Definition, welche Tartalea in dem dritten Theil seines allgemeinen Werks über Zahlen und Maasse giebt, ist beinahe dieselbe: „*La geometria è una scientia, ouer disciplina, che contempla la descrition delle figure, ouer forme della quantità continua immobile*, *come che è la terra e altre cose simili.*"

Man muss sich mit Recht wundern, dass diese Definition nicht beibehalten ist. Freilich ist es wahr, dass lange Zeit darauf mehre Geometer und besonders D'Alembert in seinem *Essai sur les élémens de philosophie* versucht haben, wieder darauf zurückzukommen, indem sie die Geometrie die Wissenschaft von den *Eigenschaften der figurirten Ausdehnung* nannten. Wenn aber diese genaue Definition nicht von allen Geometern angenommen ist, so sehen wir dafür zweierlei Gründe.

Die Einen wollten ohne Zweifel die griechische Etymologie des Wortes *Geometrie* beibehalten, welches *Maass der Erde* (*mesure de la terre*) bedeutet. Aber es ist klar, dass dieses Wort, auf die strenge Bedeutung seiner Etymologie eingeschränkt, nur in der ersten Zeit der Geometrie passend sein konnte. Seit den ersten Schritten, welche diese Wissenschaft gethan hat, und schon seit Thales, ist dieses Wort nicht mehr genügend. Auch ist dies von Plato streng kritisirt worden, welcher es *lächerlich* fand. [15]) Indem man seitdem den Namen der *Geometrie* für die Wissenschaft beibehielt, substituirte man in die Definition für die darin enthaltene Idee der *Erde* die der *Ausdehnung* im Allgemeinen. Man muss noch weiter gehen und auch die einfache Idee des

---

13) *Bibliotheca Mundi*, Duaci 1624, 4 Vol., in fol., tomus secundus, qui *Speculum doctrinale* inscribitur.

14) Heidelberg 1486, in 4. Oft wieder gedruckt in Strassburg, Basel und Freiburg.

15) *His cognitis atque perspectis, proxima est illa quam ridiculo admodum nomine* (γελοῖον ὄνομα) *Geometriam nuncupant.* (In Epinomide. *Platonis opera omnia*, übersetzt von Johann v. Serres, t. II, p. 990.)

Dieses so gerechte Urtheil des Plato wurde von mehren Schriftstellern des 16ten Jahrhunderts anerkannt. Der berühmte Philolog und Professor der Mathematik, Nicodemus Frischlin, drückt sich so aus: *Amplissima est et pulcherrima scientia figurarum. At quam est inepte sortita nomen geometriae!* (J. Vossius, *De universae matheseos natura et constitutione Liber.*)

Maasses durch die complicirte Idee des *Maasses* und der *Ordnung* ersetzen, welche durchaus nothwendig ist, um dem Worte *Geometrie* den wahren und vollständigen Sinn zu geben.

Ohne Zweifel hielten andre Geometer aus einem philosophischen Gesichtspunkte daran fest, einen einzigen Zweck, das *Maass* der Ausdehnung in ihrer Definition der Geometrie auszudrücken; indem sie auch diese besondre Art von Erscheinungen der Ausdehnung, welche den beträchtlichsten Theil unsrer positiven Kenntnisse ausmacht, auf eine einzige und absolute Idee zurückführen wollten. Aber so nützlich auch jede Art von Verallgemeinerung in der Auffassung sein mag, wie bei den Principien und bei den Methoden, und welche Bewunderung auch die grossen und schönen Ideen verdienen, zu denen die den Charakter der alten Philosophie bildenden Principien der Einheit Pythagoras und andre Philosophen geführt haben, so kann man doch glauben, dass eine absolute Einheit nicht das Princip der Natur ist. Die zahlreichen Dualismen, welche sich bei den natürlichen Phänomenen, wie in den verschiedenen Theilen der menschlichen Erkenntniss bemerkbar machen, führen uns auf die Annahme, dass eine beständige *Dualität* oder doppelte Einheit das wahre Princip der Natur ist.

Diese Dualität finden wir bei dem Gegenstand der Geometrie selbst, wie wir gesagt haben; bei der Natur der Eigenschaften der Ausdehnung, wo der *Punkt* und die *Ebene* identische Functionen haben (s. Note XXXIV); bei der doppelten Bewegung der Himmelskörper, wo ihre anerkannte Beständigkeit dieselbe als Princip zulässt [16]), und bei vielen andern Phänomenen.

Indem man also aus den Betrachtungen einer höhern Ordnung die der Geometrie eigene Definition zu schöpfen sucht, sieht man, dass philosophische Gründe sich nicht der Annahme der beiden grossen Abtheilungen entgegenstellen, der *Ordnung* und dem *Maass*, welche dem doppelten Zweck dieser Wissenschaft entsprechen.

---

16) Dieses Princip ist vielleicht ein Einwurf gegen das Newton'sche Gesetz über die Verbreitung des Lichts. Denn wenn ein Licht-Molecul animirt wäre von einer Bewegung der Translation, so würde es wahrscheinlich auch eine Bewegung der Rotation um sich selbst haben. Dieses ist nicht zulässig, weil sich daraus diese falsche Folgerung ergeben würde, dass bei der Reflexion eines Lichtstrahls an irgend einer Fläche der Reflexions-Winkel nicht gleich dem Einfalls-Winkel wäre.

Note VI.

(Erste Epoche, §. 22.)

Ueber das Theorem des Ptolemäus in Bezug auf ein Dreieck, welches von einer Transversale geschnitten wird.

Dieses Theorem wird uneigentlich das des Ptolemäus genannt, denn es findet sich in der Sphärik des Menelaus, von dem es Ptolemäus entlehnt hat. Da aber der *Almagest* bei weitem mehr verbreitet und bekannt war, als die *Sphärik*, so hat man es immer in dem ersteren dieser beiden Werke bemerkt, und daher ist der Irrthum gekommen, dass man es dem Ptolemäus zuschreibt.

Wir finden, dass Pappus dieses Theorem bewiesen hat und dasselbe in dem achten Buch seiner *Collectiones mathematicae* gebraucht, um einen merkwürdigen Satz über den Schwerpunkt dreier Körper, welche die drei Seiten eines Dreiecks durchlaufen, zu beweisen. Nachdem es im 16ten Jahrhundert von Purbach und Regiomontanus in ihrem Auszug des Almagest [17]) reproducirt war, scheint es von allen Geometern gekannt zu sein: Orontius Finäus in seiner Arithmetik [18]) und Stifel in seinem Werk über Algebra [19]) benutzten es, um die arithmetische Regel der *sechs Quantitäten* zu beweisen. In derselben Zeit führen es Cardan [20]), Gemma Frisius [21]), J. Schoner [22]), ohne die Figur geome-

17) *Cl. Ptolemaei Alexandrini in magnam constructionem, G. Purbachii cujusque discipuli J. de Monte Regio astronomicon epitoma.* Venetiis 1496, in fol.

18) *Arithmetica practica, libris quatuor absoluta*, etc., 1535, in fol., Lib. IV, Cap. 4.

19) *Arithmetica integra.* Norimbergae 1544, in 4., Lib. III, p. 294.

20) *Practica arithmetica et mensurandi singularis.* Mediolani 1539, in 8., cap. XLIV. *Opus novum de proportionibus numerorum*, etc., Basiliae 1570, in fol., 5ter Satz.

21) *Arithmeticae practicae methodus facilis.* Antwerpiae 1540, in 8.

22) *Algorithmus demonstratus.* Norimbergae 1534, in 4., de proportionibus appendix.

trisch zu construiren, zu demselben Zwecke an[23]); Maurolycus bedient sich desselben als eines Lemma, um die Eigenschaften der Asymptoten einer Hyperbel zu beweisen[24]), und Bressius zum Beweise mehrer Formeln der Trigonometrie.[25])

Im Laufe des 17ten Jahrhunderts waren Anwendungen dieses Theorems noch zahlreicher und mannigfacher. Mersenne sprach es in zweien seiner Werke unter den Hauptsätzen der Sphärik aus.[26]) Stevin bediente sich desselben

---

23) Bei dieser Regel der *sechs Quantitäten* handelt es sich um die Auflösung folgender Aufgabe: *Wenn das Verhältniss einer ersten Quantität zu einer zweiten aus dem Verhältniss einer dritten zu einer vierten und aus dem einer fünften zu einer sechsten zusammengesetzt ist, das Verhältniss der zweiten oder dritten oder fünften Quantität zu einer der drei andern zu finden.* Wenn a, b, c, d, e, f die sechs Quantitäten sind, so hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

und man verlangt, daraus auf das Verhältniss einer der drei Quantitäten b, c, e zu einer der drei andern b, d, f zu schliessen. Diese Aufgabe, in der hier angegebenen algebraischen Form aufgestellt, ist gewiss die einfachste, welche man sich denken kann, und man wird nicht glauben können, dass z. B. Cardan, in seinen beiden genannten Werken, ihr mehre Seiten gewidmet hat, wenn man nicht beachtet, das diese Regel eine Erweiterung der *Proportionsregel* zwischen vier Quantitäten ist, welche sich daraus ableiten lässt, wenn man z. B. c gleich d setzt, und dass diese immer eine schwierige und, so zu sagen, transcendente Partie in den Werken über Arithmetik war, bis zur Erfindung der Algebra und auch später noch, was in der alten Bezeichnung der Proportionen liegt, welche sich dreier Zeichen statt eines bedient, um eine einfache Gleichheit zweier Verhältnisse auszudrücken, und welche, ungeachtet der offenbaren Unbequemlichkeiten und Nachtheile dieser Complication, noch heutiges Tages von vielen Autoren angewandt wird.

Cardan schreibt diese *Regel der sechs Quantitäten* dem arabischen Geometer Alchindus (im 10ten Jahrh.) zu, welchen er zu den zwölf kräftigsten Genies zählt, die seit dem Ursprung der Wissenschaften erschienen sind. (*De subtilitate*, Lib. XVI.) Man findet in der That in der *Bibliotheca Arabico-Hispana* von Casiri ein ausserordentlich zahlreiches Verzeichniss von Werken, welche Alchindus über alle Theile der mathematischen, philosophischen, moralischen und andern Wissenschaften geschrieben hat und welche noch vor einem halben Jahrhundert in der reichen Bibliothek des Escurial waren.

24) F. Maurolyci *opuscula mathematica.* Venetiis 1575, in 4., p. 281.

25) *Metrices Astronomicae libri quatuor.* Paris 1581, in fol., Lib. IV, prop. 13.

26) *Synopsis mathematica.* Paris 1626. *Universae geometriae mixtaeque mathematicae synopsis*, etc. Paris 1644, in 4.

in seiner *Pratique de l'Arithmétique*, um Verhältnisse von Verhältnissen zusammenzusetzen und an diesem Beispiel zu zeigen, dass bei gewissen Fragen die Geometrie viel zur Kürze der Algebra beitragen kann; Snellius löste mit Hülfe dieses Theorems die 35ste Aufgabe der *Zetemata Geometrica* von Ludolph van Ceulen [27]); Beaugrand wandte es in seiner *Géostatique* an, um Verhältnisse von Linien zusammenzusetzen; Desargues bediente sich desselben zum Beweis einer schönen geometrischen Eigenschaft der Dreiecke, welche man in seinem *Traité de perspective*, arrangirt von Bosse (1648, in 8.) findet; Pascal stellt es in seinem *Essai pour les coniques* unter die Zahl der Haupttheoreme, auf denen sein vollständiger *Traité* dieser Curven beruhen sollte; Schooten, in seinem Opus posthumum, *De concinnandis demonstrationibus* etc., beweist es synthetisch und analytisch; um dieselbe Zeit machte ein Italiener, Guarini, von ihm denselben Gebrauch, als Beaugrand, nämlich zur Zusammensetzung der Verhältnisse von Linien. [28]) Wenige Jahre darauf kam ein andrer italienischer Geometer, welcher einigen Ruf in der Wissenschaft hat, der Marquis Johann Ceva, durch sich selbst und auf eine originelle und geistreiche Weise auf dieses Theorem und auf ein andres von derselben Art, welches auch zu den hauptsächlichsten für die Theorie der Transversalen gehört und von dem man bisher Johann Bernoulli als den Erfinder betrachtet hat. Das Werk von Ceva, in dem sich diese beiden Theoreme und noch einige andre, welche auch bemerkt zu werden verdienen, befinden, hat den Titel: *De lineis se invicem secantibus, statica constructio*. Milan 1678, in 4. In der folgenden Note werden wir die Methode angeben, welche dieses Werk auszeichnet.

Von dieser Zeit an findet man keine Spuren mehr von dem Theorem des Ptolemäus, welches, nachdem es beinahe zwei Jahrhunderte hindurch eine bedeutende Anwendung gefunden hatte und allen Geometern bekannt war, mehr als hundert Jahre ohne Früchte und beinahe ohne gekannt zu sein liegen blieb, bis auf Carnot, der unter mehren andern, auf das ebene Viereck bezüglichen Theoremen derselben Gattung, durch sich selbst auf dieses Theorem kam und es als

---

27) Mathematische Werke von Lud. v. Ceulen, aus dem Holländischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Snellius. Leyden 1619, in 4., p. 120.

28) *Euclides adauctus et methodicus, mathematicaque universalis*. Augustae Taurinorum 1671, in fol., p. 249.

eines der nützlichsten und fruchtbarsten der rationellen Geometrie bekannt machte. Wir müssen jedoch sagen, dass es, schon einige Jahre vorher, Schubert als ein Lemma für die sphärische Trigonometrie des Ptolemäus reproducirt hatte [29]), und dass ein andrer Geometer des Nordens, N. Fuss, sich desselben so wie auch eines analogen Theorems der sphärischen Geometrie bedient hatte, um einige Sätze zu beweisen, wie z. B. jene Eigenschaft des Kreises, welche Fuss dem D'Alembert zuschreibt: „dass die Durchschnittspunkte je zweier gemeinschaftlichen Tangenten an drei Kreisen in gerader Linie liegen." [30])

Von den andern, die wir genannt haben, stellt Mersenne allein das in Rede stehende Theorem als eines von Menelaus auf; die meisten schreiben es dém Ptolemäus zu; einige geben keinen Ursprung an, worunter Maurolycus, Desargues, Pascal und Ceva; dieser letztere ist wahrscheinlich von selbst auf dasselbe gekommen.

Flauti, in seiner *Geometria di sito*, hat schon den Gebrauch bemerkt, welchen Pappus in dem achten Buch seiner *Collectiones mathematicae* davon gemacht hat. Wir haben aus dem Memoire von Brianchon *sur les lignes du second ordre* unsre Citation des Maurolycus und Schubert und aus dem *Traité des propriétés projectives* von Poncelet die des Desargues entlehnt. Wir zweifeln nicht, dass man noch viele andre ausser denen finden könne, welche wir diesen ersten zugefügt haben. Denn dieses Theorem, von dem wir sprechen, muss den Arabern sehr bekannt gewesen sein, welche sein analoges auf der Sphäre vielfach commentirten und erläuterten; und die europäischen Mathematiker, die diese Theoreme von den Mauren empfingen, machten sie auch zu dem Gegenstand ihrer Meditation. So erhielt Simon von Bredon, ein Engländer des 14ten Jahrh., mehre Schriften über diesen Gegenstand in der Bodleianischen Bibliothek, wie uns der gelehrte Halley in seiner Uebersetzung der *Sphaerica* des Menelaus sagt.

Was den Ursprung der beiden Theoreme betrifft, so scheint er bis auf Hipparch zurückzugehen, welcher der Vorgänger von Ptolemäus und Menelaus in der Rechnung der Chorden und in der Trigonometrie war. Man erkennt sehr wohl, dass dieser berühmte Astronom die Eigenschaft des sphärischen Dreiecks aus der des geradlinigen abgeleitet hat;

29) Trigonometria sphaerica e Ptolemaeo; *Nova Acta Petrop.* 1794, tom. XII, p. 165.

30) *Nova Acta Petrop.*, 1797 und 1798, tom. XIV.

aber welche geometrische Speculationen haben ihn dazu führen können? Wir wären geneigt zu glauben, dass die Entdeckung dieses Theorems bis auf Euclid zurückginge und dass dieses einen Theil seiner *Porismen* ausmachte. Denn es ist in der Art der verschiedenen Lemmen, welche uns Pappus über diese Porismen hinterlassen hat; und das eine dieser Lemmen (Satz 137 im 7ten Buch der *Collect. math.*), welches sich von dem in Rede stehenden Theorem nur dadurch unterscheidet, dass ein Verhältniss zweier Segmente für ein andres substituirt ist, scheint uns dazu gedient zu haben, den Beweis dieses Theorems zu erleichtern.

Wir sind in dieser Conjectur bestärkt worden, weil wir sahen, dass dieses Theorem auf ganz natürliche Weise in eine Zusammenstellung gleichartiger Sätze einginge, welche unsrer Ansicht nach dem ersten Buch der *Porismen* des Euclid entsprechen.

Note VII.

(Fortsetzung der Note VI.)

Ueber das Werk von J. Ceva, betitelt: De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio.

Die Idee, auf welcher diese Schrift beruht, besteht darin, sich der Eigenschaften des Schwerpunkts eines Systems von Punkten, bei Aufgaben zu bedienen, bei denen man die Verhältnisse von Segmenten, welche von sich schneidenden Geraden auf einander gebildet werden, zu betrachten hat, wie es bei mehren Sätzen aus der Theorie der Transversalen der Fall ist. Man nimmt an, dass in den Durchschnittspunkten dieser Geraden Gewichte angebracht sind, welche den auf diesen Geraden gebildeten Segmenten umgekehrt proportional sind; und aus den Verhältnissen dieser Gewichte, welche das Princip des Hebels in der Statik angiebt, schliesst man auf die Verhältnisse der Segmente.

Um auf diesem Wege das Theorem des Ptolemäus zu beweisen, denken wir uns ein Dreieck ABC, dessen Seiten AB, BC, CA respective in den Punkten c, a, b von irgend

einer Transversale geschnitten werden. In a, C, A nehme ich drei materielle Punkte an, von denen die Massee a^1 im ersten willkührlich ist, die beiden andern Massen C^1 und A^1 aber dergestalt bestimmt sind, dass der Punkt B der Schwerpunkt der beiden materiellen Punkte in a und C, und der Punkt b der Schwerpunkt der beiden materiellen Punkte in C und A werden. Der Schwerpunkt der drei Massen wird dann der Durchschnittspunkt c der beiden Geraden ab und AB sein.

Man hat nach dem Gesetz der Statik:

$$\frac{aB}{aC} = \frac{C^1}{a^1 + C^1};\ C^1 = A^1 \cdot \frac{Ab}{Cb}.$$

Die Gewichte a^1 und C^1 können durch ein einziges Gewicht $a^1 + C^1$, welches sich in B befindet, ersetzt werden; indem man es mit A^1 vergleicht, erhält man:

$$a^1 + C^1 = A^1 \cdot \frac{Ac}{Bc};$$

es wird mithin:

$$\frac{aB}{aC} = \frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Bc}{Ac} \text{ oder } aB.bC.cA = aC.bA.cB,$$

w. z. b. w.

Wir gehen zum zweiten Theorem über. Es handelt sich darum, nachzuweisen: *wenn drei Gerade, welche von den Scheiteln eines Dreiecks ausgehen, sich in einem Punkte schneiden, so sind die auf den gegenüberliegenden Seiten von ihnen gebildeten Segmente so beschaffen, dass das Product aus drei derselben, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich dem Product der andern drei ist.*

Es sei ABC das Dreieck, und $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ die drei Geraden, welche sich in dem Punkte D kreuzen und respective die Seiten des Dreiecks in den Punkten α, β, γ treffen. In A lege man einen materiellen Punkt, dessen Masse A^1 willkührlich ist, und in B und C zwei andre materielle Punkte, deren Massen B^1 und C^1 von der Art sind, dass der Schwerpunkt der Massen A^1 und B^1 in γ, und der Schwerpunkt der Massen A^1 und C^1 in β liegt. Der Schwerpunkt der drei Massen wird dann der Durchschnittspunkt der beiden Geraden $B\beta$ und $C\gamma$ sein, d. h. in D. Hieraus folgt, dass der Punkt α der Schwerpunkt der beiden Massen B^1 und C^1 ist und dass man hat:

$$\frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{C^1}{B^1},$$

oder

$$\frac{C^1}{A^1} = \frac{A\beta}{C\beta} \text{ und } \frac{B^1}{A^1} = \frac{A\gamma}{B\gamma}.$$

Mithin erhält man:

$$\frac{B\alpha}{C\alpha} \cdot \frac{C\beta}{A\beta} \cdot \frac{A\gamma}{B\gamma} = 1,$$

w. z. b. w.

Johann Bernoulli hat seitdem dieses Theorem auch bewiesen (tom. IV, p. 33 seiner *Opera*); aber er scheint keinen Gebrauch davon gemacht zu haben.

Nachdem Ceva dieses Theorem nach seiner statischen Methode bewiesen hat, giebt er noch dafür zwei andre rein geometrische Beweise, von denen der eine, wie er sagt, von Pt. P. Caravaggio ist. (Lib. I, Prop. 10.)

Indem er statt eines Dreiecks ein Viereck betrachtet, in dessen Scheiteln vier materielle Punkte liegen, gelangt Ceva zu diesem andern Theorem, welches auch ein Haupttheorem aus der Theorie der Transversalen ist: *wenn eine Ebene die vier Seiten eines nicht-ebenen Vierecks* (*quadrilatère gauche*) *schneidet, so bildet sie acht solche Segmente, dass das Product aus vier von ihnen, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich ist dem Product der vier andern.* (Lib. I, Prop. 22.)

Das erste Buch schliesst mit einigen Eigenschaften der dreiseitigen und vierseitigen Pyramide, durch dieselbe Methode bewiesen.

Im zweiten Buch sind verschiedene Eigenschaften der geradlinigen Figuren und der Curven zweiten Grades mit Hülfe der Principien des ersten Buchs bewiesen. Wir führen folgenden Satz an, welcher gegenwärtig nur ein besonderer Fall der allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte ist: *Wenn ein Kegelschnitt einem Dreieck eingeschrieben ist, so schneiden sich die drei Linien, welche von den drei Scheiteln nach den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, in Einem Punkt.*

In einem *Appendix* endlich, welchen Ceva als ein abgesondertes Werk über Gegenstände, die den vorhergehenden fremd sind, betrachtet, finden sich durch eine tiefe Geometrie mehre Aufgaben aufgelöst, die sich auf die Flächen gewisser ebenen, von Bögen verschiedener Kreise begrenzten Figuren beziehen, und auf die Volumina und Schwerpunkte verschiedener Körper, wie des Paraboloids und der beiden Hyperboloide, wenn sie durch Umdrehung entstehen.

Dieser *Appendix* hat Montucla, der wahrscheinlich die beiden Bücher des angeführten Werks nicht gelesen hat, zu dem Ausspruch veranlasst, „dass der Titel sehr unvollständig den Inhalt angebe." Der Titel scheint uns im Gegentheil vollkommen zu dem Werke zu passen, auf das er sich bezieht; und man kann nur sagen, dass auch der *Appendix* verdiente, auf dem ersten Blatte des Buches angegeben zu werden.

Ein Wort wird uns genügen, um nach der Methode des Ceva eine vortreffliche und nützliche Eigenschaft des Vierecks zu beweisen. Man hat in der zuletzt angegebenen Figur:

$$\frac{AD}{D\alpha} = \frac{C^1 + B^1}{A^1}, \text{ aber } C^1 = A^1 \cdot \frac{A\beta}{C\beta} \text{ und } B^1 = A^1 \cdot \frac{A\gamma}{B\gamma};$$

also:

$$\frac{AD}{D\alpha} = \frac{A\beta}{C\beta} + \frac{A\gamma}{B\gamma}.$$

Wenn man das Viereck $A\beta D\gamma$ betrachtet, für welches die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten C und B sind, so sieht man, dass diese Gleichung folgendes Theorem ausdrückt:

In jedem Viereck ist die Diagonale, die von einem Scheitel ausgeht, dividirt durch ihre Verlängerung bis zu der Geraden, welche die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten verbindet, gleich der Summe der beiden Seiten, die von demselben Scheitel ausgehen, respective dividirt durch ihre Verlängerungen bis zu den gegenüberliegenden Seiten.

Dieses Theorem hat sein analoges im Raum, welches man auf dieselbe Art beweisen kann, indem man statt eines Dreiecks ein Tetraeder betrachtet, und vier Gerade, die von seinen Scheiteln ausgehen und sich in einem Punkte schneiden. Die Figur stellt auf diese Weise ein achteckiges Hexaeder dar, in welchem je zwei gegenüberliegende Seitenflächen sich in den geraden Linien schneiden, die in Einer Ebene liegen.

Die von einem Scheitel ausgehende Diagonale, dividirt durch ihre Verlängerung bis zu dieser Ebene, ist gleich der Summe der drei an diesem Scheitel liegenden Kanten, respective dividirt durch ihre Verlängerungen bis zu derselben Ebene.

Dieses ist das Theorem, welches wir bei der Anwendung eines *neuen Coordinatensystems* angewandt haben, welches in der *Correspondance* von Quetelet, tom. VI, p. 86, Jahr 1830 angeführt ist.

Note VIII.

(Erste Epoche, §. 29.)

Beschreibung der Spirales und der Quadratrices vermittelst der schraubenförmigen Oberfläche (surface héliçoïde rampante). Analogie dieser Curven mit den eben sogenannten im Coordinatensystem des Descartes.

Die uns von Pappus hinterlassenen Constructionen der Spirale und Quadratrix sind nur einfache Anwendungen zweier allgemeinen Verfahrungsarten, welche durch den Durchschnitt einer schraubenförmigen Oberfläche und einer zweiten passend bestimmten Oberfläche zur Construction aller *Spiralen* und unendlich vieler andern Curven dienen, denen ich den Namen *Quadratrices* gegeben habe, weil sie durch dieselben Coordinaten, als die Quadratrix des Dinostratus, ausgedrückt werden.

Die zweite hierbei in Anwendung kommende Oberfläche wird zur Construction der *Spiralen* eine Drehungsoberfläche um die Axe der schraubenförmigen Oberfläche sein, und zur Construction der *Quadratrices* eine cylindrische Oberfläche, deren Seitenlinien senkrecht auf der Axe der schraubenförmigen Oberfläche stehen.

Unsre Constructionen geben unmittelbar die *Tangenten* und die *Berührungskreise* für die Curven, welche wir betrachten. Ihr Hauptvortheil aber besteht darin, dass sie constante geometrische Relationen aufstellt zwischen diesen Curven und denen, welche in dem System der gewöhnlichen Coordinaten denselben Namen führen; z. B. zwischen der *hyperbolischen Spirale* und der *Hyperbel*, zwischen der *logarithmischen Spirale* und der *logarithmischen Linie*. In diesem System wird die *Spirale des Archimedes* der geraden Linie entsprechen.

Bisher hatten diese Curven keine andern Beziehungen zu einander, als dieselbe Form der Gleichung zwischen verschiedenen Coordinaten, wodurch keine Verbindung der Construction und keine geometrischen Relationen zwischen ihnen aufgestellt wurden. Das Verfahren, nach dem die einen zur Construction der andern gebraucht werden, führt auf die genügendste Art zu den Eigenschaften, welche diese Curven

und besonders die logarithmische Spirale berühmt gemacht haben, und giebt *a priori* die geometrischen Beziehungen dieser schönen Eigenschaften.

Construction der Spiralen. — Man denke sich eine Oberfläche, die durch die Umdrehung einer Curve um eine feste, in ihrer Ebene liegende Axe entstanden ist, und nehme diese Axe vertical an, so werden die von den einzelnen Punkten der Curve auf diese Axe gefällten Perpendikel die *Ordinaten* sein und die Entfernungen der Fusspunkte dieser Perpendikel von einem festen Punkte der Axe die *Abscissen.*

Man nehme nun an, dass die Bewegung der Ebene der Curve gleichförmig sei, und dass zu gleicher Zeit ein Punkt M auf dieser beweglichen sich dergestalt bewege, dass seine Abscissen gleichförmig wachsen — die Bewegung dieses Punktes, auf der Rotationsaxe geschätzt, wird also proportional der drehenden Bewegung sein; — dann wird der Punkt M auf der Revolutions-Oberfläche eine gewisse Curve doppelter Krümmung beschreiben.

Die senkrechte Projection dieser Curve auf eine Ebene, die senkrecht auf der Drehungsaxe steht, wird eine Spirale sein, deren Gleichung wir aus der Gleichung der sich drehenden erzeugenden Curve ableiten wollen.

Es sei $z = F(y)$ die Gleichung der erzeugenden Curve. Betrachen wir nun diese Curve in irgend einem Augenblick ihrer Bewegung, so sei M der erzeugende Punkt auf der Curve, dann wird seine Abscisse z proportional der Drehung sein, welche die Ebene der Curve seit dem Anfang der Bewegung erfahren hat. Diese Rotationen wird man nach dem Winkel messen, den die Durchschnittslinie der beweglichen Ebene in einer Horizontal-Ebene mit einer festen Axe macht, welche den Anfang der Bewegung bezeichnet. Dieser Winkel sei u, so hat man:

$$z = a \,.\, u, \text{ und folglich: } a \,.\, u = F(y).$$

Es sei ferner m die Projection des Punktes M in der Horizontal-Ebene und O der Fusspunkt der Drehungs-Axe in derselben Ebene, so ist der Radius Om, den ich durch r bezeichne, gleich der Ordinate y des Punktes M; man hat also zwischen diesem Radius r und dem Winkel u, den er mit der erwähnten Axe bildet, diese Relation:

$$a \,.\, u = F(r).$$

Diese Relation ist die Gleichung in Polarcoordinaten für die Projection der Curve doppelter Krümmung, welche auf der Revolutions-Oberfläche gebildet ist.

Wir bemerken hier, dass das vom Punkte M auf die Drehungsaxe gefällte Perpendikel die Oberfläche einer Schraube mit rechtwinkligem Schraubengange (*vis à filets carrès*) erzeugt, welche man auch schraubenförmige Oberfläche (*surface héliçoïde rampante*) nennt. Denn diese Gerade ist immer horizontal und erhebt sich über eine Horinzontal-Ebene durch gleichförmige Bewegung in derselben Zeit, als die sie enthaltende Vertical-Ebene sich gleichförmig um die Drehungsaxe bewegt.

Es ist also die durch den Punkt M erzeugte Curve, der Durchschnitt der Drehungs-Oberfläche durch eine schraubenförmige Oberfläche.

Man hat mithin folgendes Theorem:

1) *Jede Spirale* (wir verstehen unter *Spirale* jede Curve, die durch eine Gleichung zwischen den Polarcoordinaten r und u dargestellt wird) *kann betrachtet werden als die Projection des Durchschnitts einer surface héliçoïde rampante mit einer gewissen, passend bestimmten Revolutions-Oberfläche, wobei diese beiden Oberflächen zur gemeinsamen Axe ein Perpendikel auf der Ebene der Spirale haben, welches durch ihren Anfangspunkt gezogen ist.*

2) *Wenn* $a . u = F(r)$ *die Gleichung der Spirale ist und* a *das Verhältniss zwischen der aufwärts gehenden und der drehenden Bewegung der Geraden, welche die schraubenförmige Oberfläche erzeugt, so ist die Gleichung der Curve, welche die Revolutions-Oberfläche erzeugt:* $z = F(y)$, *wo die Abscissen* z *auf der Drehungsaxe und die Ordinaten* y *senkrecht gegen die Axe genommen sind.*

Für die Spirale des Archimedes, deren Gleichung $a.u = r$ ist, wird die Gleichung der Meridianlinie auf der Revolutions-Oberfläche $z = y$ sein, d. h. diese Linie ist eine gerade und die Revolutions-Oberfläche ein Kegel. Dieses ist eines von den beiden Theoremen des Pappus.

Für die hyperbolische Spirale, deren Gleichung $u . r =$ *Const.* ist, wird die Gleichung für den Schnitt der Revolutions-Oberfläche im Meridian

$$z . y = a . \text{Const.} = \text{Const.},$$

d. h. eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote in der Richtung der Axe der schraubenförmigen Oberfläche liegt.

Für die logarithmische Spirale, deren Gleichung $u = log. r$ ist, erhält man $z = log. y$; dieses ist die Gleichung einer logarithmischen Linie, in welcher die Abscissen z den Logarithmen der Ordinaten y proportional sind.

Wenn eine gewöhnliche logarithmische Linie durch Umdrehung um ihre Asymptote eine Revolutions-Oberfläche erzeugt und man nimmt diese Asymptote zur Axe einer schraubenförmigen Oberfläche, so werden sich diese beiden Oberflächen in einer Curve doppelter Krümmung schneiden, deren senkrechte Projection auf eine Ebene, welche senkrecht auf der Asymptote steht, eine logarithmische Spirale ist.

Tangenten der Spiralen. — Es sei M ein Punkt in dem Durchschnitt der schraubenförmigen Oberfläche mit der Revolutions-Oberfläche, welche, wie wir gesagt haben, von der Art ist, dass sie eine gegebene Spirale erzeugt. Die Tangente in einem Punkte m dieser Spirale wird die Projection des Durchschnitts zweier Ebenen sein, welche die beiden Oberflächen im Punkte M berühren. Die Tangenten-Ebene der Revolutions-Oberfläche trifft die Drehungsaxe in einem Punkt O. Ich nehme nun an, dass die Horizontal-Ebene, in welcher man die Spirale beschreibt, durch den Punkt O geht; dann projecirt sich die Linie OM auf diese Ebene in Om und dieses ist der *radius vector* der Spirale. Die Tangenten-Ebene an der Revolutions-Oberfläche schneidet die Horizontal-Ebene in einer Geraden Ot, welche senkrecht auf Om steht. Die Tangenten-Ebene an der schraubenförmigen Oberfläche, in demselben Punkt M, geht durch die Generatrix dieser Oberfläche, welche parallel mit dem Radius Om ist; der Schnitt dieser Ebene mit der Horizontal-Ebene ist also parallel mit Om. Um daher diesen Schnitt zu bestimmen, darf man nur Einen Punkt desselben finden. In dieser Tangenten-Ebene liegt aber die Tangente der Schraubenlinie, welche auf der schraubenförmigen Oberfläche durch den Punkt M geht, und diese Tangente liegt wieder in der Vertical-Ebene, die senkrecht auf dem Radius Om steht; nun sei ϑ der Punkt, in welchem sie die Horizontal-Ebene trifft, und α der Winkel, den sie mit der Axe der schraubenförmigen Oberfläche bildet; dann hat man in dem bei m rechtwinkligen Dreieck $Mm\vartheta$, $m\vartheta = Mm \,.\, tang.\, \alpha$. Man weiss aber aus den Eigenschaften der schraubenförmigen Oberfläche, dass die trigonometrische Tangente des Winkels α der Entfernung des Punktes M von der Axe der Oberfläche proportional ist, es wird also $tang.\, \alpha = Om \,.\, Const.$ Diese Constante ist dem Verhältniss gleich, welches zwischen der drehenden und der aufwärts gehenden Bewegung der Generatrix

der schraubenförmigen Oberfläche stattfindet. Dieses Verhältniss haben wir durch $\frac{1}{a}$ dargestellt, so dass man endlich erhält:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{Om}{a}, \text{ und } m\vartheta = \frac{Mm \cdot Om}{a}.$$

Die Gerade $m\vartheta$ steht senkrecht auf dem Radius vector *Om*; der Durchschnitt (*la trace*) der, die schraubenförmige Oberfläche tangirenden Ebene ist parallel mit diesem Radius; wenn man also auf der Geraden *Ot*, die senkrecht auf diesem Radius steht, ein Stück

$$Ot = m\vartheta = \frac{Om \cdot Mm}{a}$$

nimmt, so gehört der Punkt *t* dem Durchschnitt an. Diese Gerade *Ot* aber ist der Durchschnitt (*la trace*) der, die Revolutions-Oberfläche tangirenden Ebene, so dass also der Punkt der Schnittlinie der Tangenten-Ebenen beider Oberflächen angehört und folglich ein Punkt in der durch *m* gezogenen Tangente derjenigen Spirale ist, welche die Projection des Schnitts beider Oberflächen ist.

Die Linie *Ot* heisst bekanntlich die *Subtangente* der Spirale; die *Subnormale* ist das Stück *On*, welches auf der Verlängerung der Geraden *Ot* zwischen dem Punkte *O* und der Normale der Curve liegt; sie ist gleich dem Quadrat des Radius dividirt durch die Subtangente, also:

$$On = \frac{a \cdot Om}{Mm}.$$

Um nun von diesen Formeln Gebrauch zu machen, bemerken wir: da die Tangenten-Ebene an der Revolutions-Oberfläche im Punkte *M* durch den Punkt *O* geht, dass die Linie *Mm* genau der Subtangente der Generatrix der Revolutions-Oberfläche gleich ist, wenn man diese Subtangente auf der Drehungsaxe nimmt. Nennen wir *S* diese Subtangente, und beachten wir, dass der Radius vector *Om* der Spirale gleich der Ordinate *y* der Generatrix der Revolutions-Oberfläche ist, so haben wir:

$$Ot = \frac{y \cdot S}{a},$$

$$On = \frac{a \cdot y}{S}.$$

Diese sind die Ausdrücke für die Subtangente und Subnormale einer Spirale, als Functionen der Subtangente und der Ordinate der Generatrix der Revolutions-Oberfläche.

Für die Archimedische Spirale ist die Generatrix eine gerade Linie; man hat dann $\frac{y}{S} = Const.$, also $On = Const.$, d. h. *für die Archimedische Spirale ist die Subnormale constant.*

Für die hyperbolische Spirale ist die Generatrix eine gleichseitige Hyperbel, in welcher man bekanntlich $S \cdot y = Const.$ hat, also wird $Ot = Const.$, d. h. *für die hyperbolische Spirale ist die Subtangente constant.*

Bei der logarithmischen Linie ist die auf der Asymptote gerechnete Subtangente constant, also $S = Const.$, folglich hat man für die logarithmische Spirale:

$$\frac{Ot}{y} = Const. \text{ oder } \frac{Ot}{Om} = Const.$$

Es ist aber $\frac{Ot}{Om}$ gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente an der Spirale mit dem Radius vector macht; dieser Winkel wird also constant, d. h. *bei der logarithmischen Spirale bildet die Tangente einen constanten Winkel mit dem Radius vector.*

Weil Ot dem Om proportional ist, so sieht man, dass der Endpunkt einer geraden Linie, welche gleich der Subtangente ist und auf den Radius vector aufgetragen wird, auf einer logarithmischen Spirale liegt, die der vorgegebenen ähnlich ist. Wenn man aber annimmt, dass diese Spirale ein Viertheil der Umdrehung um ihren Mittelpunkt macht, so wird jeder ihrer Radien mit der Subtangente der vorgegebenen zusammenfallen; die Fusspunkte der Tangenten der Spirale liegen also auf einer ihr ähnlichen Spirale. Zwei unter einander ähnliche Spiralen sind aber nothwendig gleich, weil die Winkel, welche ihre Tangenten mit den Radii vectores bilden, gleich sind, und weil einem gegebenen Winkel nur *eine* Spirale entsprechen kann; so dass wir folgendes Theorem aussprechen können:

Bei einer logarithmischen Spirale liegen die Fusspunkte der Tangenten auf einer zweiten logarithmischen Spirale, welche der ersten vollkommen gleich ist und nur an einer andern Stelle liegt.

Dieselbe Eigenschaft findet auch für die Fusspunkte der Subnormalen statt.

Krümmungshalbmesser der Spiralen. — Wenn man die Spiralen als den geraden Schnitt eines Cylinders betrachtet, welcher durch die Schnitt-Curve einer Revolutions-Oberfläche und einer schraubenförmigen Oberfläche geht, so

findet man leicht, vermöge der Theoreme von Euler und Meunieur, den Werth für den Krümmungshalbmesser in irgend einem Punkt, als Function des Krümmungshalbmessers einer Curve, die im Meridian der Revolutions-Oberfläche liegt. Um diese Note abzukürzen, wollen wir hier diese Construction übergehen und zu einer andern Zeit darauf zurückkommen.

Wir behalten uns auch die Construction der *quadratrices*, welche analog der der *Spiralen* ist, für eine andre Schrift vor.

Note IX.

(Erste Epoche, §. 30.)

Ueber die anharmonische Function von vier Punkten oder von vier Geraden.

Wenn vier Punkte *a*, *b*, *c*, *d* auf einer geraden Linie liegen, so haben wir die Funktion

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

das *anharmonische Verhältniss* der vier Punkte genannt.

Der 129ste Satz im 7ten Buch von Pappus sagt: *wenn vier gerade Linien von einem Punkt ausgehen, so werden diese von jeder Transversalen in vier Punkten geschnitten, deren anharmonisches Verhältniss immer denselben Werth hat; welches auch die Transversale sein mag.*

Diese Eigenschaft der *anharmonischen Function* von vier Punkten unterscheidet sie von jeder andern Function, welche man aus den zwischen den vier Punkten liegenden Segmenten bilden kann. Aber diese anharmonische Function erfreut sich einer andern anharmonischen Eigenschaft, aus welcher die erstere sich ableiten lässt, nämlich:

Wenn man von einem willkührlich gewählten Punkt nach vier in gerader Linie liegenden Punkten Gerade zieht, so wird die anharmonische Function dieser Punkte genau dasselbe zu ihrem Werth haben, was diese Func-

tion werden möchte, wenn man statt der vier darin vorkommenden Segmente die Sinusse der diesen Segmenten gegenüberliegenden Winkel substituirte.

Diese Function zwischen den Sinussen der Winkel, welche zwischen vier Geraden liegen, die von einem Punkte ausgehen, wird die *anharmonische Function* der vier Geraden genannt.

Dieses Theorem beweist, dass die anharmonische Function von vier Punkten, *projectivischer* Natur ist, d. h. dass diese Function denselben Werth behält, wenn man die Projection oder die Perspective der vier Punkte nimmt, auf welche sie sich bezieht.

Man kann dieses Theorem noch verallgemeinern, wenn man durch die vier Punkte irgend welche vier Ebenen legt, die sich in einer beliebig im Raume gewählten geraden Linie schneiden: *die anharmonische Function von vier Punkten behält denselben Werth, wenn man statt der Segmente die Sinusse der Flächenwinkel setzt, welche diesen Segmenten gegenüberliegen.*

Wir haben das anharmonische Verhältniss zwischen den vier Punkten a, b, c, d durch die Function:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd}$$

ausgedrückt; man kann aber auch eben so gut eine dieser beiden andern Functionen

$$\frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db}, \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}$$

wählen. Eine vierte ähnliche kann man jedoch nicht zwischen den vier Punkten a, b, c, d aufstellen; so dass sich *das anharmonische Verhältniss zwischen vier Punkten auf drei verschiedene Arten ausdrücken lässt.*

Wenn einer von den Punkten in der Unendlichkeit liegt, so wird das Verhältniss einfacher, indem es dann nur zwei Segmente enthält. Liegt z. B. der Punkt d in der Unendlichkeit, so lässt sich das anharmonische Verhältniss zwischen den vier Punkten a, b, c und der Unendlichkeit auf folgende drei Arten ausdrücken:

$$\frac{ac}{cb}, \quad \frac{ca}{ab}, \quad \frac{ab}{bc}.$$

Es seien a, b, c, d vier Punkte, welche in gerader Linie liegen, und a^1, b^1, c^1, d^1 vier andre Punkte auf einer

andern Geraden, die respective den vier erstern entsprechen, und nehmen wir an, dass das anharmonische Verhältniss dieser letztern gleich dem der erstern sei, so dass man also eine der folgenden Gleichungen hat:

$$(A) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a^1c^1}{a^1d^1} : \frac{b^1c^1}{b^1d^1}, \\ \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} = \frac{a^1c^1}{a^1b^1} : \frac{d^1c^1}{d^1b^1}, \\ \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{a^1b^1}{a^1d^1} : \frac{c^1b^1}{c^1d^1}, \end{cases}$$

so sag' ich, *dass die beiden andern Gleichungen eine nothwendige Folge dieser einen sind. Irgend eine der drei Gleichungen* (A) *bedingt also die beiden andern.* Die Verification kann man auf dem Wege des Calculs machen. Aber es ist leichter, zum Beweise dieser Eigenschaft der anharmonischen Function, sich einer geometrischen Betrachtung zu bedienen.

Man lege die beiden Geraden, auf denen sich die beiden Systeme von Punkten befinden, dergestalt, dass die beiden correspondirenden Punkte d und d^1 in einen einzigen Punkt D zusammenfallen, und ziehe die Linien aa^1, bb^1, cc^1, so werden sich diese drei Geraden in einem Punkte schneiden. Denn es sei S der Durchschnittspunkt der beiden ersten aa^1, bb^1; zieht man alsdann SD und Sc, dann sei γ der Punkt, in welchem Sc die Gerade $a^1b^1c^1$ trifft, so hat man nach dem angeführten Satz des Pappus:

$$\frac{ac}{aD} : \frac{bc}{bD} = \frac{a^1\gamma}{a^1D} : \frac{b^1\gamma}{b^1D}.$$

Wir nehmen aber an, dass die erste der Gleichungen (A) stattfindet: wenn man also in dieser D an die Stelle von d setzt und sie mit der gegenwärtigen vergleicht, so sieht man, dass der Punkt γ mit dem Punkt c^1 zusammenfallen muss. Es folgt also, dass die drei Geraden aa^1, bb^1, cc^1 durch denselben Punkt S gehen.

Wenn man die vier Geraden Saa^1, Sbb^1, Scc^1 und SD als solche betrachtet, die von den beiden Transversalen $abcD$ und $a^1b^1c^1D$ geschnitten werden, so ergiebt sich nach dem Satz des Pappus, dass die beiden letztern der Gleichungen (A) ebenfalls stattfinden.

Es bedingt mithin jede der drei Gleichungen (A) die beiden andern und man kann die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier sich entsprechenden

Punkten auf drei Arten ausdrücken, von denen jede die beiden andern bedingt.

Diese wichtige Eigenschaft der anharmonischen Function von vier Punkten hat mehre nützliche Anwendungen.

Man kann z. B. unmittelbar daraus schliessen, dass jede von den sieben Gleichungen, durch welche man die Beziehung der Involution von sechs Punkten ausdrückt, die sechs andern bedingt.

Die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten kann man auch durch eine Gleichung mit drei Termen ausdrücken, was sehr häufig von Nutzen ist. Man erhält ausser den Gleichungen (A) noch folgende drei:

$$(B) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{ac}{ad} : \dfrac{bc}{bd} + \dfrac{a^1b^1}{a^1d^1} : \dfrac{c^1b^1}{c^1d^1} = 1, \\ \dfrac{ac}{ab} : \dfrac{dc}{db} + \dfrac{a^1d^1}{a^1b^1} : \dfrac{c^1d^1}{c^1b^1} = 1, \\ \dfrac{ab}{ad} : \dfrac{cb}{cd} + \dfrac{a^1c^1}{a^1d^1} : \dfrac{b^1c^1}{b^1d^1} = 1. \end{cases}$$

Jede von diesen drei Gleichungen, welche die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von Punkten ausdrücken, bedingt die beiden andern und die drei ersten. Mit einem Wort, jede der sechs Gleichungen (A) und (B) bedingt die fünf übrigen.

Die Gleichungen (B) sind leicht zu beweisen. Die erste z. B. wird vermöge der dritten der Gleichungen (A):

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = 1;$$

man darf also nur die Richtigkeit dieser Gleichung nachweisen. Zu dem Ende bilden wir uns von der Geraden $abcd$ die Perspective auf einer andern Geraden in der Weise, dass der Punkt d in der Unendlichkeit liegt. Es seien α, β, γ die Perspective der Punkte a, b, c, so wird man, weil die anharmonische Function projectivisch ist, haben:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}, \text{ und } \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\beta};$$

die Gleichung wird also:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} + \frac{\alpha\beta}{\gamma\beta} = 1, \text{ oder } \beta\alpha + \alpha\gamma = \beta\gamma,$$

eine identische Gleichung zwischen den drei Punkten β, α, γ, wenn sie in der Ordnung auf einander folgen, wie wir sie geschrieben haben.

Die Richtigkeit der Gleichungen (*B*) ist also bewiesen.

Wenn man in der obigen Gleichung die Nenner wegschafft, so drückt sie eine allgemeine Relation zwischen irgend vier Punkten auf einer geraden Linie aus:

$$ab \,.\, cd - ac \,.\, bd + bc \,.\, ad = 0.$$

Diese Relation ist von Euler algebraisch und geometrisch bewiesen: auf die erste Weise, indem er für gewisse Factoren ihre Ausdrücke in Functionen der andern substituirte, so dass er eine identische Gleichung herausbrachte; und nach der zweiten Methode, indem er in der Figur sich die drei Rechtecke bildete, aus denen die Gleichung zusammengesetzt ist, wobei man leicht sieht, dass das eine von ihnen gleich der Summe der beiden andern ist. (*Novi Commentarii Petrop.*, tom. I, J. 1747 und 1748. *Variae demonstrationes Geometricae.*)

Poncelet hat auch dieselbe Relation in seinem *Memoire sur les centres de moyennes harmoniques* (*Journal* von Crelle, t. III, p. 269) bewiesen.

Der Kreis erfreut sich in Bezug auf vier Gerade, welche von einem Punkte ausgehen, einer ähnlichen Eigenschaft, als das System zweier geraden Transversalen, für welche sie in den Gleichungen (*A*) und (*B*) ausgedrückt ist. Diese Eigenschaft besteht in Folgendem:

Wenn vier gerade Linien, die von Einem Punkte ausgehen, die Peripherie eines Kreises treffen: die erste in a *und* a^1, *die zweite in* b *und* b^1, *die dritte in* c *und* c^1, *die vierte in* d *und* d^1; *so hat man folgende Relation:*

$$\frac{\sin.\, {}^1/_2\, ca}{\sin.\, {}^1/_2\, cb} : \frac{\sin.\, {}^1/_2\, da}{\sin.\, {}^1/_2\, db} = \frac{\sin.\, {}^1/_2\, c^1a^1}{\sin.\, {}^1/_2\, c^1b^1} : \frac{\sin.\, {}^1/_2\, d^1a^1}{\sin.\, {}^1/_2\, d^1b^1}.$$

Diese Gleichung ist analog der ersten der Gleichungen (*A*). Man wird ebenso Gleichungen erhalten, welche den beiden andern Gleichungen (*A*), und solche, welche den Gleichungen (*B*) ähnlich sind.

Diese Eigenschaft des Kreises giebt zu mehren neuen Sätzen Veranlassung.

Wir lenken die ganze Aufmerksamkeit der Geometer auf den Begriff des *anharmonischen* Verhältnisses, welches, obwohl sehr elementar, ausserordentlich nützlich sein kann bei einer Menge von geometrischen Speculationen, indem man dadurch die möglich leichtesten und einfachsten Beweise erhält. Wir werden davon in der Xten Note bei der Involution von sechs Punkten, und in der XVten und XVIten

Note Gebrauch machen, um die allgemeinsten Eigenschaften der Kegelschnitte fast nur durch einige Worte zu beweisen.

Diese Theorie wird in der körperlichen Geometrie von nicht geringerm Nutzen sein. Wir wollen uns z. B. vorsetzen, die doppelte Erzeugung eines Hyperboloids mit einem Fach durch eine Gerade nachzuweisen, was wir in folgender Weise aussprechen:

Die Oberfläche, welche durch eine an drei feste Gerade sich anlehnende Gerade erzeugt wird, kann noch auf eine zweite Art durch eine bewegliche Gerade gebildet werden, wenn diese sich an drei Positionen der ersten erzeugenden Geraden anlehnt, und diese Oberfläche besitzt die Eigenschaft, dass jede Ebene sie in einem Kegelschnitt schneidet.

Der erste Theil dieses Satzes beruht auf den beiden folgenden Lemmen, von denen das eine das reciproke des andern ist, und welche an und für sich als Theoreme ausgesprochen zu werden verdienen.

Theorem I. *Wenn sich von vier Geraden jede an drei willkührlich im Raum liegende feste Gerade anlehnt, so ist das anharmonische Verhältniss der Segmente, die auf einer dieser drei Geraden gebildet werden, gleich dem anharmonischen Verhältniss der Segmente, die auf einer der beiden andern gebildet werden.*

Sind also L, L^1, L^{11} die drei gegebenen Geraden im Raum; a, b, c, d die Punkte, in denen die an die erstern sich anlehnenden vier Geraden A, B, C, D die erste L treffen, und a^1, b^1, c^1, d^1 und a^{11}, b^{11}, c^{11}, d^{11} die Punkte, in denen dieselben vier Geraden die beiden andern L^1 und L^{11} treffen: so sag ich, dass das anharmonische Verhältniss der vier Punkte a, b, c, d gleich ist dem der vier Punkte a^1, b^1, c^1, d^1. In der That ist jedes von diesen beiden Verhältnissen dem der vier Ebenen gleich, welche zum gemeinsamen Durchschnitt die Linie L^{11} haben und welche respective durch die vier Geraden A, B, C, D gehen. Diese beiden Verhältnisse sind also unter einander gleich.

Theorem II. Umgekehrt: *Wenn vier Gerade sich an zwei feste Gerade im Raum so anlehnen, dass das anharmonische Verhältniss der Segmente, die auf einer von diesen Geraden gebildet werden, gleich ist dem anharmonischen Verhältnisse der Segmente, die auf der andern gebildet werden, so wird jede Gerade, die sich an drei von diesen vier Geraden anlehnt, auch nothwendig durch die vierte gehen.*

Denn es seien L und L^1 zwei Gerade im Raum, und A, B, C, D vier Gerade, welche die erste in den Punkten a, b, c, d und die zweite in den Punkten a^1, b^1, c^1, d^1 auf solche Art treffen, dass man hat:

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c^1a^1}{c^1b^1} : \frac{d^1a^1}{d^1b^1};$$

so muss man beweisen, dass die vier Geraden von der Beschaffenheit sind, dass irgend eine Gerade L^{11}, welche die ersten A, B, C trifft, auch nothwendig durch die vierte D gehen müsse. Zu dem Ende ziehen wir durch den Punkt d der Linie L eine Gerade D^1, welche die Linien L^1 und L^{11} schneidet; diese Schnittpunkte seien δ^1, δ^{11}. Da die vier Geraden A, B, C, D^1 die drei Linien L, L^1 und L^{11} schneiden, so hat man nach dem Theorem I:

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c^1a^1}{c^1b^1} : \frac{\delta^1a^1}{\delta^1b^1}.$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit der vorhergehenden ersieht man, dass der Punkt δ^1 mit dem Punkt d^1 zusammenfällt. Die Linie D^1 also, welche durch den Punkt d so gezogen wurde, dass sie die Linien L^1 und L^{11} schneidet, ist genau die Linie D. Mithin schneidet die Linie L^{11}, welche durch die Linien A, B, C geht, auch die vierte D. — Das Theorem ist also bewiesen.

Jetzt mögen L, L^1, L^{11} drei gerade Linien im Raum sein und A, B, C, D u. s. w. verschiedene Lagen einer beweglichen Geraden, welche sich an diese drei Linien anlehnt, so sag' ich, dass irgend eine Gerade M, welche die drei Linien A, B, C schneidet, auch nothwendig eine vierte D treffen muss. Denn nach dem Theorem I bilden die vier Linien A, B, C, D auf den beiden L und L^1 Segmente, deren anharmonische Verhältnisse gleich sind, also wird vermöge des Theorems II eine Gerade, welche die drei ersten schneidet, auch nothwendig die vierte treffen.

Wenn also eine bewegliche Gerade drei feste Gerade schneidet, so wird jede Gerade, welche durch drei Lagen der beweglichen Geraden geht, auch alle andern Lagen dieser Geraden treffen.

Dieses bildet den ersten Theil des ausgesprochenen Theorems.

Um den zweiten Theil zu beweisen, denken wir uns irgend eine Transversal-Ebene, welche die beiden Linien L und L^1 in den beiden Punkten λ und λ^1 und die vier Linien A, B, C, D in den vier Punkten α, β, γ, δ trifft.

Diese sechs Punkte liegen auf der Durchschnittscurve der Oberfläche mit der Ebene. Es handelt sich also darum, nachzuweisen, dass sie auf einem Kegelschnitt liegen. Dazu genügt aber, nach einer allgemeinen Eigenschaft der Kegelschnitte, welche wir in der Note XV beweisen werden, zu zeigen, dass die vier von den Punkten α, β, γ, δ nach λ gezogenen geraden Linien dasselbe anharmonische Verhältniss haben, als die vier Linien, welche von denselben vier Punkten nach λ^1 gezogen werden. Das anharmonische Verhältniss der vier Geraden $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$, $\lambda\delta$ ist aber dasselbe, als das der vier Ebenen, welche durch die Linie L gelegt werden und für welche diese Geraden die Durchschnittslinien mit der Transversal-Ebene sind; und dieses Verhältniss ist wieder dasselbe, als das der vier Punkte, in welchen die Geraden A, B, C, D, durch die diese Ebenen gehen, die Gerade L^1 schneiden. Ebenso ist das anharmonische Verhältniss der vier Geraden $\lambda^1\alpha$, $\lambda^1\beta$, $\lambda^1\gamma$, $\lambda^1\delta$ gleich dem der vier Punkte, in welchen dieselben Geraden A, B, C, D die Gerade L schneiden. Diese beiden anharmonischen Verhältnisse aber der Punkte, in welchen die Linien A, B, C, D die beiden L und L^1 treffen, sind unter einander gleich (Theorem I); also ist das anharmonische Verhältniss der vier Linien $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$, $\lambda\delta$ gleich dem der vier Linien $\lambda^1\alpha$, $\lambda^1\beta$, $\lambda^1\gamma$, $\lambda^1\delta$. Folglich liegen de sechs Punkte α, β, γ, δ, λ, λ^1 auf einem Kegelschnitt. Mithin ist der Schnitt der Oberfläche durch irgend eine Transversal-Ebene ein Kegelschnitt. *Q. E. D.*

Auf diese Weise ist das Theorem von der doppelten Erzeugung des Hyperboloids mit einem Fach durch eine Gerade vollständig bewiesen, und zwar durch ganz elementare geometrische Betrachtungen.

In der Analysis beweist man, dass die Geraden, welche durch einen Punkt im Raum parallel mit den Generatrices des Hyperboloids gezogen werden, einen *Kegel des zweiten Grades* bilden. Die Theorie des anharmonischen Verhältnisses liefert einen äusserst einfachen Beweis dieses Satzes. Es genügt dabei, auf den Schnitt eines Kegels durch eine Ebene das Raisonnement anzuwenden, das wir für den ebenen Schnitt des Hyperboloids gebraucht haben; man sieht, dass dieser Schnitt noch ein Kegelschnitt ist.

Corollar. — Das Theorem I, in Bezug auf das Hyperboloid betrachtet, drückt folgende Eigenschaft dieser Oberfläche aus:

Vier Generatrices derselben Art der Erzeugung eines Hyperboloids mit einem Fach bilden auf irgend einer Generatrix der zweiten Art der Erzeugung vier Seg-

mente, deren anharmonisches Verhältniss einen constanten Werth hat; welches auch die Lage dieser Generatrix der zweiten Art der Erzeugung sein mag.

Es seien also *a, b, c, d* die vier Punkte, in denen die vier Generatrices der ersten Erzeugungsart *A, B, C, D* eine Generatrix *L* der zweiten Erzeugungsart treffen; und a^1, b^1, c^1, d^1 die Punkte, in denen sie eine zweite Generatrix L^1 der zweiten Erzeugungsart treffen, so hat man:

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c^1a^1}{c^1b^1} : \frac{d^1a^1}{d^1b^1}.$$

Diese Gleichung lässt sich unter folgende Form bringen:

$$\frac{ca}{cb} = \frac{c^1a^1}{c^1b^1} \times \left(\frac{da}{db} : \frac{d^1a^1}{d^1b^1}\right),$$

oder

$$\frac{ca}{cb} = \frac{c^1a^1}{c^1b^1} \times \text{Const.},$$

wodurch Folgendes ausgedrückt wird: *Wenn man ein Viereck* abb^1a^1 *hat und man theilt seine gegenüberligenden Seiten* ab, a^1b^1 *in den Punkten* c *und* c^1 *so, dass man*

$$\frac{ca}{cb} = \frac{c^1a^1}{c^1b^1} \,.\, \text{Const.}$$

hat, so erzeugt die Gerade cc^1 *ein Hyperboloid mit einem Fach.*

Wir haben diese Eigenschaft des Hyperboloids, welche bisher zur Darlegung der doppelten Erzeugung dieser Oberfläche durch eine Gerade gedient hat, auf eine andre Weise bewiesen. (*Correspondance sur l'école polytechnique*, t. II, p. 446.)

Note X.

(Erste Epoche, §. 34.)

Theorie der Involution von sechs Punkten.

1. Wir theilen diese Note in zwei Theile. In dem ersten wollen wir die bekannten Eigenschaften der Involution von sechs Punkten auseinandersetzen, in dem zweiten wollen wir verschiedene andre neue Arten, diese Involution auszudrücken, angeben, welche uns diese Theorie vereinfachen und ihre Anwendungen erweitern zu können scheinen.

Erster Theil.

2. Wenn sechs Punkte in gerader Linie liegen und je zwei unter ihnen sich entsprechende, wie A und A^1, B und B^1, C und C^1, solche Segmente bilden, dass man die Relation

$$(A) \ldots\ldots\ldots \frac{CA \,.\, CA^1}{CB \,.\, CB^1} = \frac{C^1A \,.\, C^1A^1}{C^1B \,.\, C^1B^1}$$

hat, so sagt man: diese Punkte sind in *Involution*, und die sich entsprechenden Punkte werden *conjugirte* genannt.

3. Die sechs Punkte besitzen zwei Gattungen von Eigenschaften, von denen wir die einen *arithmetische* nennen, weil sie sich nur auf die Relationen zwischen den Segmenten beziehen, indem man sie auf verschiedene Art zwischen diesen Punkten wählt; und die andern *geometrische*, weil sie sich auf gewisse Figuren beziehen, welche man durch die in Rede stehenden sechs Punkte durchgehen lassen kann, oder bei denen sich die Involution von sechs Punkten darbietet.

Arithmetische Eigenschaften.

4. Die vorhergehende Gleichung gestattet noch folgende beide:

$$(A) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{BA \,.\, BA^1}{BC \,.\, BC^1} = \dfrac{B^1A \,.\, B^1A^1}{B^1C \,.\, B^1C^1}, \\[2ex] \dfrac{AB \,.\, AB^1}{AC \,.\, AC^1} = \dfrac{A^1B \,.\, A^1B^1}{A^1C \,.\, A^1C^1}, \end{cases}$$

Jede von diesen drei Gleichungen (A) bedingt die beiden andern.

5. Die Eigenschaft von sechs Punkten, dass sie in Involution sind, kann durch eine Gleichung zwischen nur sechs Segmenten, die von diesen Punkten gebildet werden, ausgedrückt werden:

$$(B) \ldots\ldots \begin{cases} AB^1 \,.\, BC^1 \,.\, CA^1 = AC^1 \,.\, CB^1 \,.\, BA^1 \\ \text{oder } AB^1 \,.\, BC \,.\, C^1A^1 = AC \,.\, C^1B^1 \,.\, BA^1 \\ \text{oder } AB \,.\, B^1C^1 \,.\, CA^1 = AC^1 \,.\, CB \,.\, B^1A^1 \\ \text{oder } AB \,.\, B^1C \,.\, C^1A^1 = AC \,.\, C^1B \,.\, B^1A^1. \end{cases}$$

Jede von diesen vier Gleichungen (B) drückt die *Involution* von sechs Punkten aus und ist genügend, dass auch die andern drei stattfinden.

6. Die Gleichungen (B) lassen sich aus den Gleichungen (A) leicht auf dem Wege der Multiplication ableiten; und umgekehrt, diese leiten sich auch leicht aus den Gleichungen (B) ab. Weil aber jede dieser sieben Gleichungen die Involution von sechs Punkten bedingt, so muss man auch aus irgend einer von ihnen die übrigen derselben Gruppe deduciren können, d. h. aus einer der drei Gleichungen (A) muss man die beiden andern, und aus einer der vier Gleichungen (B) die drei andern erhalten können. Dieses kann man in der That vermöge des Calculs bewerkstelligen, indem man die verschiedenen Segmente der vorgelegten Gleichung in andre transformirt, welche für den gesuchten Beweis passend sind. Diese Art der Verification *a posteriori* ist aber weitläuftig, verlangt ein Herumsuchen und ist keineswegs elegant.

Auch bedient man sich zum Nachweis, dass Eine der sieben Gleichungen (A) und (B) die übrigen mit einschliesse, einer geometrichen Eigenschaft der sechs Punkte, dass man nämlich durch diese sechs Punkte die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks gehen lassen kann. Auf diese Weise machten es Brianchon und Poncelet.

Wir haben gefunden, dass der Begriff des *anharmonischen Verhältnisses* von vier Punkten einen noch einfachern und directern Beweis liefert und zu vielen andern Relationen führt, welche so wie die Gleichungen (A) und (B) ihren Nutzen haben. Wir werden über diesen Gegenstand im zweiten Theil dieser Note handeln.

7. Die Gleichungen (A), zwischen acht Segmenten, sind leicht zu bilden. Die Natur der Relationen (B), in welche nur sechs Elemente eingehen, scheint für den ersten Augenblick nicht eben so leicht zu erkennen und auszudrücken. Von folgender Regel jedoch glauben wir, dass man sie mit Leichtigkeit im Gedächtniss behalten kann.

Man nehme drei Punkte A, B, C, welche zu drei Paaren gehören, jeder bildet mit den conjugirten der beiden andern zwei Segmente; man erhält also sechs Segmente: *das Produkt aus drei dieser Segmente, welche keinen Endpunkt gemein haben, ist gleich dem Product der drei andern.*

8. Betrachten wir ein viertes System von zwei Punkten D und D^1, und nehmen wir an, dass diese eine Involution mit den vier Punkten A, A^1 und B, B^1 bilden, so hat man die Gleichung:

$$\frac{AB \,.\, AB^1}{AD \,.\, AD^1} = \frac{A^1B \,.\, A^1B^1}{A^1D \,.\, A^1D^1};$$

wenn man diese Gleichung mit der dritten der Gleichungen (A) vergleicht, so folgt:

$$\frac{AC \,.\, AC^1}{AD \,.\, AD^1} = \frac{A^1C \,.\, A^1C^1}{A^1D \,.\, A^1D^1},$$

wodurch erwiesen ist, dass die sechs Punkte A, A^1, C, C^1 und D, D^1 in Involution sind.

Es folgt daraus diese allgemeine Eigenschaft der Involution von sechs Punkten:

Wenn man auf einer geraden Linie mehre solche Systeme von zwei Punkten hat, dass die beiden ersten Systeme mit jedem der andern eine Involution bilden, so bilden auch irgend welche drei von diesen Systemen unter einander eine Involution.

Dieses Theorem führt mehre Folgerungen mit sich, welche in der Theorie der Involution von grosser Wichtigkeit sind.

9. Das Folgende z. B. wird nützliche Anwendungen zulassen:

Wenn man auf einer geraden Linie vier Systeme von zwei Punkten hat, welche je drei und drei eine Involution bilden, so ist das anharmonische Verhältniss von vier Punkten, die respective den vier Systemen angehören, gleich dem der vier andern Punkte.

Wenn also A und A^1, B und B^1, C und C^1, D und D^1 die vier Systeme sind, so wird man haben:

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A^1C^1}{A^1D^1} : \frac{B^1C^1}{B^1D^1}.$$

Denn da die drei ersten Systeme eine Involution bilden, so ist (nach den Gleichungen B)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A^1C^1}{B^1C^1} \,.\, \frac{AB^1}{A^1B};$$

und da die drei Systeme A und A^1, B und B^1, D und D^1 ebenfalls eine Involution bilden, so ist:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{A^1D^1}{B^1D^1} \cdot \frac{AB^1}{A^1B};$$

wenn man die entsprechenden Glieder dieser beiden Gleichungen durch einander dividirt, so erhält man das, was man beweisen will.

10. Wir wollen noch einige besondre Fälle der Involution von sechs Punkten untersuchen.

Wenn man annimmt, dass die beiden Punkte C und C^1 in Einen zusammenfallen, den wir E nennen wollen, so reduciren sich die Gleichungen (A) und (B) auf folgende vier:

$$\frac{AB.AB^1}{A^1B.A^1B^1} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{A^1E}^2},$$

$$\frac{BA.BA^1}{B^1A.B^1A^1} = \frac{\overline{BE}^2}{\overline{B^1E}^2},$$

$$\frac{EA.EB}{EA^1.EB^1} = \frac{AB}{A^1B^1},$$

$$\frac{EA.EB^1}{EA^1.EB} = \frac{AB^1}{A^1B}.$$

Jede von diesen vier Gleichungen bedingt die drei andern.

Desargues, welcher diesen Fall untersuchte, nannte ihn die *Involution* von fünf Punkten. — Wir nennen den Punkt E einen *doppelten* Punkt.

11. Nehmen wir nun an, dass der Punkt C^1 in der Unendlichkeit liegt und ersetzen wir seinen conjugirten C durch O, so gehen die Gleichungen (A) und (B) in folgende über:

$$OA.OA^1 = OB.OB^1,$$

$$\frac{BA.BA^1}{B^1A.B^1A^1} = \frac{BO}{B^1O},$$

$$\frac{AB.AB^1}{A^1B.A^1B^1} = \frac{AO}{A^1O},$$

$$\frac{AB^1}{A^1B} = \frac{OB^1}{OA^1},$$

$$\frac{AB^1}{A^1B} = \frac{OA}{OB},$$

$$\frac{AB}{A^1B} = \frac{OB}{OA^1},$$

$$\frac{AB}{AB^1} = \frac{OA}{OB^1}.$$

Jede von diesen Gleichungen bedingt die andern und bildet für sich allein die Involution der fünf Punkte A, A^1, B, B^1 und O. Die charakteristische Eigenschaft des Punktes O ist die, dass sein conjugirter in der Unendlichkeit liegt. Wir nennen ihn den *Centralpunkt* der beiden Systeme A, A^1 und B, B^1.

Die Lage dieses Centralpunkts ist durch jede der vorhergehenden sieben Gleichungen bestimmt. Die erste drückt aus, dass *das Produkt der Entfernungen dieses Punkts von den beiden ersten conjugirten Punkten gleich ist dem Produkt seiner Entfernungen von den beiden andern conjugirten Punkten.* Diese Relation führt uns zu einer merkwürdigen Relation der Involution von sechs Punkten.

12. Es seien A, A^1, B, B^1 und C, C^1 diese sechs Punkte, und es sei O der Centralpunkt der vier ersten, so dass man hat $OA \,.\, OA^1 = OB \,.\, OB^1$. Nennen wir für den Augenblick O^1 seinen conjugirten Punkt, welcher in der Unendlichkeit liegt, so bilden die sechs Punkte A, A^1, B, B^1, O, O^1 eine Involution. Es folgt also aus dem Theorem (8), dass die beiden Systeme C, C^1 und O, O^1 und irgend eines von den beiden andern, das erste A, A^1 zum Beispiel, eine Involution bilden, d. h. dass der Punkt O Centralpunkt der beiden Systeme A, A^1 und C, C^1 ist. Man hat also $OA \,.\, OA^1 = OC \,.\, OC^1$; man hatte aber schon $OA \,.\, OA^1 = OB \,.\, OB^1$, woraus folgendes allgemeine Theorem folgt:

Wenn drei Systeme von zwei Punkten eine Involution bilden, so giebt es immer einen gewissen Punkt von der Art, dass das Product seiner Entfernungen von den beiden Punkten jedes Systems constant ist.

Umgekehrt: *Wenn man auf einer Transversale, von einem festen Punkte* O *ausgehend, zwei solche Punkte nimmt, dass das Produkt ihrer Entfernungen von dem Punkte* O *einer constanten Quantität gleich ist, so werden drei Systeme von zwei auf diese Weise bestimmten Punkten in Involution sein.*

Wenn die beiden ersten Punkte auf derselben Seite von O genommen sind, so muss dasselbe für die beiden Punkte jedes der beiden andern Systeme stattfinden, damit die Produkte dasselbe Zeichen erhalten. Ein Gleiches gilt, wenn die beiden ersten Punkte auf verschiedenen Seiten des Punktes O liegen.

13. Das vorhergehende Theorem, welches, wie ich glaube, noch nicht hinlänglich die Aufmerksamkeit derer

die über diesen Gegenstand geschrieben, auf sich gezogen hat, scheint mir für die Involution von sechs Punkten die einfachste und zugleich die Eigenschaft zu sein, an welcher sich die Involution am häufigsten bei den geometrischen Speculationen zeigt.

Wir wollen sagen, dass der Punkt *O*, bei der Involution von sechs Punkten betrachtet, der *Centralpunkt* der Involution sei.

14. Dieser Centralpunkt führt ganz natürlich auf die *doppelten* Punkte, von denen wir gesprochen haben, und zeigt, dass diese Punkte imaginär werden können. Denn es seien A, A^1, B, B^1 die vier ersten Punkte einer Involution, so werden sie hinreichen, ihren Centralpunkt O zu bestimmen. Wenn die beiden Punkte A, A^1 auf derselben Seite von O liegen, so wird dasselbe von den beiden Punkten B, B^1 und von den beiden andern Punkten C, C^1 gelten, welche zur Vervollständigung der Involution dienen sollen. Man kann annehmen, dass diese beiden letzten Punkte in einen einzigen zusammenfallen, welchen wir E nennen, und man wird zur Bestimmung dieses Punkts die Gleichung haben:

$$\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OA}^1 = \mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OB}^1 = \overline{\mathrm{OE}}^2.$$

Dieser Punkt E kann willkührlich auf der einen oder der andern Seite des Punktes O gewählt werden, so dass es also zwei solche Punkte E giebt. Wenn daher die vier ersten Punkte A, A^1 und B, B^1 gegeben sind, so wird die Involution auf zwei Arten durch einen fünften Punkt completirt werden können, welcher als ein doppelter betrachtet werden wird.

Wenn man aber annimmt, dass die beiden ersten Punkte A, A^1 auf verschiedenen Seiten von O liegen, so wird es ebenso mit den beiden B, B^1 sein und mit den beiden C, C^1, welche die Involution completiren müssen; diese beiden letzten können also nie zusammenfallen. Für diesen Fall giebt es daher keine doppelten Punkte; die Analysis würde für ihre Construction einen imaginären Ausdruck geben.

15. Es seien sechs Punkte A, A^1; B, B^1; C, C^1 in Involution. Die beiden ersten mögen auf einerlei Seite von dem Centralpunkt O liegen, so wird man zu beiden Seiten dieses Punkts zwei solche Punkte E und F annehmen können, dass

$$\overline{\mathrm{OE}}^2 = \overline{\mathrm{OF}}^2 = \mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OA}^1.$$

Diese doppelte Gleichung drückt aus, dass die beiden Punkte E und F conjugirte harmonische Punkte in Bezug auf die beiden ersten A und A^1 sind.

Man hat aber auch:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = OB.OB^1;$$

die beiden Punkte E und F sind also auch conjugirte harmonische in Bezug auf die beiden Punkte B und B^1 und ebenso für die andern C, C^1. Woraus diese schon bekannte Eigenschaft der Involution von sechs Punkten folgt, dass *es zwei Punkte giebt, welche die conjugirten harmonischen zu den beiden Punkten jedes der drei Systeme der Involution sind.* Diese beiden Punkte liegen zu beiden Seiten und in gleicher Entfernung von dem Centralpunkt der Involution. Diese Punkte können jedoch imaginär werden.

16. Es ist leicht zu sehen: wenn die Punkte B, B^1 auf dem Segment AA^1 oder ganz ausserhalb dieses Segments liegen, so werden die Punkte E, F reell sein; wenn dagegen der eine der beiden Punkte B, B^1 auf dem Segment AA^1 selbst, der andre auf seiner Verlängerung liegt, so werden die beiden in Rede stehenden Punkte imaginär sein. Denn im ersten Fall wird der Punkt O, welcher stets reell ist, offenbar ausserhalb der beiden Segmente AA^1 und BB^1 liegen müssen, damit die Gleichung $OA.OA^1 = OB.OB^1$ stattfinden könne; d. h. die beiden Punkte A, A^1 werden auf einerlei Seite des Punktes O liegen und die beiden Punkte E und F werden also reell sein. Im zweiten Fall wird der Punkt O auf dem Stücke liegen, welches den beiden Segmenten AA^1, BB^1 gemeinschaftlich ist, und die beiden Punkte A, A^1 werden auf verschiedenen Seiten in Bezug auf den Punkt O liegen, deshalb müssen die beiden Punkte E und F imaginär sein.[31])

17. Die beiden Punkte E und F erfreuen sich noch einer andern charakterischen Eigenschaft, welche von Apollonius in seinem Werke *De sectione determinata* bewiesen, wie wir es aus den Sätzen 61, 62 und 64 im siebenten Buch der *Collectiones mathematicae* von Pappus ersehen; dass nämlich das Verhältniss

$$\frac{EA.EA^1}{EB.EB^1} \left(\text{oder } \frac{FA.FA^1}{FB.FB^1}\right)$$

---

31) Poncelet hat die Untersuchung über die beiden Punkte E und F auf eine andre Art angestellt, indem er sich der geometrischen Construction zur Bestimmung dieser beiden Punkte bedient. (*Traité des propriétés projectives*, p. 201.)

ein *maximum* oder *minimum* ist; d. h. wenn man irgend einen andern Punkt *m* wählt, so erreicht das Verhältniss

$$\frac{mA \cdot mA^1}{mB \cdot mB^1}$$

sein *maximum* oder *minimum*, wenn der Punkt *m* mit einem der beiden Punkte *E*, *F* zusammenfällt, welche conjugirte harmonische Punkte sind in Bezug auf die beiden A, A^1 und in Bezug auf die beiden B, B^1.

18. Zwei Systeme von Punkten A, A^1 und B, B^1 und ihr Centralpunkt *O* besitzen folgende Eigenschaft, welche von Pappus (Sätze 45, 46, ... und 56 des 7ten Buchs seiner *Collect. mathem.*) bewiesen ist:

Wenn man auf einer Geraden AB oder auf ihrer Verlängerung irgend einen Punkt m *wählt, so hat man immer diese Relation:*

$$mA \cdot mA^1 - mB \cdot mB^1 = (AB + A^1B^1) \cdot mO.$$

Wenn man die Mitten der beiden Segmente AA^1 und BB^1 durch α und β bezeichnet, so nimmt diese Relation folgende Form an:

$$mA \cdot mA^1 - mB \cdot mB^1 = 2 \cdot \alpha\beta \cdot mO.$$

19. Wenn man annimmt, dass der Punkt *m* successive mit A, A^1, B, B^1 zusammenfällt, so erhält man die besondern Relationen zwischen den fünf Punkten A, A^1, B, B^1 und *O*, welche auch von Pappus bewiesen sind in den Sätzen 41, 42 und 43.

Geometrische Eigenschaften.

20. Die älteste geometrische Eigenschaft der Involution von sechs Punkten findet sich im Pappus (Satz 130 im 7ten Buch), wo man sieht: wenn die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks durch irgend eine Diagonale in sechs Punkten A, A^1, B, B^1, C, C^1 getroffen werden, von denen die beiden ersten auf zwei gegenüberliegenden Seiten, die beiden folgenden auf den beiden andern gegenüberliegenden Seiten und die beiden letzten auf den beiden Diagonalen liegen, so hat man zwischen den Segmenten, die durch diese Punkte gebildet werden, die Gleichungen (*B*).

Aus diesem Satz folgt offenbar umgekehrt: wenn eine der Gleichungen (*B*) stattfindet, so kann man durch die sechs Punkte die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks legen; und nach dem Satz des Pappus schliesst man alsdann, dass die drei andern Gleichungen (*B*), kraft

der ersten, ebenfalls stattfinden. Auf diese Art beweist man vermittelst des geometrischen Satzes des Pappus diese arithmetische Eigenschaft der Involution von sechs Punkten, dass irgend eine der Gleichungen (*B*) die andern drei bedingt. Und da man durch die Combination dieser Gleichungen unter einander unmittelbar die Gleichungen (*A*) ableitet, so findet sich auch durch den einzigen Satz des Pappus bewiesen, dass die sechs Punkte, in denen eine willkührlich in der Ebene eines Vierecks gezogene Transversale die vier Seiten und die beiden Diagonalen desselben trifft, unter sich die Relationen haben, welche durch die Gleichungen (*A*) ausgedrückt werden.

Der Beweis des Theorems von Pappus ist leicht; aber dadurch, dass die Relation der Involution eine projectivische ist, kann man diesen Beweis vereinfachen, wenn man das Viereck so projicirt, dass es ein Parallelogramm wird. Auf diese Art hat Brianchon dieses Theorem in seinem Memoire über die Linien des zweiten Grades bewiesen.

22. Es scheint nicht, dass Pappus die Relationen (*A*), welche acht Segmente enthalten, gekannt habe. Denn unter seinen Sätzen über das Viereck, welches von einer Transversale geschnitten ist, finden wir nur einen, der sich auf diese Relationen bezieht; und dieses ist ein besondrer Fall. Die Transversale ist durch den Durchschnittspunkt zweier gegenüberliegenden Seiten, parallel mit einer Diagonale gezogen (Satz 133). Die beiden Sätze, welche diesem vorausgehen, könnten auch als besondre Fälle der Relationen (*A*) betrachtet werden; da sie aber unmittelbar auf den Satz 130 folgen, von dem sie auch besondre Fälle sind, so müssen wir sie auf diesen beziehen und sie als Corollarien der Relationen (*B*) betrachten, welche dieser Satz 130 ausdrückt.

23. Die Relationen (*A*) scheinen nicht über Desargues hinauszugehen. Unter ihrer Form charakterisirte dieser Geometer die Involution von sechs Punkten, bei Gelegenheit des folgenden schönen Theorems, welches in der neuern Geometrie so ausserordentlich fruchbar geworden ist:

Wenn ein Viereck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so sind die Punkte, in denen irgend eine Transversale den Kegelschnitt und die vier Seiten des Vierecks trifft, in Involution.

Es ist ausserordentlich leicht, dieses Theorem durch einfache geometrische Betrachtungen zu beweisen. [32])

---

32) S. Note XV.

24. Man schliesst daraus successive auf die beiden folgenden allgemeineren:

Wenn zwei Kegelschnitte einem Viereck umgeschrieben sind, und man zieht irgend eine Transversale, welche diese Curven in vier Punkten und zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks in zwei andern Punkten schneidet, so werden diese sechs Punkte in Involution sein.

Wenn drei Kegelschnitte einem Viereck umgeschrieben sind, so werden sie von irgend einer Transversale in sechs Punkten geschnitten, die in Involution sind.

Diese beiden Theoreme sind, wie man sieht, eine Verallgemeinerung des von Desargues, welches sich daraus als Corollar folgern lässt. Sturm hat sie zuerst analytisch bewiesen. 33)

25. Das erste kann zum Beweis verschiedener Eigenschaften der Involution von sechs Punkten dienen, welche wir *arithmetische* genannt haben. Zu dem Ende betrachtet man verschiedene andre Kegelschnitte, welche durch dieselben Punkte gehen, als die drei ersten, indem jeder von ihnen durch eine fünfte Bedingung bestimmt sein kann. Wenn man verlangt, dass einer dieser Kegelschnitte von der Transversale tangirt wird, so wird man die *doppelten Punkte* finden; wenn man will, dass der eine Kegelschnitt eine Asymptote parallel mit der Transversale hat, so findet man den *Centralpunkt*; u. s. w.

26. Eine sehr wichtige Eigenschaft der Involution von sechs Punkten ist diese:

Wenn man von einem willkührlich gewählten Punkt gerade Linien nach diesen sechs Punkten zieht, so werden die Involutions-Relationen (A) *und* (B), *welche für die Segmente zwischen diesen Punkten gelten, auch unter den Sinussen der diesen Segmenten gegenüberliegenden, zwischen den sechs Geraden enthaltenen Winkel stattfinden.*

Man beweist diesen Satz gewöhnlich dadurch, dass man die Segmente als Functionen der Sinusse der Winkel betrachtet. Aber die Theorie des anharmonischen Verhältnisses zwischen vier Punkten liefert uns einen einfachern Beweis. Denn es reicht die Bemerkung hin, dass jede der Involutions-Relationen (*A*) und (*B*) eine Gleichheit zweier anharmonischen Verhältnisse ist (wie wir es im zweiten Theile dieser Note zeigen werden). Diese Verhältnisse behalten denselben

---

33) *Annales des Mathématiques*, tom. XVII, p. 180.

Werth, wenn man in ihnen statt der Segmente die Sinusse der Winkel substituirt, welche zu diesen Segmenten gehören; folglich findet die Involutions-Relation zwischen den Sinussen der Winkel statt, welche die sechs Geraden unter einander bilden.

Umgekehrt, wenn eine solche Relation zwischen den Sinussen der Winkel stattfindet, welche sechs von Einem Punkte ausgehende gerade Linien unter einander bilden, so schneidet irgend eine Transversale diese sechs Linien in sechs Punkten, die in Involution sind. — Man sagt, dass diese sechs Geraden einen *Linienbüschel in Involution* (*faisceau en involution*) bilden.

27. Von dieser Beschaffenheit sind die sechs Tangenten, welche von Einem an drei in ein Viereck eingeschriebene Kegelschnitte gezogen werden.

28. Man kann die Gerade, welche zwei gegenüberliegende Scheitel des Vierecks verbindet, als den einen der Kegelschnitte betrachten, dessen eine Axe Null geworden ist; als einen zweiten, die Gerade, welche die beiden andern Scheitel verbindet; und endlich als einen dritten Kegelschnitt die Gerade, welche die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten verbindet. Und man folgert dann aus dem angeführten allgemeinen Theorem mehre Corollarien, von denen eines das folgende Theorem ist:

Die sechs Geraden, welche von Einem Punkt nach den vier Scheiteln und den beiden Durchschnittspunkten der gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks gezogen werden, bilden einen Linienbüschel in Involution; so dass also jede Transversale diese sechs Linien in sechs Punkten trifft, die in Involution sind.

29. Wir finden im Pappus nur einen Satz, welcher sich an dieses Theorem anschliessen könnte; das ist der 135ste im 7ten Buch. Man muss darin zwei Seiten des Vierecks unter einander parallel annehmen und die Transversale ebenfalls mit diesen parallel und gehend durch den Durchschnittspunkt der beiden andern Seiten.

30. Von der Relation der Involution scheint es uns, dass sie sich häufig bei mehren geometrischen Theorien, besonders bei der der Kegelschnitte, darbieten müsse. Man hat sie jedoch fast nur bei dem System von drei Kegelschnitten betrachtet, welche einem Viereck ein- oder umgeschrieben sind, und bei den besondern Fällen eines solchen Systems.

Wir werden am Ende des zweiten Theils dieser Note zeigen, dass diese Relation unter vielen andern Umständen vorkommen kann.

Zweiter Theil.

31. Die Eigenschaften der Involution von sechs Punkten, welche wir so eben im ersten Theil dieser Note auseinandergesetzt haben, sind, wie ich glaube, die einzigen bekannten, und sogar weiss ich nicht, ob das Vorhandensein des *Centralpunkts* und die wichtige Rolle, welche er in dieser Theorie spielt, ausdrücklich bemerkt sind. Aber die Involution von sechs Punkten erfreut sich noch mehrer andrer Eigenschaften und kann unter andern Gestalten ausgedrückt werden, welche von den Gleichungen (A) und (B) verschieden sind und bei vielen geometrischen Untersuchungen von Nutzen sein können.

Die wichtigste Eigenschaft dieser Relation der Involution, die, welche uns die Quelle aller andern zu sein scheint, beruht auf dem Begriff des *anharmonischen* Verhältnisses. Diese Haupteigenschaft erlaubt uns selbst eine neue Definition für die Involution von sechs Punkten zu geben, eine Definition, welche die beiden Arten von Gleichungen (A) und (B) zu gleicher Zeit umfasst und welche auf ganz natürlichem Wege zu den verschiedenen andern Ausdrücken der Involution von sechs Punkten führt.

32. Wir werden sagen: *Sechs Punkte, von denen je zwei und zwei conjugirte sind, sind in Involution, wenn das anharmonische Verhältniss von vier unter ihnen gleich dem ihrer conjugirten ist.*

So sind die sechs Punkte A, B, C, A^1, B^1, C^1, von denen die drei A^1, B^1, C^1 respective die conjugirten der drei ersten sind, in Involution, wenn das anharmonische Verhältniss der vier Punkte A, B, C und C^1 gleich ist dem anharmonischen Verhältniss ihrer conjugirten A^1, B^1, C^1 und C, d. h. wenn eine der drei folgenden Gleichungen stattfindet:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{C^1A}{C^1B} = \frac{C^1A^1}{C^1B^1} : \frac{CA^1}{CB^1},$$

$$\frac{CA}{CC^1} : \frac{BA}{BC^1} = \frac{C^1A^1}{C^1C} : \frac{B^1A^1}{B^1C},$$

$$\frac{CB}{CC^1} : \frac{AB}{AC^1} = \frac{C^1B^1}{C^1C} : \frac{A^1B^1}{A^1C};$$

oder:

$$\frac{CA . CA^1}{CB . CB^1} = \frac{C^1A^1 . C^1A}{C^1B^1 . C^1B}.$$

$$CA . A^1B^1 . BC^1 = C^1A^1 . AB . B^1C,$$

$$CB . B^1A^1 . AC^1 = C^1B^1 . BA . A^1C.$$

Man sieht, dass eine von den drei Gleichungen die beiden andern bedingt, weil jede von ihnen ausdrückt, dass das anharmonische Verhältniss der vier Punkte A, B, C und C^1 gleich ist dem der vier Punkte A^1, B^1, C^1 und C, welche einzeln den vier ersten correspondiren.

Unsre Definition der Involution von sechs Punkten liefert also drei Gleichungen, von denen eine jede die beiden andern bedingt und genügend ist, um die Involution auszudrücken.

33. Es ist leicht einzusehen, dass jede dieser drei Relationen vier andre in sich schliesst, welche mit den drei ersten die Gleichungen (A) und (B) vollständig machen. In der That kann z. B. die Gleichung

$$CA . A^1B^1 . BC^1 = C^1A^1 . AB . B^1C$$

auf drei Arten in die Form einer Gleichheit zweier anharmonischen Verhältnisse gebracht werden, wovon die erste die zweite Gleichung der obigen Gruppe ist, und die beiden andern folgende zwei Gleichungen sind:

$$\frac{CA}{CB^1} : \frac{BA}{BB^1} = \frac{C^1A^1}{C^1B} : \frac{B^1A^1}{B^1B},$$

$$\frac{CA}{CB^1} : \frac{A^1A}{A^1B^1} = \frac{C^1A^1}{C^1B} : \frac{AA^1}{AB}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt, dass das anharmonische Verhältniss der vier Punkte A, B, C, B^1 gleich ist dem der vier correspondirenden Punkte A^1, B^1, C^1, B; weshalb man noch diese beiden Gleichungen hat:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{B^1A}{B^1B} = \frac{C^1A^1}{C^1B^1} : \frac{BA^1}{BB^1},$$

$$\frac{CB}{CB^1} : \frac{AB}{AB^1} = \frac{C^1B^1}{C^1B} : \frac{A^1B^1}{A^1B},$$

oder

$$CA . A^1B . B^1C^1 = C^1A^1 . AB^1 . BC,$$

$$\frac{BA . BA^1}{BC . BC^1} = \frac{B^1A . B^1A^1}{B^1C . B^1C^1}.$$

Ebenso zeigt die zweite jener beiden Gleichungen, dass das anharmonische Verhältniss der vier Punkte A, B^1, C, A^1 gleich ist dem der vier correspondirenden Punkte A^1, B, C^1, A; wodurch man folgende zwei Gleichungen erhält:

$$\frac{CA}{CA^1} : \frac{B^1A}{B^1A^1} = \frac{C^1A^1}{C^1A} : \frac{BA^1}{BA},$$

$$\frac{CB^1}{CA^1} : \frac{AB^1}{AA^1} = \frac{C^1B}{C^1A} : \frac{A^1B}{A^1A};$$

oder

$$\frac{AC.AC^1}{AB.AB^1} = \frac{A^1C^1.A^1C}{A^1B^1.A^1B},$$

$$CB^1.BA^1.AC^1 = C^1B.B^1A.A^1C.$$

Es ergeben sich also die Gleichungen (A) und (B) aus der Definition, welche wir für die Involution von sechs Punkten gegeben haben.

34. Wir haben gesehen, dass die Gleichung

$$CA.A^1B^1.BC^1 = C^1A^1.AB.B^1C$$

zu gleicher Zeit drei Gleichheiten von anharmonischen Verhältnissen ausdrückt: nämlich zwischen den vier Punkten A, B, C, C^1 und ihren correspondirenden A^1, B^1, C^1, C; zwischen den vier Punkten A, B, C, B^1 und ihren correspondirenden; und endlich zwischen den vier Punkten A, B^1, C, A^1 und ihren correspondirenden.

Jede der andern Gleichungen (B) drückt ebenfalls eine Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zwischen drei verschiedenen Paaren der vier Punkte aus, und man erkennt auch, dass jede der Gleichungen (A) eine Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zwischen zwei Paaren der vier Punkte ausdrückt. Man schliesst hieraus: *wenn die sechs Punkte* A *und* A^1, B *und* B^1, C *und* C^1 *in Involution sind, so ist das anharmoniscche Verhältniss von irgend welchen vier unter ihnen, von denen drei den drei Systemen angehören, gleich dem anharmonischen Verhältniss der correspondirenden Punkte.*

35. Wir sagten, dass die drei von den vier ersten Punkten den drei Systemen angehören müssten; denn sonst würden zwei von den sechs Punkten nicht in die aus den beiden anharmonischen Verhältnissen entstehende Gleichung eingehen. Wenn z. B. A, B, A^1, B^1 die vier ersten Punkte wären, so würden ihre correspondirenden A^1, B^1, A, B sein, und indem man das anharmonische Verhältniss der vier

ersten gleich dem der vier andern setzte, hätte man nicht eine Relation zwischen den sechs gegebenen Punkten, weil C und C^1 nicht mit darin enthalten sind. Aber die resultirende Gleichung würde eine identische sein. Wir können daher ganz allgemein das folgende Theorem aussprechen:

Wenn sechs Punkte, von denen sich je zwei und zwei correspondiren, in Involution sind, so ist das anharmonische Verhältniss von irgend welchen vier unter ihnen gleich dem anharmonischen Verhältniss der vier ihnen respective correspondirenden Punkte.

Dieses Theorem scheint uns die fruchtbarste Eigenschaft der Involution von sechs Punkten auszudrücken; es führt zu verschiedenen bisher noch nicht bemerkten Ausdrücken der Involution, welche wir angeben wollen.

36. Wir haben in der vorigen Note gesehen, dass die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten sich auf drei Arten durch eine Gleichung mit drei Termen ausdrücken lasse; woraus man findet, dass die Bedingung der Involution von sechs Punkten sich durch eine Gleichung mit drei Termen auf zwälf Arten angeben lässt. Vier von diesen zwölf Gleichungen enthalten das Segment AA^1, welches zwischen zwei conjugirten Punkten liegt, vier enthalten das Segment BB^1 und vier endlich das Segment CC^1. Die vier ersten dieser Gleichungen sind:

$$(C) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{AB.AC}{AA^1.BC} + \dfrac{AB^1.A^1C^1}{AA^1.B^1C^1} = 1, \\[2ex] \dfrac{AB.A^1C^1}{AA^1.BC^1} + \dfrac{AB^1.A^1C}{AA^1.B^1C} = 1, \\[2ex] \dfrac{AC.A^1B}{AA^1.CB} + \dfrac{AC^1.A^1B^1}{AA^1.C^1B^1} = 1, \\[2ex] \dfrac{AC.A^1B^1}{AA^1.CB^1} + \dfrac{AC^1.A^1B}{AA^1.C^1B} = 1, \end{array} \right.$$

Auf ähnliche Weise bildet man die vier Gleichungen, in welche das Segment BB^1 eingeht, und die vier andern mit dem Segment CC^1; im Ganzen zwölf Gleichungen, von denen jede die eilf übrigen bedingt. Jede von ihnen enthält acht Segmente, worunter sieben von einander verschieden sind.

37. Man hat auch noch folgende acht Gleichungen, welche von den vorhergehenden verschieden sind, obgleich sie auch aus drei Termen bestehen und acht Segmente enthalten, worunter sieben verschieden sind:

(D) ....

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
1. \ldots\ldots & \dfrac{AC.AC^1}{AB.AB^1} + \dfrac{BC.BC^1}{BA.BA^1} = 1, \\
2. \ldots\ldots & \dfrac{AB.AB^1}{AC.AC^1} + \dfrac{CB.CB^1}{CA.CA^1} = 1, \\
3. \ldots\ldots & \dfrac{A^1C.A^1C^1}{A^1B.A^1B^1} + \dfrac{BC.BC^1}{BA.BA^1} = 1, \\
4. \ldots\ldots & \dfrac{A^1B.A^1B^1}{A^1C.A^1C^1} + \dfrac{CB.CB^1}{CA^1.CA} = 1, \\
1^1. \ldots\ldots & \dfrac{AC.AC^1}{AB^1.AB} = \dfrac{B^1C.B^1C^1}{B^1A.B^1A^1} = 1, \\
2^1. \ldots\ldots & \dfrac{AB.AB^1}{AC^1.AC} + \dfrac{C^1B.C^1B^1}{C^1A.C^1A^1} = 1, \\
3^1. \ldots\ldots & \dfrac{A^1C.A^1C^1}{A^1B^1.A^1B} + \dfrac{B^1C.B^1C^1}{B^1A^1.B^1A} = 1, \\
4^1. \ldots\ldots & \dfrac{A^1B.A^1B^1}{A^1C^1.A^1C} + \dfrac{C^1B.C^1B^1}{C^1A^1.C^1A} = 1.
\end{array}
\right.
$$

Von diesen acht Gleichungen leiten sich die vier letzten, mit den Nummeern 1^1, 2^1, 3^1, 4^1 bezeichneten, respective aus den vier ersten 1, 2, 3, 4 vermittelst der Gleichungen *A* ab. — Wir geben späterhin (45) den Beweis für diese acht Gleichungen.

38. Es giebt auch eine Formel von andrer Gestalt, welche die Involution von sechs Punkten durch eine Gleichung mit vier Termen zwischen sechs verschiedenen Segmenten ausdrückt.

Es seien α, β, γ die Mittelpunkte der drei Segmente AA^1, BB^1, CC^1, und nehmen wir an, dass diese drei Punkte in der Ordnung α, β, γ liegen, so hat man die Relation:

$$(E) \ldots\ldots\ldots \overline{\alpha A}^2.\beta\gamma - \overline{\beta B}^2.\alpha\gamma + \overline{\gamma C}^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha.$$

Diese Gleichung steht für sich allein da, d. h. es giebt keine zweite, welche dieselbe Form hat. Ihr Beweis leitet sich (46) aus einer andern allgemeinen Eigenschaft ab, die wir weiter unten geben werden.

39. Wenn die beiden Punkte *C* und C^1 in einen einzigen *E* zusammenfallen, so geht diese Relation über in:

$$\overline{\alpha A}^2.\beta E - \overline{\beta B}^2.\alpha E = \alpha\beta.\alpha E.\beta E.$$

Wenn ausserdem noch die beiden Punkte *B* und B^1 in einen einzigen *F* zusammenfallen, so wird:

$$\overline{\alpha A}^2 = \alpha E.\alpha F.$$

Dieses ist eine von den Formeln, welche ausdrücken, dass die Punkte A, A^1 conjugirte harmonische Punkte in Bezug auf die beiden E und F sind.

40. Man kann bekanntlich die harmonische Relation zwischen vier Punkten mit Hülfe eines fünften willkührlichen Punkts ausdrücken, auf den man die vier gegebenen bezieht. Ebenso giebt es auch eine Art, die Involution von sechs Punkten auszudrücken, indem man sich eines Hülfspunkts bedient, auf den man die sechs gegebenen Punkte bezieht. Diese Manier giebt zu einer unendlichen Anzahl von Gleichungen Gelegenheit, von denen jede genügt, um die Involution auszudrücken.

Es seien A und A^1, B und B^1, C und C^1 die sechs Punkte in Involution und m ein siebenter Punkt, der willkührlich auf derselben Geraden gewählt ist, auf welcher die ersteren liegen; α, β, γ seien die Mittelpunkte der Segmente AA^1, BB^1, CC^1, welche in der gegebenen Ordnung auf einander folgen sollen, so hat man die Relation:

$$(F) \ldots\ldots \mathrm{mA}.\mathrm{mA}^1.\beta\gamma - \mathrm{mB}.\mathrm{mB}^1.\alpha\gamma + \mathrm{mC}.\mathrm{mC}^1.\alpha\beta = 0.$$

Diese Gleichung findet statt, welches auch die Lage des Punkts m sein mag.

Wenn man annimmt, dass dieser Punkt der Reihe nach mit den Punkten in Involution, oder mit den Punkten α, β, γ oder mit verschiedenen andern bestimmten Punkten zusammenfällt, so wird man verschiedene Relationen erhalten, welche alle die Involution von sechs Punkten ausdrücken.

41. Der Beweis der Gleichung (F) ist leicht. Wir wollen zeigen, dass diese Gleichung, wenn sie für *eine* Lage des Punktes m stattfindet, sie auch für irgend eine andre Lage dieses Punktes gelten müsse; d. h. wenn man die neue Lage des Punktes m nennt, dass man nothwendig haben müsse:

$$(F^1) \ldots\ldots \mathrm{MA}.\mathrm{MA}^1.\beta\gamma - \mathrm{MB}.\mathrm{MB}^1.\alpha\gamma + \mathrm{MC}.\mathrm{MC}^1.\alpha\beta = 0;$$

und hernach wollen wir nachweisen, dass die Gleichung (F) für eine gewisse Lage des Punktes m wirklich stattfindet.

Um die Gleichung (F^1) aus der Gleichung (F) abzuleiten, schreibe ich:

$$\mathrm{mA} = \mathrm{MA} - \mathrm{Mm}, \quad \mathrm{mA}^1 = \mathrm{MA}^1 - \mathrm{Mm},$$

$$\mathrm{mA}.\mathrm{mA}^1 = \mathrm{MA}.\mathrm{MA}^1 - (\mathrm{MA} + \mathrm{MA}^1).\mathrm{Mm} + \overline{\mathrm{Mm}}^2,$$

oder

$$\mathrm{mA}.\mathrm{mA}^1 = \mathrm{MA}.\mathrm{MA}^1 - 2\mathrm{M}\alpha.\mathrm{Mm} + \overline{\mathrm{Mm}}^2.$$

Ebenso

$$\mathrm{mB}.\mathrm{mB}^1 = \mathrm{MB}.\mathrm{MB}^1 - 2\mathrm{M}\beta.\mathrm{Mm} + \overline{\mathrm{Mm}}^2$$

und

$$\mathrm{mC}.\mathrm{mC}^1 = \mathrm{MC}.\mathrm{MC}^1 - 2\mathrm{M}\gamma.\mathrm{Mm} + \overline{\mathrm{Mm}}^2.$$

Die Gleichung (F) wird also:

$$0 = MA.MA^1.\beta\gamma - MB.MB^1.\alpha\gamma + MC.MC^1.\alpha\beta -$$
$$2Mm.(\beta\gamma.M\alpha - \alpha\gamma.M\beta + \alpha\beta.M\gamma) + (\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta)\overline{Mm}^2.$$

Man hat aber zwischen den vier Grössen α, β, γ, M die Relation:

$$\beta\gamma.M\alpha - \alpha\gamma.M\beta + \alpha\beta.M\gamma = 0,$$

wie wir es in Note IX (p. 313) bewiesen haben; ebenso hat man zwischen den Punten α, β, γ die Relation

$$\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta = 0;$$

die obige Gleichung reducirt sich also auf die Gleichung (F^1), was wir beweisen wollten.

Es ist noch zu beweisen, dass die Gleichung (F) für eine gewisse besondre Lage des Punkts m stattfindet. Nehmen wir an, dass der Punkt im *Centralpunkt* der Involution der sechs Punkte liegt, so hat man $mA.mA^1 = mB.mB^1 = mC.mC^1$, und die Gleichung reducirt sich auf die identische:

$$\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta = 0.$$

Es ist mithin die Gleichung (F^1), oder die ihr ähnliche (F) bewiesen.

42. In der Gleichung (F) kann man die Segmente $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ durch andre Segmente zwischen den Punkten A, A^1, B, B^1, C, C^1 allein ersetzen; denn man hat:

$$\beta\gamma = \frac{BC + B^1C^1}{2}, \quad \alpha\gamma = \frac{AC + A^1C^1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{AB + A^1B^1}{2}.$$

43. Wenn wir annehmen, dass in der Involution die beiden Punkte C, C^1 in einen einzigen Punkt E und die beiden Punkte B, B^1 ebenfalls in einen einzigen F zusammenfallen, so wird die Gleichung:

$$(G) \;\ldots\ldots\; mA.mA^1.EF - \overline{mF}^2.\alpha E + \overline{mE}^2.\alpha F = 0.$$

Diese Gleichung drückt eine Relation zwischen den vier Punkten A, A^1, E, F, von denen die beiden ersten conjugirte harmonische Punkte in Bezug auf die beiden andern sind, und einen fünften willkührlich gewählten m aus. Und indem man diesem fünften Punkt verschiedene besondre Lagen giebt, erhält man verschiedene Ausdrücke des harmonischen Verhältnisses von vier Punkten.

44. Die Gleichung F scheint uns bis jetzt der ausgedehnteste und fruchtbarste Ausdruck für die Involution von sechs Punkten; denn man folgert daraus alle die verschiedenen Gleichungen, welche wir gegeben haben, und noch man-

che andre, welche einfache Ausdrücke für mehre Verhältnisse von Produkten der Segmente liefern, welche man in dieser Theorie zu betrachten hat.

Wenn man z. B. annimmt, dass der Punkt *m* mit dem Punkt *A* zusammenfällt, so findet man diesen einfachen Ausdruck für das Verhältniss $AC.AC^1$ zu $AB.AB^1$:

$$\frac{AC.AC^1}{AB.AB^1} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta} = \frac{AC + A^1C^1}{AB + A^1B^1}.$$

Der Ausdruck $\frac{A^1C.A^1C^1}{A^1B.A^1B^1}$ ist derselbe; woraus man auf die Gleichungen (*A*) schliesst.

45. Wenn man annimmt, dass der Punkt *m* in *B* liegt, so wird:

$$\frac{BC.BC^1}{BA.BA^1} = -\frac{\beta\gamma}{\beta\alpha} = -\frac{BB + B^1C^1}{BA + B^1A^1}.$$

Addirt man Glied für Glied diese Gleichung zu der vorhergehenden und bemerkt man, dass $\alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha\beta$ ist, so erhält man die erste der acht Gleichungen (*D*).

46. Die Gleichung (*E*) lässt sich auch sehr leicht aus der Gleichung (*F*) ableiten.

Man hat in der That zwischen den drei Punkten α, β, γ und irgend einem vierten Punkt *m* nach Math. Stewart folgende Relation:

$$\overline{m\alpha}^2.\beta\gamma - \overline{m\beta}^2.\alpha\gamma + \overline{m\gamma}^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha.$$ [34]

Wenn man von dieser Gleichung die Gleichung (*F*) abzieht, so entsteht

$$(\overline{m\alpha}^2 - mA.mA^1).\beta\gamma - (\overline{m\beta}^2 - mB.mB^1).\alpha\gamma + (\overline{m\gamma}^2 - mC.mC^1.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha.$$

Man hat aber

$$\overline{m\alpha}^2 - \overline{\alpha A}^2 = (m\alpha + \alpha A)(m\alpha - \alpha A) = mA.mA^1,$$

also

$$\overline{m\alpha}^2 - mA.mA^1 = \overline{\alpha A}^2.$$

Ebenso wird

$$\overline{m\beta}^2 - mB.mB^1 = \overline{\beta B}^2 \text{ und } \overline{m\gamma}^2 - mC.mC^1 = \gamma C^2.$$

Die obige Gleichung wird also:

$$\overline{\alpha A}^2.\beta\gamma - \overline{\beta B}^2.\alpha\gamma + \overline{\gamma C}^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha,$$

was wir beweisen wollten.

---

34) S. Vierte Epoche, §. 28.

47. Man schliesst auch aus der Gleichung (*F*) auf die Eigenschaft des Centralpunkts, welche schon Pappus bekannt war (18). Dazu nehmen wir den Punkt C^1 in der Unendlichkeit an, so dass der Punkt *C* der Centralpunkt *O* wird; und schreiben die Gleichung (*F*) unter die Form:

$$mA \,.\, mA^1 - mB \,.\, mB^1 \,.\, \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} + mC \,.\, \alpha\beta \,.\, \frac{mC^1}{\beta\gamma} = 0.$$

Der Punkt γ liegt in der Unendlichkeit und man hat:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = 1; \quad \beta\gamma = \frac{\beta C + \beta C^1}{2};$$

$$\frac{mC^1}{\beta\gamma} = 2 \,.\, \frac{mC^1}{\beta C + \beta C^1} = \frac{2}{\frac{\beta C}{mC^1} + \frac{\beta C^1}{mC^1}}.$$

Es ist aber:

$$\frac{\beta C}{mC^1} = 0 \text{ und } \frac{\beta C^1}{mC^1} = 1, \text{ also } \frac{mC^1}{\beta\gamma} = 2;$$

die Gleichung wird daher:

$$mA \,.\, mA^1 - mB \,.\, mB^1 + 2 \,.\, \alpha\beta \,.\, mO = 0.$$

Wenn man $\alpha\beta$ durch $\frac{AB + A^1B^1}{2}$ ersetzt, so erhält man die Gleichung des Pappus.

48. Wenn man annimmt, dass die beiden Punkte *B*, B^1 in dem einen der doppelten Punkte *E* der Involution zusammenfallen, so wird diese Gleichung

$$(H) \; \ldots\ldots \; mA \,.\, mA^1 - \overline{mE}^2 + 2 \,.\, \alpha E \,.\, mO = 0.$$

49. Wenn die beiden Punkte *A*, A^1 in dem zweiten doppelten Punkt *F* zusammenfallen, so wird

$$\overline{mF}^2 - \overline{mE}^2 + 2 \,.\, EF \,.\, mO = 0.$$

Diese Gleichung drückt eine Relation zwischen irgend welchen drei Punkten *m*, *E*, *F* und dem Mittelpunkt der beiden letztern aus.

50. Die erste der Gleichungen (*D*) und die Gleichung (*H*) geben einen Beweis für den von Apollonius bewiesenen Fall des *maximum* oder *minimum*, von dem wir (17) gesprochen haben. Denn aus der ersten dieser beiden Gleichungen sieht man, das das Verhältniss $\frac{AC \,.\, AC^1}{AB \,.\, AB^1}$, worin *A* als der veränderliche Punkt angenommen wird, ein *maximum* oder *minimum* wird, wenn das Product $BA \,.\, BA^1$ selbst ein

minimum oder *maximum* ist. Der Gleichung (H) gemäss hat man aber

$$BA.BA^1 = \overline{BE}^2 - 2.\alpha E.BO.$$

Das Product $BA.BA^1$ wird also ein *maximum* (oder ein *minimum*, wegen der Zeichen), wenn der variable Coefficient αE Null wird. Dann fallen die beiden Punkte A, A^1 mit dem Punkte E zusammen. Und dieses ist der Satz des Apollonius.

51. Man kann die Involution von sechs Punkten auch durch eine Gleichung ausdrücken, in welche *zwei* willkührlich gewählte Punkte eingehen.

Es seien m und n diese Punkte und es sei α der conjugirte harmonische Punkt von n in Bezug auf A und A^1, ebenso β der conjugirte harmonische von n in Bezug auf B und B^1 und γ der conjugirte harmonische von n in Bezug auf C und C^1: dann wird man, welches auch die Lage der beiden Punkte m und n auf der geraden Linie, auf der die Punkte der Involution liegen, sein mag, diese Relation haben:

$$(I) \ldots \frac{mA.mA^1}{nA.nA^1}.\beta\gamma.n\alpha - \frac{mB.mB^1}{nB.nB^1}.\alpha\gamma.n\beta + \frac{mC.mC^1}{nC.nC^1}.\alpha\beta.n\gamma = 0.$$

Wenn man annimmt, dass der Punkt n in der Unendlichkeit liegt, so wird diese Gleichung die Formel (F); welche Bemerkung hinreicht, die Legitimität dieser Gleichung zu zeigen.

52. Wenn der Punkt m im Centralpunkt liegt, so hat man $mA.mA^1 = mB.mB^1 = mC.mC^1$ und die Relation (I) wird:

$$(J) \ldots\ldots \frac{\beta\gamma.n\alpha}{nA.nA^1} - \frac{\alpha\gamma.n\beta}{nB.nB^1} + \frac{\alpha\beta.n\gamma}{nC.nC^1} = 0.$$

Diese Gleichung ist von andrer Form als die Gleichung (F) und drückt wie jene die Involution von sechs Punkten, vermittelst eines siebenten willkührlich gewählten Punktes, aus.

53. Wir haben in (30) gesagt, dass die Relation der Involution sich bei mehren Speculationen zeigen kann, wo man sie vielleicht noch nicht bemerkt hat. Wir wollen diese Note damit beschliessen, dass wir mehre Fälle anführen, in denen diese Relation stattfindet:

1) *Drei Systeme je zweier conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts bilden ein faisceau en involution.*

2) *Wenn drei Chorden eines Kegelschnitts durch Einen Punkt gehen, so sind die geraden Linien, welche*

von irgend einem Punkt der Curve nach den Endpunkten dieser Sehnen gezogen werden, in Involution.

3) *Wenn die Scheitel dreier Winkel, die einem Kegelschnitt umgeschrieben sind, in einer geraden Linie liegen, so werden die Schenkel derselben irgend eine Tangente des Kegelschnitts in sechs Punkten treffen, welche in Involution sind.*

4) *Wenn vier Chorden eines Kegelschnitts durch Einen Punkt gehen, und wenn man durch die Endpunkte der beiden ersten irgend einen Kegelschnitt legt und durch die Endpunkte der beiden andern irgend einen zweiten Kegelschnitt, so werden die vier Durchschnittspunkte dieser beiden Kegelschnitte je zwei und zwei auf zwei Geraden liegen, welche durch den Durcschnittspunkt der vier Chorden gehen: diese beiden Geraden und die vier Chorden bilden einen faisceau en involution.* [35])

Wenn die beiden ersten Chorden zusammenfallen und die beiden andern ebenfalls zusammenfallen, so geht die Relation der Involution in ein harmonisches Verhältniss über und man erhält dann dieses Theorem:

Wenn zwei Kegelschnitte einen doppelten Contact mit einem dritten Kegelschnitt haben, so schneiden sie sich in vier Punkten, von denen je zwei und zwei auf zwei Geraden liegen, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Berührungssehnen gehen: und diese beiden Geraden sind die conjugirten harmonischen zu den beiden Berührungssehnen.

5) Durch irgend einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts kann man zwei Gerade unter rechtem Winkel ziehen, dass der Pol der einen, in Bezug auf den Kegelschnitt, auf der andern liegt.

Wenn man durch drei, willkührlich in der Ebene des Kegelschnitts gewählte Punkte sechs solcher Linien zieht, so treffen diese jede der beiden Hauptaxen der Curve in sechs Punkten, die in Involution sind.

Der *Centralpunkt* der Involution ist der Mittelpunkt der Curve, und die beiden *doppelten* Punkte sind die Brennpunkte. Diese beiden doppelten Punkte sind reell auf der grossen Axe und imaginär auf der kleinen.

Für einen Punkt auf dem Kegelschnitt selbst sind die beiden rechtwinklig unter einander gezogenen Linien die Tangente und die Normale in diesem Punkt.

---

35) Den ersten Theil dieses Theorems habe ich in der *Correspondance polytechnique* (Tom. III, p. 339) bewiesen.

Man sieht, dieses Theorem ist eine allgemeine Eigenschaft der ***Brennpunkte*** bei den Kegelschnitten, welches zeigt, dass es ***vier Brennpunkte*** giebt, von denen zwei imaginär sind, die sich aber gewisser Eigenschaften erfreuen, welche sie mit den reellen Brennpunkten gemein haben.

Wir werden bei den Oberflächen des zweiten Grades ein diesem analoges Theorem wiederfinden, welches zur Charakterisirung *gewisser Curven* dient, die bei den Oberflächen dieselbe Rolle spielen, als die Brennpunkte bei den Kegelschnitten. (S. Note XXXI.)

Die Relation der Involution findet sich auch bei den Untersuchungen höherer Art, als die vorhergehenden sind. Z. B.

6) *Wenn irgend drei krumme Oberflächen, welche einen Punkt des Contacts haben, sich je zwei und zwei in diesem Punkte schneiden, so sind die Tangenten, welche man in diesem Punkt an die beiden Aeste jeder der drei Durchschnittscurven zieht, in Involution.*

7) *Wenn man durch eine Generatrix einer surface réglée irgend drei Ebenen legt, so wird jede von ihnen in einem Punkt die Oberfläche tangiren und in einem andern gegen sie normal sein; man erhält auf diese Weise sechs Punkte, welche in Involution sind.*

Jedes der angeführten Theoreme lässt mehre Folgerungen zu, welche anderweitig ihre Stelle finden werden.

54. Wir können diese Note nicht schliessen, ohne eine besondre Eigenschaft des Kreises anzuführen, auf dessen Peripherie sechs Punkte Relationen unter einander haben, die analog sind denen von sechs Punkten, welche auf einer geraden Linie in Involution sind. Diese Eigenschaft wird durch folgendes Theorem ausgedrückt:

Wenn drei von einem Punkte ausgehende Gerade die Peripherie eines Kreises, die erste in den Punkten a, a^1, *die zweite in* b, b^1, *die dritte in* c, c^1 *treffen, so hat man die Relation:*

$$\frac{\sin.\ {}^1/_2\, ca\ .\ \sin.\ {}^1/_2\, ca^1}{\sin.\ {}^1/_2\, cb\ .\ \sin.\ {}^1/_2\, cb^1} = \frac{\sin.\ {}^1/_2\, c^1a\ .\ \sin.\ {}^1/_2\, c^1a^1}{\sin.\ {}^1/_2\, c^1b\ .\ \sin.\ {}^1/_2\, c^1b^1}.$$

Man sieht, wie man zwei andre ähnliche Relationen bilden kann, so dass man zwischen den Punkten a, a^1, b, b^1, c, c^1 drei Relationen erhält, welche den Gleichungen (A) für die Involution von sechs Punkten in gerader Linie analog sind. Wir fügen noch hinzu, dass man zwischen diesen sechs Punkten auch Relationen hat, die den Gleichungen (B), (C) und (D) analog sind.

Note XI.

(Erste Epoche, §. 38.)

Ueber die Aufgabe, in einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen drei Seiten durch drei gegebene Punkte gehen sollen.

Pappus hat uns eine leichte Auflösung dieser Aufgabe für den Fall hinterlassen, dass die drei Punkte in gerader Linie liegen. Der allgemeine Fall wurde Castillon, welcher schon Proben von seiner Gewandtheit in der alten Geometrie gegeben, im J. 1742 von Cramer vorgelegt. Castillon fand eine Lösung dieses Problems, die auf reine Betrachtungen der Geometrie gegründet war; sie erschien in den Memoiren der Berliner Academie 1776. Gleich darauf gab Lagrange eine andre, rein analytische und sehr elegante Lösung (in demselben Bande der Berliner Memoiren).

Im J. 1780 lösten auch Euler, Fuss und Lexell dieses Problem (in den Memoiren der Petersburger Academie). Die Lösung von Euler giebt uns zu dieser Bemerkung Veranlassung, dass sie auf einem Lemma beruht, welches genau das Theorem des Stewart ist, von dem wir bei Gelegenheit der Lemmen des Pappus zu dem Werke *loca plana* des Apollonius gesprochen haben.

Der junge Neapolitaner Giordano di Oltaiano fasste diese Aufgabe allgemeiner auf und löste sie für ein Polygon von beliebig vielen Seiten, welche durch eben so viele willkührlich in der Ebene eines Kreises liegende Punkte gehen sollen. Malfatti löste sie auch in dieser Allgemeinheit. (Die Memoiren dieser beiden Geometer sind in dem vierten Bande der *Memorie della società italiana* enthalten.)

Lhuillier bringt einige Modificationen in den Lösungen dieser beiden Geometer an, in den Berliner Memoiren vom J. 1796, und kommt auf diese Aufgabe in seinen *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique*, 1809, zurück.

Carnot nahm in seiner *Géométrie de position* die Lösung von Lagrange auf und bildete, indem er geometrische Betrachtungen einführte, eine gemischte Lösung, welche er auf den allgemeinen Fall irgend eines Polygons anwandte.

Brianchon führte in diese Untersuchung ein neues Element der Verallgemeinerung ein, indem er irgend einen Ke-

gelschnitt statt des Kreises nahm. Er löste den Fall fürs Dreieck auf, indem er die Punkte in gerader Linie annahm. (*Journal de l'école polytechnique*, X.)

Gergonne that einen neuen Schritt, indem er auch einen Kegelschnitt nahm, aber den drei Punkten die Allgemeinheit ihrer Lage wiedergab und indem er sich zur Auflösung des Problems nur des Lineals bediente. Die vorhergehenden Lösungen erforderten die Anwendung des Zirkels (*Annales des Mathématiques*, T. I, p. 341, 1810—1811). Gergonne hat nicht direct dieses Problem behandelt, er legte sich ein andres vor, welches diesem analog ist, nämlich einem Kegelschnitt ein Dreieck einzuschreiben, dessen Scheitel auf drei gegebenen Geraden liegen. Die von diesem Geometer gegebene Construction braucht nur das Lineal und ist ein Muster von Eleganz und Einfachheit. Sie wurde von Servois und Rochat bewiesen (*Annales des Mathématiques*, T. I, p. 337 und 342). Gergonne bemerkt, dass sie sich, vermöge der Theorie der *Pole* bei den Kegelschnitten, unmittelbar in eine Lösung derselben Art für die Aufgabe, in einen Kegelschnitt ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen, transformiren lasse.

Um diese Materie vollständig zu machen, war nur noch übrig, für einen Kegelschnitt statt des Kreises den allgemeinen Fall irgend eines Polygons aufzulösen. Diese letzte Bemühung verdankt man Poncelet. Die Auflösung dieses Geometers krönt würdig die Arbeiten seiner Vorgänger. Sie bietet in jeder Beziehung ein schönes Beispiel der Vollkommenheit dar, welche die Theorien der modernen Geometrie erreicht haben. (S. *Traité des propriétés projectives*, p. 352.)

Note XII.

(Zweite Epoche, §. 2.)

Diese Note steht nach der Note XXXIV.

Note XIII.

(Zweite Epoche, §. 18.)

Ueber die Conica des Pascal.

Die meisten biographischen Bemerkungen enthalten einige Irrthümer in Bezug auf die Conica von Pascal: die einen verwechseln das vollständige Werk über Kegelschnitte, welches nie erschienen ist, mit dem *Essai*, das einzige, was Descartes gekannt hat; die andern führen eine Stelle an, in welcher sie glauben, dass der leztgenannte Philosoph Pascal nicht als Verfasser dieses Essai anerkenne, indem sie ihn vielmehr zuerst dem Desargues und dann dem Vater des Pascal, der ebenfalls in der Mathematik sehr bewandert war, zuschreiben. Und obgleich Bayle in seinem historischen Lexicon eine solche Interpretation der Meinung des Descartes widerlegt hat, weil sie den uns gebliebenen Documenten und man kann auch sagen dem Charakter dieses grossen Philosophen, der beinahe nie Etwas bewunderte, zuwiderläuft, so ist diese Auslegung seitdem noch oft wiederholt worden, namentlich von Montucla in seiner *Histoire de Mathématiques* (t. II, p. 62).

Noch in der letzten Zeit glaubte ein sehr gelehrter Geometer, wenigstens das Theorem vom Sechseck dem Desargues zuschreiben zu müssen, obgleich Pascal es im Anfang seines Essai als seine eigne Erfindung aufführt und es zur Grundlage dieses Essai macht, während er weiterhin Desargues als den Erfinder eines andern Theorems nennt, welches er gleichfalls anführt.

Zu diesem Beweise, welcher schon hinreichen möchte, dem Pascal das Eigenthumsrecht an diesem berühmten Theorem zu sichern, haben wir noch aufgefunden, dass man das Zeugniss des Desargues selbst hinzufügen könne. Es ist dies nämlich eine Stelle in einer Schrift dieses Geometers, vom Jahr 1642, welche von Curabelle in seinem *Examen des Oeuvres de Desargues* (in 4., 1644) angeführt wird. Indem er von einem gewissen Satze (den Curabelle nicht angegeben hat) spricht, fügt Desargues hinzu: *qu'il „remet d'en donner la clef quand la demonstration de cette grande proposition, nommée la Pascale, verra le jour: et que ledit Pascal peut dire que les quatres premiers livres d'Apollonius sont, ou bien un cas, ou bien une conséquence immédiate de cette grande proposition."*

Man kann nicht zweifeln, dass es sich hier um das Theorem des Sechsecks handelt, welches Pascal im Anfang seines Essai als ein Lemma ausgesprochen hatte, aus dem sich sein ganzes Werk über die Kegelschnitte ableite. Man sieht aus dieser merkwürdigen Stelle, dass dieses herrliche Theorem schon damals, wie jetzt, den Namen von Pascal führte.

Note XIV.

(Zweite Epoche, §. 23 und 21.)

Ueber die Werke von Desargues; den Brief von Beaugrand, und das Examen von Curabelle.

Wir haben den Brief von Beaugrand über den *Brouillon projet des coniques* von Desargues nach dem citirt, was Poncelet in seinem *Traité des propriétés projectives*, p. 95 darüber sagt; denn er ist sehr selten und wir haben ihn uns nicht verschaffen können.

Wir finden in dem *Examen des oeuvres du sieur Desargues* von J. Curabelle (in 4., 1644), auch ein sehr seltenes Werk, eine Stelle, in welcher dieser Brief erwähnt wird und welche noch in andrer Beziehung merkwürdig ist. Nachdem Curabelle die von Desargues, 1642, ausgesprochene Meinung in Bezug auf einen Satz von Pascal (wahrscheinlich den des Sechsecks), *von dem die vier ersten Bücher des Apollonius entweder ein besondrer Fall, oder eine unmittelbare Folge sind*, angeführt hat, setzt er hinzu: „*Mais quant à l'égard du sieur Desargues, cet abaissement d'Appollonius ne relève pas ses leçons de ténèbres, ni ses événemens aux atteintes que fait un cône rencontrant un plan droit, auquel a suffisamment répondu le sieur de Beaugrand, et démontré les erreurs en l'année* 1639, *et imprimé en* 1642, *en telle sorte que le public, depuis ledit temps, est privé desdites leçon ténèbres, qui etaient tellement relevées, au dire dudit sieur, qu'elles surpassaient de beaucoup les oeuvres d'Apollonius, ainsi qu'on pourra voir dans la lettre dudit sieur de Beaugrand, imprimée l'année cidessus.*"

Diese Stelle giebt zu folgenden Betrachtungen Veranlassung.

Zuerst scheint daraus hervorzugehen, dass Desargues ausser seinem *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan* noch ein andres Werk über die Kegelschnitte unter dem Titel *Leçons de ténèbres* geschrieben habe, was auch einige Aeusserungen des Graveur Gregoire Huret in dem Werke *Optique de portraiture et peinture, contenant la perspective et pratique accomplie* etc., Paris 1670, in fol., vermuthen lassen.

Die Worte: *et imprimé en* 1642, schienen uns zuerst sich darauf zu beziehen, was 1639 bewiesen war, woraus wir schlossen, dass der Brief von Beaugrand erst 1642 gedruckt wurde; wir fanden ihn aber in einer andern Schrift von Curabelle gegen Desargues citirt, von der wir sogleich sprechen werden, in welcher gesagt wird, dass er 1639 gedruckt war.

Hiernach scheint uns, dass die Worte *et imprimé en* 1642 andeuten, Beaugrand habe ausser diesem ersten Brief auch noch 1642 gegen Desargues geschrieben, vielleicht bei Gelegenheit seiner *Leçons de ténèbres*, die von Curabelle und Gregoire Huret citirt werden.

Es scheint uns in der That, dass Beaugrand keine Gelegenheit hat vorbeigehen lassen, sich unter den Verläumdern des Desargues auszuzeichnen. Denn wir finden, dass er auch eine *Lettre sur le Brouillon projet de la coupe des pierres de Desargues* (1640, in 4.) geschrieben hat. Dieser Brief ist unter diesem Titel in dem Katalog der königlichen Bibliothek bei dem Namen des Beaugrand und bei dem des Desargues angegeben. Er stand in einem Bande, dessen Verlust sehr zu bedauern ist, da er noch andre auf Desargues bezügliche Sachen enthielt, welche 1642 erschienen waren.[35])

Das *Examen* von Curabelle führte sehr lebhafte Streitigkeiten zwischen ihm und Desargues herbei, welche uns durch eine andre Schrift von J. Curabelle bekannt geworden ist, die den Titel führt: *Faiblesse pitoyable du sieur Desargues, employée contre l'examen faits de ses oeuvres.* Wir sehen daraus, dass Desargues zur Unterstützung seiner Lehren vom Schnitt der Steine eine Wette von 100,000 Livres anbot, welche von Curabelle nur für 100 Pistolen an-

35) Der Brief von Beaugrand über das *Brouillon projet des coniques* von Desargues, von dem Poncelet in seinem *Traité des propriétés projectives* sagt, dass sie auf der königlichen Bibliothek vorhanden wären, steht nicht in diesem Bande und wir haben ihn unter keinem Titel finden können.

genommen wurde. Die Conventionsartikel über diesen Gegenstand wurden am 2ten März 1644 verhandelt, aber die Schwierigkeit, sich über alle Punkte zu verständigen, gab zu verschiedenen Schmähschriften von beiden Seiten Veranlassung, und endlich am 12ten Mai desselben Jahres wurde die Sache dem Parlament übergeben. Unter diesen Umständen veröffentlichte Curabelle die Schrift, welche diese Details angiebt. [36])

Die Schwierigkeit bei der Verständigung lag hauptsächlich in der Wahl der Geschworenen. Die folgende Stelle zeigt den Geist, welcher den Desargues bei der Abfassung seiner Werke über den Schnitt der Steine geleitet hat, und den Geist, in welchem die Kritiken seiner Gegner geschrieben waren; es ist dieses gewisser Maassen der Ursprung und das Wesen des Streits:

Desargues wollte *„s'en rapporter au dire d'excellens géomètres et autres personnes savantes et désintéressées, et en tant qu'il serait de besoin aussi, des jurés maçons de Paris."* Hierauf erwiederte Curabelle: *„ce qui fait voir évidemment que le dit Desargues n'a aucune vérité à deduire qui soit soutenable puisqu' il ne veut pas des vrais experts pour les matières en conteste; il ne demande que des gens de sa cabale, comme des pures géomètres, lesquels n'ont jamais eu aucune expérience des règles des pratiques en question, et notamment de la coupe des pierres en l'architecture qui est la plus grande partie des oeuvres de question, et partant ils ne peuvent parler de subjections que les divers cas enseignent."*

Diese Stelle scheint mir vollständig die Natur des Streites zu zeigen und kann *a priori* die Frage zwischen Desargues und seinen Verläumdern entscheiden.

Was die Methode des Desargues an sich betrifft, so ist sie seitdem als gut und genau anerkannt worden, und man hat den Charakter der Allgemeinheit, den sie darbietet, zu schätzen gewusst. Da wir in keine nähere Entwickelung dieses Gegenstandes eingehen, so begnügen wir uns das Urtheil anzuführen, welches der gelehrte Frezier in seinem *Traité de la coupe des pierres* gefällt hat. Da De la Rue gesagt hatte, *dass J. Curabelle alle Fehler des Desargues* (bei der Construction der geraden und schrägen Bögen) *an-*

---

36) Ich besitze nur die acht ersten Seiten dieser Schrift (In 4., kleiner Text), welche ich in meiner Ausgabe des *Examen des oeuvres de Desargues* beigebunden fand. Ich möchte sehr gern die Fortsetzung kennen, aber ich kann kein zweites Exemplar finden.

gemerkt habe, fügt Frezier, nach Anführung dieser Stelle, hinzu: „Ich habe diese Kritik nicht gesehen und kann also nicht über ihre Genauigkeit urtheilen, ich kann jedoch ungescheut behaupten, dass die Methode von Desargues nicht ganz zu verwerfen ist. Ich gebe zu, dass sie Schwierigkeiten enthält, aber diese kommen nur von einem Fehler in der Erklärung des Princips, auf welchem sie gegründet ist und zum Theil auch von der Neuheit der Terme her; ich will es ergänzen" u. s. w. (T. II, p. 208, Ausg. von 1768.) Darauf sagt Frezier in der Auseinandersetzung der Methode, dass Desargues „die Bildung der geraden und schrägen Bögen, bei der Böschung und beim Abschüssigen auf ein einziges Problém zurückgeführt hat, welches darin besteht, den Winkel zu suchen, den die Axe eines Cylinders mit einem Durchmesser seiner Basis macht", u. s. w. (p. 209.)

Und endlich schliesst Frezier, nachdem er die Methode des Desargues klar und in ihrer ganzen Allgemeinheit auseinandergesetzt hat, *dass sie geistreich sei und ihm Ehre machen würde*, wenn Bosse sie auf verständlichere Weise dargestellt hätte.

Curabelle ist gegenwärtig ein ganz unbekannter Schriftsteller, indess scheint es, dass er über die Stereotomie und und über verschiedene Theile der construirenden Künste geschrieben habe. Wenigstens nennt der Auszug des Privilegiums, welches zu Anfang seines *Examen des oeuvres de Desargues* steht, die Titel mehrer Werke, welche nach diesem Examen erscheinen sollten. Wir haben keine Spur von diesen Werken finden, auch es nicht sicher bestimmen können, dass sie wirklich erschienen sind. De la Rue führt in seinem *Traité de la coupe des pierres* mehre Male Curabelle an, aber immer nur mit Rücksicht auf das genannte *Examen.*

Indem Desargues die praktische Perspective und die construirenden Künste rationellen und geometrischen Principien unterwerfen wollte, hat er sich noch viele andre Feinde, ausser Curabelle, gemacht, so wie man aus den Werken des berühmten Graveur Bosse sieht, der dieselben sein ganzes Leben hindurch bekämpfte. Diese Beharrlichkeit, welche seinem Urtheil und seinem Charakter Ehre macht, zog auch ihm Verfolgungen zu, und und es wurdə ihm untersagt, bei der königlichen Academie, wo er für die Perspective angestellt war, die Lehren des Desargues vorzutragen.

Unter den Feinden des Desargues scheint Beaugraud, Secretair des Königs, die bedeutendste Person gewesen zu sein, welcher mit vielen in der Wissenschaft ausgezeichneten Män-

nern in Beziehung stand und welcher auch selbst nicht ohne Kenntnisse in der Mathematik war; denn er gab 1631 unter dem Titel: *In isagogen F. Vietae Scholia*, einen Commentar zu dem hauptsächlichsten analytischen Werk von Vieta heraus und hat in der Geschichte der Cycloide eine gewisse Rolle gespielt. Aber seine Geostatik, von der in den Briefen des Descartes so viel gesprochen wird, und worin er *geometrisch* beweist, dass jeder Körper um so weniger wiegt, je näher er der Erde ist, reicht hin, um zu zeigen, welchen Irrthümern sein Geist unterworfen war, und man wundert sich nicht mehr, dass er die Leistungen von Desargues so schlecht zu würdigen wusste.

Die Achtung, welche der bisher so wenig bei den Biographen bekannte Desargues verdient, hat uns in diese Details einzugehen bewogen, indem wir hofften, dass sie das Interesse einiger Männer anregen und sie zur Aufsuchung der Original-Werke dieses geistreichen Menschen und der Piecen, die sich auf seine wissenschaftlichen Streitigkeiten beziehen, vermögen könnten. Seine Correspondenz mit den berühmtesten Männern seiner Zeit, deren Arbeiten er theilte und welche alle ihn zum Censor ihrer Werke haben wollten, wäre eine kostbare Entdeckung für die Literar-Geschichte dieses 17ten Jahrhunderts, welches dem menschlichen Geist so viele Ehre gemacht hat.

In Bezug auf die Werke von Desargues geben wir noch einige Andeutungen, die vielleicht andre veranlassen können:

Bosse schrieb 1665 in seinen *Pratiques géométrales* etc., dass „der verstorbene Millon, ein gelehrter Geometer, ein weitläufiges Manuscript von allen Beweisen des Desargues besitze, welches gedruckt zu werden verdiene."

In der *histoire litéraire de la ville de Lyon* von Colonia, gedruckt 1728, liest man: „Man will bald eine vollständige Ausgabe der Werke von Desargues besorgen. Richer, Domherr zu Provins, Verfasser zweier ausführlichen Memoiren über die Werke seines Freundes de Lagny und über die von Desargues, wird der Herausgeber dieses wichtigen Werks sein, welches besonders die Stadt Lyon interessirt."

Liesse doch ein glücklicher Zufall die Manuscripte von Millon und die für das Unternehmen von Richer gesammelten Materialien wiederfinden! —

Note XV.

(Zweite Epoche, §. 26.)

Ueber die anharmonische Eigenschaft der Punkte eines Kegelschnitts. — Beweis der allgemeinsten Eigenschaften dieser Curven.

1. Wir denken uns ein Viereck, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, und eine Transversale, wie bei dem Theorem von Desargues über die Involution von sechs Punkten.

Von zwei gegenüberliegenden Scheiteln des Vierecks ziehen wir gerade Linien nach den beiden Punkten, in welchen die Transversale den Kegelschnitt trifft. Man sieht leicht, dass die Relation der Involution von Desargues ausdrücken wird, dass das *anharmonische* Verhältniss der vier Punkte, in welchen die vier von einem Scheitel des Vierecks ausgehenden Geraden die Transversale treffen, gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der vier Punkte, in welchen die vier von dem gegenüberliegenden Scheitel ausgehenden Geraden diese Transversale treffen, woraus man schliesst, dass *das anharmonische Verhältniss der vier ersten Geraden gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der vier andern.*

2. Man hat also dieses allgemeine Theorem, welches das reciproke von der Folgerung ist, die wir so eben aus dem Theorem des Desargues gezogen haben.

Wenn man ein Büschel von vier Geraden hat, die einander einzeln correspondiren, und wenn das anharmonische Verhältniss der vier ersten gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der vier andern, so treffen die Geraden des einen Büschels die ihnen respective correspondirenden in vier Punkten, welche auf einem Kegelschnitt liegen, der durch die Centra der beiden Bündel geht.

Dieses Theorem ist, wie man aus dem gegebenen Beweise sieht, im Grunde nur eine andre Aussprache des von Desargues, aber seine ausserordentlich zahlreichen Corollarien umfassen einen Theil der Eigenschaften der Kegelschnitte, auf die sich die Theoreme von Desargues und Pascal nicht zu erstrecken scheinen. Und in der That, ausser den eigenthümlichen Vortheilen seiner verschiedenen Form, hat es

noch etwas Allgemeineres, als jedes dieser beiden Theoreme, und diese letzteren leiten sich aus ihm her, nicht als blosse Transformationen, sondern als einfache Corollarien. Dieses wollen wir sogleich nachweisen, indem wir die Natur der Anwendungen zeigen, für welche sich dieses Theorem eignet.

Aber wir müssen zuerst einen directen Beweis geben, weil wir dieses Theorem an die Stelle der allgemeinsten, bisher gebräuchlichen, setzen und diese aus jenem ableiten wollen.

3. Dieser Beweis ist ganz ausserordentlich leicht und einfach. Denn da das Theorem eine Gleichheit der *anharmonischen Verhältnisse* zweier Büschel von vier Geraden ausspricht und diese Verhältnisse dieselben Werthe beibehalten, wenn man die Perspective der Figur wählt, so reicht es hin nachzuweisen, dass diese Gleichheit bei dem Kreise stattfindet, welcher dem Kegel, an dem man den Kegelschnitt betrachtet, zur Basis dient. Beim Kreise aber sind die Winkel, welche die Linien des ersten Büschels unter einander bilden, respective den Winkeln gleich, welche die correspondirenden Linien des zweiten Büschels unter einander bilden, weil diese Winkel auf denselben Bögen stehen; es wird daher das anharmonische Verhältniss der Sinusse der ersten Winkel gleich dem anharmonischen Verhältniss der Sinusse der Winkel des zweiten Büschels, weil diese Sinusse einzeln einander gleich sind.

Auf diese Weise ist das Theorem bewiesen.

4. Nehmen wir an, dass drei Linien des ersten Büschels und die drei correspondirenden des zweiten Büschels fest seien und dass die vierte Gerade des ersten Büschels sich um dessen Centrum drehe, und dass die correspondirende Gerade des zweiten Büschels sich ebenfalls und zwar so drehe, dass die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse beider Büschel immer stattfinde: *so werden sich diese beiden beweglichen Geraden immer auf einem Kegelschnitt schneiden*, welcher durch die fünf festen Punkte der Figur bestimmt ist, d. h. durch die Centra der beiden Büschel und durch die Punkte, in denen die drei festen Geraden des ersten Bündels die drei festen Geraden des zweiten treffen.

5. Hieraus entstehen unendlich viele Arten, die Kegelschnitte durch den Durchschnitt zweier Geraden, die sich um zwei feste Punkte drehen, zu erzeugen. Denn man kann auf unendlich viele Arten zwei Büschel von geraden Linien bilden, die einander correspondiren und so beschaffen sind, dass das anharmonische Verhältniss von irgend welchen vier

Geraden des ersten Büschels immer gleich dem anharmonischen Verhältniss der vier entsprechenden Geraden des zweiten Büschels sei.

6. Nehmen wir z. B. einen festen Winkel und lassen um einen Punkt als Pol eine Transversale drehen, so wird diese in jeder ihrer Lagen die Schenkel des Winkels in zwei Punkten schneiden. Vier auf diese Weise bestimmte Punkte auf dem einen der Schenkel werden ein anharmonisches Verhältniss haben, welches gleich ist dem der vier correspondirenden Punkte auf dem andern Schenkel (weil dieses Verhältniss dasselbe sein wird, als dass der vier Transversalen, welche diese Punkte bestimmen). Hieraus folgt: wenn man von einem ersten festen Punkt Gerade nach den auf dem ersten Schenkel des Winkels bestimmten Punkten zieht und von einem zweiten festen Punkt Gerade nach den Punnkten auf dem zweiten Schenkel, dass man zwei Büschel von Geraden haben wird, welche einander correspondiren und welche sich auf einem Kegelschnitt schneiden, der durch die beiden festen Punkte geht. Man schliesst also:

Wenn sich die drei Seiten eines Dreiecks von veränderlicher Gestalt um drei feste Punkte drehen und wenn zwei Scheitel des Dreiecks zwei feste Gerade durchlaufen, so beschreibt der dritte Scheitel einen Kegelschnitt, welcher durch die beiden Punkte geht, um welche sich die diesem Scheitel anliegenden Seiten drehen. [37])

Dieses Theorem ist genau das mystische Sechseck des Pascal, nur unter andrer Form. In dieser Ausdrucksweise ist es von Maclaurin und Braikenridge gefunden und hat den ersten dieser beiden Geometer zu dem Ausspruch des Theorems von Pascal selbst geführt.

7. Nun seien zwei Büschel von Geraden, die von zwei verschiedenen Centris ausgehen und die sich je zwei auf *Einer*

---

37) Die dem beschreibenden Scheitel gegenüberliegende Seite des Dreiecks kann auch, statt sich um einen festen Punkt zu drehen, an einem Kegelschnitt hingleiten, für welchen die beiden festen Geraden Tangenten sind; auch dann noch wird der freie Scheitel einen Kegelschnitt beschreiben, der durch die beiden festen Punkte geht.

Dieses folgt daraus, dass irgend welche vier Tangenten eines Kegelschnitts zwei andre, jede in vier solchen Punkten treffen, dass das anharmonische Verhältniss der vier Punkte der ersten gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der vier Punkte der zweiten. (S. die folgende Note.)

Diese Verallgemeinerung des Theorems von Maclaurin und Braikenridge wird zu einer grossen Zahl von verschiedenen Sätzen führen, von denen die meisten neu sind.

willkührlich in ihrer Ebene gezogenen Geraden schneiden. Das anharmonische Verhältniss von irgend welchen vier Geraden des ersten Büschels wird gleich sein dem anharmonischen Verhältniss der vier correspondirenden Geraden des zweiten Büschels (weil dieses Verhältniss dasselbe ist, als das der vier Punkte, in denen sich diese Geraden je zwei auf der festen Transversale treffen). Verlegt man nun die beiden Büschel an andre Stellen ihrer Ebene, um ihre gegenseitige Lage zu ändern, so werden ihre correspondirenden Linien sich nicht mehr auf einer Geraden schneiden, sondern es wird aus unserm Theorem folgen, dass *sie sich immer auf einem Kegelschnitt schneiden, welcher durch die beiden Scheitel der beiden Büschel geht.*

8. Wenn wir annehmen, dass die beiden primitiven Büschel bei ihrer Ortsveränderung ihre respectiven Centra beibehalten haben, d. h. dass sie sich um ihre Centra gedreht haben, so drückt das angeführte Theorem genau das Newton'sche Theorem über die organische Beschreibung der Kegelschnitte aus.

9. Wenn die Strahlen der beiden primitiven Büschel statt auf einer geraden Linie sich auf einem Kegelschnitt schneiden, der durch ihre beiden Centra geht, so genügen die beiden Büschel der Bedingung, dass das anharmonische Verhältniss irgend welcher vier Geraden des ersten Büschels gleich ist dem der vier correspondirenden Geraden des zweiten (nach dem Theorem 2). Nach irgend einer Ortsveränderung also dieser beiden Büschel werden sich ihre correspondirenden Strahlen noch auf einem Kegelschnitt schneiden.

10. Wenn die beiden Büschel sich nur um ihre respectiven Centra drehen, so schliesst man auf dieses Theorem:

Wenn zwei Winkel von beliebiger, aber constanter Grösse sich um ihre Scheitel so drehen, dass der Durchschnittspunkt zweier ihrer Schenkel einen Kegelschnitt durchläuft, der durch ihre Scheitel geht, so schneiden sich die beiden andern Scheitel auf einem zweiten Kegelschnitt, der gleichfalls durch die beiden Scheitel geht.

11. Dieses Theorem, welches eine Verallgemeinerung von dem des Newton ist, ist selbst nur eine besondre Art unter einer unendlichen Anzahl andrer ähnlichen, um die Kegelschnitte durch den Durchschnitt zweier um zwei feste Punkte beweglichen Geraden zu erzeugen oder durch den Durchschnitt zweier Schenkel von zwei um ihre Scheitelpunkte beweglichen Winkel. Statt diese Winkel von constanter Grösse anzunehmen, wie wir es gethan haben, kann man sie auch variabel nehmen, und es giebt dann eine unendliche Zahl

von Arten die Relation zu bestimmen, welche sie unter einander haben müssen.

Man kann z. B. annehmen, dass jeder von ihnen auf festen Geraden Segmente von constanter Grösse zwischen seine Schenkel fasst.

So findet sich, dass das Theorem von Newton; welches einige Berühmtheit erlangt hatte und welches das hauptsächlichste in der Theorie der Kegelschnitte zu sein schien, nur ein besondrer Fall einer allgemeinen Beschreibungsart dieser Curven ist.

12. Dieser Umstand scheint uns geeignet, zwei Dinge zu zeigen: erstlich, dass es immer nützlich ist, bis zu dem Ursprung der geometrischen Wahrheiten zurückzugehen, um von diesem höhern Gesichtspunkt aus die verschiedenen Formen zu entdecken, deren sie fähig sind und die ihre Anwendung erweitern können; denn das Theorem von Newton, welches einige sehr bedeutende Geometer nicht verschmäht haben, als eines der schönsten aus der Theorie der Kegelschnitte zu beweisen, hat dennoch nicht besondre Folgen gehabt, weil seine Form nur wenige Corollarien zulässt. Das allgemeine Theorem dagegen, aus dem wir es abgeleitet haben, bietet eine Menge von verschiedenen Deductionen dar. — Sodann sieht man hier einen Beweis der Wahrheit, dass die allgemeinsten und fruchtbarsten Sätze zugleich die einfachsten und am leichtesten zu beweisen sind; denn keiner von den Beweisen, die man für das Theorem von Newton gegeben hat, ist an Kürze mit dem zu vergleichen, welchen wir für das in Rede stehende allgemeine Theorem (3) geliefert haben. Dieser hat sogar den Vortheil, keine vorläufige Kenntniss irgend einer Eigenschaft der Kegelschnitte zu erfordern.

13. Wir nehmen wieder die beiden Büschel, von denen wir vorausgesetzt haben, dass sie sich in einer geraden Linie schneiden, und verlegen diese Linie in die Unendlichkeit; d. h. wir nehmen an, dass die Linien dieser beiden Büschel respective parallel sind. Verändert man nun ihre Stelle, indem man sie um ihre Centra drehen lässt, so werden sich ihre correspondirenden Geraden auf einem Kegelschnitt schneiden, der durch ihre Centra geht. Man kann also dieses Theorem so aussprechen: *Wenn man in einer Ebene zwei ähnliche Figuren hat, die aber nicht ähnlich liegen, so werden die durch einen Punkt der ersten Figur willkührlich gezogenen Linien respective ihre homologen in der zweiten in solchen Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitt liegen*; ein Theorem, welches wir ohne Beweis in einer Schrift über die Ortsveränderung eines Körpers

im Raum ausgesprochen haben (*Bulletin universel des sciences*, T. XIV, p. 321).

14. Man kann dem allgemeinen Theorem, welches den Gegenstand dieser Note ausmacht, auch noch diese andre Aussprache geben: *Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, und wenn man von zwei Scheiteln desselben gerade Linien nach den vier andern Scheiteln zieht, so wird das anharmonische Verhältniss der vier ersten gleich dem anharmonischen Verhältniss der vier andern sein*;

das heisst: *Die vier ersten Geraden treffen irgend eine Transversale in vier Punkten, und die vier andern Geraden treffen eine zweite Transversale in vier andern Punkten, welche einzeln den vier ersten correspondiren; und das anharmonische Verhältniss der vier ersten Punkte ist dem anharmonischen Verhältniss der vier andern gleich.*

Dieser Ausspruch hat die grösstmögliche Allgemeinheit, wegen der Unbestimmtheit der Lage der beiden Transversalen.

15. Nehmen wir an, dass die erste Transversale eine der vier Geraden ist. welche durch den zweiten Scheitel des Sechsecks gezogen sind und die zweite Tranversale eine der Geraden, die durch den zweiten Scheitel gehen, so ist das genannte Theorem genau das erste von den Theoremen, welche Pascal in seinem *Essai pour les coniques* als aus seinem *Hexagramm* abgeleitete anführt.

16. Nehmen wir noch an, dass die beiden Transversalen mit einer Seite des Sechsecks zusammenfallen, so wird das so entstehende Theorem das des Desargues über die Involution von sechs Punkten sein.

17. Substituiren wir in diesem Theorem des Desargues statt der Segmente, welche auf der Transversale zwischen den beiden Punkten des Kegelschnitts und den vier Seiten des Vierecks liegen, die Ausdrücke dieser Segmente als Functionen der Perpendikel, die man von den beiden Punkten des Kegelschnitts auf die vier Seiten fällt, so folgt daraus dieses Theorem:

Wenn ein Viereck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist und wenn man von irgend einem Punkt der Curve Perpendikel auf seine Seiten fällt, so ist das Verhältniss des Produkts der Perpendikel auf zwei gegenüberliegende Seiten zu dem Produkt der beiden andern constant, welches auch der Punkt des Kegelschnitts sein mag.

In Stelle der Perpendikel kann man auch schräge Linien nehmen, welche respective mit den Seiten des Vierecks, nach

welchen sie gezogen werden, constante Winkel bilden. Dieser Satz ist das von Pappus angeführte Theorem *ad quatuor lineas*.

18. Es ist also bewiesen, dass das mystische Hexagramm, so wie auch ein andres Theorem von Pascal, ferner das von Newton über die organische Beschreibung der Kegelschnitte, das von Desargues über die Involution von sechs Punkten und das der Alten *ad quatuor lineas*, dass alle diese, Corollarien unsres Theorems sind. Man erkennt hieraus die grosse Anzahl von besondern Wahrheiten, auf welche dieses Theorem sich ausdehnen lässt, um Beziehungen, die bis heute noch nicht bekannt sind, und einen gemeinsamen Ursprung nachzuweisen.

Wir können also dieses Theorem gewisser Maassen als einen Mittelpunkt betrachten, von dem sich grossen Theils die Eigenschaften, selbst die allgemeinsten der Kegelschnitte, ableiten lassen: es wäre wegen dieser so sehr grossen Fruchtbarkeit und wegen der ausserordentlichen Leichtigkeit seines Beweises geeignet, zur Basis einer geometrischen Theorie der Kegelschnitte zu dienen.

19. Da es der Begriff des anharmonischen Verhältnisses ist, welcher den Hauptcharakter dieses Theorems ausmacht und welcher es befähigt, dass daraus unzählige Folgerungen gezogen werden, so bezeichnen wir es mit dem Namen des *anharmonischen Verhältnisses* von Punkten eines Kegelschnitts. [38])

Wir bemerken noch, dass eben so wie die Theoreme von Pascal, Desargues, Newton und das *ad quatuor lineas* Corollarien dieser anharmonischen Eigenschaft sind, dass sich auch letzteres aus jedem dieser Theoreme ableiten lässt und folglich dazu dienen kann, von dem einen zum andern überzugehen. Dieses zeigt, dass der Begriff des *anharmonischen Verhältnisses* das wahre gemeinsame Band zwischen diesen verschiedenen Theoremen ist und dass sie von einander nur durch die Form unterschieden sind.

Man hatte schon die Beziehungen, wir können beinahe sagen, die Identität zwischen den Theoremen des Desargues und Pascal, aber noch nicht die zwischen diesen und den andern angeführten Haupttheoremen bemerkt. Man bewies im Gegentheil jedes dieser Theoreme auf eine verschiedene

---

38) Wir sagen von *Punkten* eines Kegelschnitts, weil wir in der folgenden Note sehen werden, dass die Kegelschnitte sich noch einer zweiten, dieser ersten analogen, *anharmonischen Eigenschaft* erfreuen, welche ihre *Tangenten* betrifft.

Art, die immer unvergleichlich weitläufiger war, als der anschauliche Beweis, welchen wir von dem in Rede stehenden Theorem gegeben haben.

20. Wir könnten auch aus diesem Theorem den schönen Satz von Carnot ableiten, der sich auf das Verhältniss der Segmente bezieht, welche von einem Kegelschnitt auf den drei Seiten eines Dreiecks in derselben Ebene gebildet werden und der eben so allgemein eine Eigenschaft von sechs Punkten eines Kegelschnitts ausdrückt, als die Theoreme von Desargues, Pascal und Newton.

21. Endlich ist unsre *anharmonische Eigenschaft* noch einer andern Form fähig, welche daraus einen neuen, von allen vorhergehenden verschiedenen Satz macht, der zu einer neuen Art sehr zahlreicher Ableitungen führt. Dieser neue Satz drückt sich durch eine Gleichung mit drei Gliedern aus. Man kann ihn also aussprechen:

Es seien in einer Ebene zwei Transversalen gegeben, und auf der ersten irgend welche zwei feste Punkte O, E *und auf der zweiten zwei ebenfalls willkührliche* O^1, E^1 *angenommen; wenn man um zwei in der Ebene der Figur beliebig gewählte feste Pole* P, P^1 *zwei Gerade drehen lässt, welche die beiden Transversalen respective in zwei Punkten* a, a^1 *treffen, welche Punkte so bestimmt sind, dass man die Relation hat:*

$$(A) \ldots\ldots\ldots \frac{Oa}{Ea} + \lambda \cdot \frac{O^1a^1}{E^1a^1} = \mu,$$

wo λ *und* μ *zwei Constante sind: so wird der Durchschnittspunkt der beiden beweglichen Geraden einen Kegelschnitt beschreiben, welcher durch die beiden Pole* P, P^1 *geht.*

22. Dieses Theorem, in welchem so viele willkührliche Elemente vorkommen, wie die Richtung der Transversalen, die Lage der vier Punkte auf ihnen, die der beiden Pole und die Werthe der beiden Coefficienten, unterscheidet sich im Wesentlichen nicht von den allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte, von denen in dieser Note gesprochen ist; denn wir leiten dasselbe, wie jede von diesen aus unserm anharmonischen Satze ab. Aber seine Form gestattet viel weitere Anwendungen, als man in Bezug auf jeden von diesen Sätzen gemacht hat.

23. Wenn man z. B. die beiden Punkte E, E^1 auf der Geraden annimmt, welche die beiden Pole P, P^1 verbindet, so wird die Gleichung, statt einen Kegelchnitt auszu-

drücken, die einer einfachen geraden Linie. Hieraus folgen, als Corollarien eben so vieler Eigenschaften der Kegelschnitte, eine unendliche Menge Eigenschaften der geraden Linie; und unter diesen Sätzen finden sich verschiedene Coordinatensysteme, besonders das von Descartes.

Es giebt noch mehre andre Arten, zu machen, dass die Gleichung eine gerade Linie darstellt. Es reicht im Allgemeinen hin, einer einzigen Bedingungsrelation zwischen den Daten der Aufgabe zu genügen, welche durch die Gleichung

$$\frac{O\varepsilon}{E\varepsilon} + \lambda \cdot \frac{O^1\varepsilon^1}{E^1\varepsilon^1} = \mu$$

ausgedrückt wird, wo ε und ε^1 die Punkte sind, in denen die beiden Transversalen die Gerade treffen, welche die Pole P, P^1 verbindet.

Wir werden in einer andern Schrift den häufigen Gebrauch zeigen, zu welchem die Gleichung (A) in der Theorie der Kegelschnitte und in der der Transversalen uns geeignet scheint.

24. Ich werde auch noch an einer andern Stelle auf die anharmonische Eigenschaft der Kegelschnitte zurückkommen, welche unter der Form einer Gleichung mit zwei Gliedern durch das Theorem (2) ausgedrückt wird, weil sie sich in der Theorie der homographischen Figuren darbietet, wovon sie eine allgemeine Eigenschaft ist. Wir sprechen es dann in dieser Weise aus:

Wenn zwei homographische Büschel in derselben Ebene liegen, so werden die Linien des ersten respective die Linien des zweiten in solchen Punkten treffen, welche auf einem Kegelschnitt liegen, der durch die Centra der beiden Büschel geht.

Für die Idee des anharmonischen Verhältnisses, welches schon sehr einfach ist, das aber sich direct nur auf einen Büschel von vier Geraden bezieht, wird durch diesen Ausspruch ein andrer Begriff substituirt, welcher ausdrücklich alle Geraden desselben Büschels umfasst und dadurch in die Anwendungen des Theorems eine neue Promptitude und Leichtigkeit hineinbringt.

25. Man wird uns vielleicht die Länge dieser Note verzeihen, wenn man bemerkt, dass sie den grössten Theil der schönsten und allgemeinsten Eigenschaften von der Theorie der Kegelschnitte mit ihren Beweisen enthält. Die Analysis würde gewiss bei dieser Gelegenheit nicht kürzer, auch nicht leichter sein, als die reine Geometrie.

Wir wollen noch bei dieser Gelegenheit bemerken, dass keiner von diesen Sätzen, obgleich sie die wesentlichsten und fruchtbarsten in der ganzen Theorie der Kegelschnitte sind, gegenwärtig in den analytischen Werken über diese Curven enthalten sind. Diese Werke sind in Wahrheit nicht Behandlungen der Kegelschnitte, sie sind Anwendungen der analytischen Geometrie und eine Einleitung zur allgemeinen Theorie der Curven. Und in diesen Anwendungen beweist man nicht die allgemeinsten und wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte, sondern nur die, welche die elementarsten und eingeschränktesten sind, weil sie sich am besten den Formeln der Analysis anschliessen. Die andern, welche die nützlichsten wären und auf welchen das Fortschreiten der Theorie der Kegelschnitte beruht, bleiben den jungen Geometern, die diese wichtige Theorie nur aus den Werken über analytische Geometrie lernen, unbekannt.

Das Studium der Kegelschnitte hat seit einem Jahrhundert ausserordentliche Rückschritte gemacht; was sehr zu bedauern ist, nicht allein wegen der wichtigen Rolle, welche diese berühmten Curven in allen Theilen der Geometrie spielen und welche die Bekanntschaft mit ihnen unumgänglich nothwendig macht, sondern auch weil man im Allgemeinen in allen Theilen der Wissenschaft den Geist daran gewöhnen muss, sich stets auf die allgemeinsten Wahrheiten zu richten, welche die Theorie gestattet. Dieses ist das sicherste, wenn nicht das einzige Mittel, das Studium einer Wissenschaft zu vereinfachen und ihres Fortschreitens gewiss zu sein.

Note XVI.

(Fortsetzung der vorhergehenden.)

Ueber die anharmonishen Eigenschaften der Tangenten eines Kegelschnitts.

Die in der vorigen Note zur Sprache gekommenen Theoreme beziehen sich auf die *Punkte* der Kegelschnitte. Man weis, dass mehren unter ihnen andre analoge Theoreme entsprechen, welche die *Tangenten* der Curve betreffen. So entspricht dem Hexagramm des Pascal das Theorem von

Brianchon über das umgeschriebene Sechseck; dem Theorem des Desargues entspricht das, welches, wie ich glaube, Sturm[39]) zuerst gegeben hat: „Wenn ein Viereck einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, so bilden die Geraden, welche von irgend einem Punkte nach seinen vier Scheiteln gezogen werden, und die beiden Tangenten, welche von diesem Punkte an die Curve gelegt werden, ein *faisceau en involution.*" Dem Theorem der Alten *ad quatuor lineas* scheint uns das folgende zu entsprechen, welches wir in unserm ersten *Mémoire sur les transformations paraboliques* [40]) bewiesen haben: „wenn ein Viereck einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, so steht für irgend eine Tangente dieser Curve das Produkt ihrer Entfernungen von zwei gegenüberliegenden Scheiteln des Vierecks in einem constanten Verhältniss zu dem Produkt ihrer Entfernungen von den beiden andern Scheiteln"; endlich hat Poncelet in seiner *Théorie de polaires réciproques* bewiesen, dass das Theorem von Newton über die organische Beschreibung der Kegeschnitte auch sein entsprechendes hat, und dass es ebenso mit dem Theorem von Carnot ist, welches sich auf die Segmente, die von einem Kegelschnitt auf den drei Seiten eines Dreiecks gebildet werden, bezieht. [41])

Man muss vermuthen, dass diese neuen Theoreme, von denen jedes eine allgemeine Eigenschaft von sechs Tangenten desselben Kegelschnitts ausdrückt, also ebenso wie die, denen sie entsprechen, sich aus einem einzigen Satze ableiten müssten, welcher demjenigen entspricht, den wir in der vorigen Note die *anharmonische Eigenschaft* der Punkte eines Kegelschnitts genannt haben. Dieses findet in der That statt, und dieser neue Satz lässt sich so aussprechen:

Wenn von zwei Geraden in einerlei Ebene jede in vier Segmente getheilt ist, so dass die Theilungspunkte der ersten Linie denen der zweiten correspondiren und wenn das anharmonische Verhältniss der vier ersten Punkte gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der vier andern, so werden die vier Geraden, welche einzeln die correspondirenden Punkte verbinden, und die bei-

---

39) Dieses Theorem war der Gegenstand des Memoirs, welches den beiden ersten Memoiren von Sturm über die Theorie der Linien zweiter Ordnung (in den *Annales des Mathématiques*, tom. XVI et XVI) folgen soll, welches aber bis jetzt noch nicht erschienen ist.

40) Art. 10, p. 289 des Vten Bandes der *Correspondance mathématique de Bruxelles.*

41) Crelle, *Journal der Mathematik*, tom. IV.

den Geraden sechs Tangenten für denselben Kegelschnitt sein. [42])

Man sieht leicht, dass dieses Theorem unendlich viele verschiedene Sätze in sich fasst, welche sich auf die Beschreibung der Kegelschnitte durch ihre Tangenten beziehen. Denn es giebt unendlich viele Arten, zwei Gerade anzunehmen, welche so getheilt sind, dass das anharmonische Verhältniss von irgend vier Punkten der ersten gleich dem der vier correspondirenden Punkte der zweiten ist.

Indem wir in den Kegelschnitten des Apollonius und bei den neueren Autoren die verschiedenen Sätze, bezüglich auf die Tangenten eines Kegelschnitts, aufsuchten, haben wir erkannt, dass beinahe alle nur Anwendungen oder Corollarien des angeführten Theorems sind. Die Haupttheoreme, welche wir im Anfang dieser Note angeführt haben, so wie das von Brianchon, sind nur verschiedene Ausdrucksweisen oder Transformationen von diesem, welches das gemeinsame Band zwischen diesen verschiedenen bildet und dazu dient, von einem zum andern zu gelangen.

Wir nennen dieses Theorem das *anharmonische Verhältniss der Tangenten* eines Kegelschnitts.

Es ist uns noch übrig, den Beweis dieses Theorems zu liefern, wozu wenige Worte hinreichen werden.

Da das Theorem eine Gleichheit zweier anharmonischen Verhältnisse ausdrückt, welche fortbestehen muss, wenn man die Perspective dieser Figur bildet, so ist es genügend, dasselbe an einem Kreise nachzuweisen, welcher dem Kegel, auf dem der Kegelschnitt liegt, zur Basis dient. Man muss also nachweisen, dass, wenn ein Winkel einem Kreise umgeschrieben ist und wenn man irgend welche vier Tangenten an den Kreis zieht, das anharmonirche Verhältniss der vier Punkte, in welchen diese den ersten Schenkel des Winkels treffen, gleich dem der vier andern Punkte, in welchen sie den zweiten Schenkel des Winkels treffen, sein muss. Dies ist aber offenbar, denn der Theil jeder Tangente, welcher zwischen den beiden Schenkeln des Winkels liegt, wird vom Mittelpunkt des Kreises aus unter einem Winkel von constanter

42) Wenn die gegebenen Geraden nicht in einerlei Ebene liegen, so bilden die Geraden, welche einzeln ihre Theilpunkte verbinden, ein Hyperboloid mit Einem Fach. Das haben wir, auf andre Weise ausgesprochen, in der *Correspondance de l'école polytechnique*, t. II, p. 446 nachgewiesen. Und aus diesem allgemeinen Theorem im Raume haben wir die in Rede stehende Eigenschaft der Kegelschnitte abgeleitet. (S. die *Correspondance mathématique* von Quetelet, t. IV, p. 364.)

Grösse gesehen, und folglich werden die Segmente, welche zwei Tangenten auf den beiden Schenkeln des Winkels bilden, vom Mittelpunkt aus unter gleichen Winkeln gesehen. Hieraus schliesst man weiter, dass die vier Geraden, welche vom Mittelpunkt nach jenen Punkten gezogen werden, in denen die vier Tangenten den ersten Schenkel des Winkels treffen, ein anharmonisches Verhältniss haben müssen, welches gleich dem der vier Geraden ist, die vom Mittelpunkt nach den vier Durchschnittspunkten der Tangenten mit dem zweiten Schnekel gezogen sind; deshalb haben also die Theilpunkte des ersten Schenkels dasselbe anharmonische Verhältniss, als die des zweiten.

Das Theorem ist daher bewiesen.

Dieses Theorem kann eine neue Form annehmen und sich durch eine Gleichung mit drei Termen ausdrücken, wodurch man einen andern Satz erhält, der neuer und zahlreicher Anwendungen fähig ist. Diese neue Eigenschaft der Kegelschnitte sprechen wir so aus:

Wenn in einer Ebene zwei Transversalen gegeben sind, auf denen man zwei Punkte O, E *auf der ersten und zwei* O^1, E^1 *auf der zweiten willkührlich annimmt, und wenn zwei veränderliche Punkte* a, a^1 *diese beiden Geraden durchlaufen, so dass man die constaute Relation hat*:

$$\frac{Oa}{Ea} + \lambda \cdot \frac{O^1a^1}{E^1a^1} = \mu,$$

wo λ *und* μ *constante Coefficienten sind*: *so wird die Gerade* aa^1, *in jeder ihrer Lagen, immer ein und denselben Kegelschnitt berühren, welcher die beiden festen Transversalen tangirt.*

Aus diesem Satz lassen sich eine grosse Menge Corollarien ableiten, welche man dadurch erhält, dass man die Data der Aufgabe verschieden vertheilt, nämlich die beiden Transversalen, die vier auf ihnen gewählten Punkte und die beiden Constanten λ und μ.

Wenn diese Data unter einander die Relation

$$\frac{OS}{ES} + \lambda \cdot \frac{O^1S}{E^1S} = \mu$$

haben, wo *S* den Durchschnittspunkt der beiden Transversalen bezeichnet, so reducirt sich der Kegelschnitt auf einen Punkt; d. h. die Gerade aa^1 geht in allen ihren Lagen immer durch *Einen* Punkt. Dieses findet z. B. statt, wenn die

Punkte E, E^1 im Durchschnittspunkte S der beiden Transversalen liegen, so dass die Gleichung

$$\frac{Oa}{Sa} + \lambda \cdot \frac{O^1a^1}{S^1a^1} = \mu$$

zu einem Punkt gehört.

Wir werden bei einer andern Gelegenheit auf das Theorem, welches den Gegenstand dieser Note ausmacht, zurückkommen. Wir werden es dann als eine Eigenschaft der *homographischen* Figuren betrachten, und werden ihm diesen besondern Ausspruch geben, der sehr geeignet ist, die zahlreichen Anwendungen desselben zu zeigen.

Wenn zwei Gerade in einer Ebene homographisch getheilt sind, so hüllen die geraden Linien, welche die einzelnen Theilpunkte der ersten mit den homologen Punkten der zweiten verbinden, einen Kegelschnitt ein, welcher die beiden ersten Geraden tangirt.

In dem obigen Theorem kann man das System der beiden festen Transversalen durch die Peripherie eines Kreises ersetzen, und man erhält dann dieses Theorem:

Wenn irgend welche vier feste Punkte O, E, O^1, E^1 *auf einer Kreisperipherie gegeben sind, und wenn man auf dieser Peripherie zwei veränderliche Punkte* a, a^1 *so annimmt, dass man die Relation*

$$\frac{\sin. \frac{1}{2} aO}{\sin. \frac{1}{2} aE} + \lambda \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}\, a^1O^1}{\sin. \frac{1}{2}\, a^1E^1} = \mu$$

hat, wo λ *und* μ *zwei Constante sind, so hüllt die Chorde* aa^1 *einen Kegelschnitt ein, welcher einen doppelten Contact mit dem Kreise haben wird und die Gerade* EE^1 *berührt.*

Dieser Satz, nebst den beiden, welche wir schon zur Analogie mit dem anharmonischen Verhältniss von vier Punkten und mit der Involution von sechs Punkten angeführt haben, giebt zu einer Theorie Veranlassung, in welcher sich eine Menge von Eigenschaften eines Systems von zwei geraden Linien auf den Kreis übertragen finden; und alles dieses wendet sich durch eine passende Transformation auf irgend einen Kegelschnitt an, wodurch sich eine neue Quelle für die Eigenschaften dieser Curven eröffnet.

Wir begnügen uns hier anzumerken: wenn man für die Punkte E, E^1 in dem obigen Theorem die Endpunkte der Durchmesser annimmt, welche respective durch die beiden Punkte O, O^1 gehen, so wird man der Gleichung die einfachere Form geben:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, aO + \lambda \cdot \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a^1O^1 = \mu,$$

welche ein neues Theorem ausdrückt.

Unter den Corollarien, welche sich aus diesem Theorem ableiten, findet man diese Eigenschaft des Krümmungskreises für einen Punkt eines Kegelschnitts:

Wenn man den Krümmungskreis für einen Punkt A *eines Kegelschnitts zeichnet, so wird jede Tangente an dieser Curve denselben in zwei solchen Punkten schneiden, dass die Differenz der Cotangenten der Halbbögen, welche zwischen diesen Punkten und dem Punkte* A *liegen, constant ist.*

Note XVII.

(Dritte Epoche, §. 24.)

Ueber Maurolicus und Guarini.

Maurolicus, der gelehrteste Geometer seiner Zeit, ist der Verfasser einer Menge von Werken, worin sich oft glückliche Neuerungen und Spuren von Genie finden.

Ihm verdankt man die Bemerkung, welche unter seinen Händen die Grundlage zu den neuen Principien der Gnomonik wurde, dass der Schatten der Spitze eines Stiftes jeden Tag einen Bogen eines Kegeschnitts beschreibt. Hierdurch veranlasst verfasste er seine Abhandlung über die Kegelschnitte, von denen wir gesprochen haben, und welches der Gegenstand des dritten Buchs seiner Gnomonik ist, betitelt: *de lineis horariis libri III*, erschienen 1553 und 1575. Aber diese Behandlung der Kegelschnitte beschränkt sich auf das zur Gnomonik Nothwendige und umfasst nicht alle Eigenschaften dieser Curven, welche sich bei Apollonius finden.

Wir wollen noch von Maurolicus die Einführung der Sekanten in die trigonometrische Rechnung erwähnen, von denen er eine Tafel in dem Bande, betitelt: *Theodosii sphaericorum libri III*, 1558, drucken liess.

Auch die Analysis ist diesem Geometer, obgleich er wenig über diesen Gegenstand citirt wird, sehr verpflichtet. Er war der erste, welcher den Gebrauch der Buchstaben statt der Zahlen in den Calcul der Arithmetik einführte und welcher den Algorithmus der Algebra gab. Maurolicus wollte durch diese Neuerung die numerischen Operationen zu der-

selben Allgemeinheit und Abstraction erheben, welche die graphischen Operationen der Geometrie besitzen, deren Gesammtheit augenfällig ist und selbst in Gedanken verfolgt werden kann, und besonders den Vortheil hat, für Tausende von verschiedenen Anwendungen zu genügen.

Wir haben Guarini in der VIten Note bei Gelegenheit des Theorems von Ptolemäus und in der Theorie der Kegelschnitte, als wir von dem grossen *Traité* des De La Hire sprachen, erwähnt.

Das Werk dieses Geometers, bei dem wir erstaunen, dass desselben von den Geschichtschreibern der Mathematik keine Erwähnung geschieht, ist betitelt: *Euclides adauctus et methodicus, mathematicaque universalis* (in fol., Turin 1671). Es enthält 35 Abhandlungen über verschiedene Theile der theoretischen und angewandten Geometrie. Die 32ste kann als ein Kapitel aus unsrer gegenwärtigen beschreibenden Geometrie betrachtet werden. Es handelt von der Projection der Durchschnittslinien der Kugel, des Kegels und des Cylinders unter einander auf Ebenen, und von der Abwickelung dieser Curven doppelter Krümmung in einer Ebene.

Guarini ist auch der Verfasser eines Werks über Astronomie: *Mathematica coelestis*, in fol., Mailand 1683, welches Weidler und Lalande citirt haben.

Diese beiden Schriftsteller hätten aber auch in ihre astronomischen Bibliographien ein andres Werk von Guarini aufnehmen können, welches den Titel führt: *Placita philosophica* (in fol., Paris 1666), und worin unter andern Dingen, die sich auf Physik, Logik und Metaphysik beziehen, der Verfasser das System des Ptolemäus umwirft und dafür gewisse Spirallinien setzt, in denen er die Planeten sich bewegen lässt. Auch sprach er eine besondre Meinung über Ebbe und Fluth und über verschiedene andre Phänomene aus.

Note XVIII.

(Dritte Epoche, §. 34.)

Ueber die Identität der homologischen Figuren mit denen, welche man durch die Perspective erhält. — Bemerkung über die Perspective von Stevin.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Figuren des De La Hire, die des Le Poivre und die homologischen Figuren identisch dieselben sind, als die, welche man bei der Methode der Perspective beschreibt, welche von dem Augenpunkt (*point de vue*) und von den Grundpunkten (*points de distance*) Gebrauch macht. Denn diese erfreuen sich der beiden unterscheidenden Charaktere der ersten, welche folgende sind: 1) ihre homologen Linien laufen auf einer und derselben geraden Linie, welche die Grundlinie (*la ligne de terre*) ist, zusammen; 2) ihre homologen Punkte liegen auf Geraden, die in Einem Punkte zusammenlaufen (welcher die Projection des Auges auf der Ebene der Tafel sein würde, wenn man die durch das Auge gelegte Horizontal-Ebene um die Horizontal-Linie drehte). Aber diese zweite Eigenschaft der Figuren, welche man nach der Methode der Perspective vermittelst des Augenpunkts und der Grundpunkte beschreibt, ist selten in den Werken über Perspective bewiesen; denn obwohl diese Werke sehr zahlreich sind, so haben wir doch diese Eigenschaft nur in denen von Ozanam, Jeaurat, Lambert (Ausgabe von 1773) und in dem neuern Werke von Choquet bemerkt.

Bei den andern Methoden der Perspective, wie die von Stevin, Gravesande, Taylor und Jacquier, welche sich des Gesichtspunktes in der Ebene der Figur bedienen, ist die Identität der construirten Figuren des De La Hire, des Le Poivre und der homologischen Figuren evident, weil man sich bei ihrer Anwendung der beiden angegebenen charakteristischen Eigenschaften bedient.

Gravesande und Taylor werden oft und mit Recht citirt, dass sie die Perspective auf eine neue und verständige Weise behandelt haben; aber wir müssen uns wundern, dass man Stevin ganz mit Stillschweigen übergeht, der schon ein Jahrhundert früher auch Neuerungen in diesen Gegenstand einführte, welchen er, als tiefdenkender Geometer, und viel-

leicht vollständiger, als irgend ein anderer, unter dem theoretischen Gesichtspunkt behandelt hat.

So finden wir bei diesem Geometer die geometrische Lösung dieser Aufgabe, welche die umgekehrte der Perspective ist: *Wenn in einer Ebene und in irgend welcher gegenseitigen Lage zwei Figuren gegeben sind, von denen die eine die Perspective der andern ist, so verlangt man sie im Raume so zu legen, dass die Perspective stattfindet, und die Stelle des Auges zu bestimmen.*

Es ist wahr, dass Stevin nur einige besondre Fälle dieser Aufgabe löste, unter denen der schwierigste der ist, dass die eine Figur ein Viereck und die andre ein Parallelogramm ist. Den Fall, dass beide Figuren irgend welche Vierecke sind, gestattet auch die Aufgabe. Aber Stevin konnte ihn nicht lösen, weil er nur die beschreibenden Eigenschaften der Figuren in der Perspective anwandte, und es nöthig ist, auch die metrischen Relationen zu betrachten.

Wir werden Gelegenheit haben, diese allgemeine Aufgabe bei den Anwendungen unsres Princips der *homographischen Transformation* aufzulösen.

Note XIX.

(Dritte Epoche, §. 35.)

Ueber die Methode von Newton, Figuren in andre derselben Gattung umzuwandeln.

(Lemma XXII des Isten Buchs der Principia.)

Um den Figuren des Newton dieselbe gegenseitige Lage zu geben, als die des De La Hire haben, reicht es hin, die zweite in den Punkt *B* (wir setzen voraus, dass man den Text des Newton vor Augen habe), als um einen Zapfen, zu drehen, bis seine Ordinaten *dg* parallel mit den Ordinaten *DG* der ersten sind. Die Linie *aB* der zweiten Curve wird, während dieser Drehung, eine Lage a^1B angenommen haben. Durch den Punkt *A* wird man eine Gerade Ao^1 gleich und parallel mit der Geraden a^1B ziehen. Der Punkt 0^1 wird der *Pol* (oder das *Centrum der Homologie*), und die Gerade *Ba*, in ihrer ersten Lage betrachtet, die *Formatrix* (oder die *Axe der Homologie*) sein.

Um nun nachzuweisen, wie die Verfahrungsart der Perspective Newton hat zu seiner Transformationsweise führen können, denke man sich im Raum eine Curve und eine Tafel, auf welcher man die Perspective dieser Curve bildet, durch das Auge lege man eine Transversal-Ebene, und um die Geraden, in welchen dieselbe die Ebene der Curve und die der Tafel schneidet, lasse man diese beiden Ebenen drehen, bis sie beide in die Transversal-Ebene fallen; dann werden die vorgegebene Curve, ihre Perspective und der Punkt des Auges in Einer Ebene liegen und die Figuren des Newton darstellen.

Die Methode des Newton könnte also als praktische Methode der Perspective dienen. Und in der That finden wir, dass sie sich wenig von der ersten der beiden Regeln des Vignole unterscheidet, die von Ignaz Dante bewiesen und durch Sirigatt und verschiedene andre Geometer reproducirt sind.

Note XX.

(Vierte Epoche, §. 4.)

Ueber die Erzeugung der Curven des dritten Grades durch fünf divergirende Parabeln und durch die fünf Curven, welche einen Mittelpunkt haben.

Die beiden Theoreme, welche wir uns zu beweisen vorgenommen haben, beruhen auf einer Eigenschaft der Einbiegunspunkte der Curve dritten Grades, welche sich auf folgende Weise aussprechen lässt:

Wenn man um einen Einbiegungspunkt einer Curve des dritten Grades eine Transversale drehen lässt, und wenn man in den beiden Punkten, in denen sie die Curve schneidet, Tangenten zieht, so wird ihr Durchschnittspunkt eine gerade Linie beschreiben;

Die geraden Linien, welche je zwei Punkte, in denen zwei Transversalen die Curve treffen, verbinden, schneiden sich auf dieser Geraden;

Diese Gerade endlich trifft jede Transversale in einem Punkt, welcher der conjugirte harmonische zum

Einbiegungspunkt sein wird, in Bezug auf die beiden Punkte, in denen die Transversale die Curve trifft.

Es ist gewiss, dass diese Gerade durch die Berührungspunkte der drei Tangenten geht, welche man im Allgemeinen durch den Einbiegungspunkt an die Curve ziehen kann. Man sieht also, dass diese Gerade und der Einbiegungspunkt sich in Bezug auf die Curve derselben Eigenschaften erfreuen, als ein Punkt und seine Poläre in Bezug auf den Kegelschnitt. Deshalb wollen wir sie die *Poläre* des Einbiegungspunkts nennen.

Das ausgesprochene Theorem lässt sich leicht durch einige geometrische Betrachtungen beweisen; und man kann daraus verschiedene Eigenschaften der Curven des dritten Grades ableiten. Wir setzen uns aber hier nur vor, die Anwendung desselben, zum Beweis der beiden Erzeugungsarten dieser Curven durch den Schatten von fünf unter ihnen, nachzuweisen.

Man weiss, dass jede Curve des dritten Grades einen oder drei Einbiegungspunkte hat. Projecirt man sie, d. h. bildet man von ihr die Perspective so, dass der eine ihrer Einbiegungspunkte in die Unendlichkeit fällt, so wird die Poläre, vermöge des dritten Theils unsres Theorems, ein *Durchmesser* der Curve. Dieses ist der Ursprung der Durchmesser bei den Curven des dritten Grades.

Jetzt bilde man die Perspective so, dass nicht allein der Einbiegungspunkt, sondern auch die Tangente an der Curve durch diesen Punkt ganz in der Unendlichkeit liegt, so wird die Curve einen Durchmesser haben, und wird nicht eine Asymptote haben, sie wird rein parabolisch sein: dieses ist der ausschliessliche Charakter der fünf divergirenden Parabeln. Es ist also bewiesen, dass irgend eine Curve des dritten Grades perspectivisch nach einer der fünf divergirenden Parabeln projecirt werden kann; woraus umgekehrt folgt, dass diese fünf Curven durch ihren Schatten alle übrigen erzeugen können. Dieses ist das Theorem von Newton; das erste von den beiden, welche wir uns zu beweisen vorgesetzt haben.

Wir gehen zum zweiten über: Wir wollen die Poläre eines Einbiegungspunkts der vorgegebenen Curve annehmen und diese Curve perspectivisch so projeciren, dass diese Poläre in die Unendlichkeit übergeht, so folgt aus dem dritten Theil unsres obigen Theorems, dass der Einbiegungspunkt in der Projection der Mittelpunkt der Curve sein wird. Es kann also jede Curve des dritten Grades perspectivisch in eine Curve projecirt werden, welche einen Mittelpunkt hat; woraus umgekehrt folgt, dass die fünf Curven, welche einen

Mittelpunkt haben, durch ihren Schatten alle übrigen erzeugen können. Dieses ist das zweite Theorem, welches wir beweisen wollten.

Dieses Theorem und das von Newton können in einen einzigen Ausspruch zusammengefasst werden.

So wie die Curven des zweiten Grades nur zu einer einzigen Gattung von Kegeln Gelegenheit geben können, so können die Curven des dritten Grades nur zu fünf Gattungen von Kegeln Gelegenheit geben;

Wenn man sie auf eine gewisse Art schneidet, so bildet man die fünf kubischen Parabeln.

Und wenn man sie auf eine andre Art schneidet, so bildet man die fünf Curven, welche einen Mittelpunkt haben.

Das am Anfang dieser Note von uns ausgesprochene Theorem liefert eine leichte Erklärung für verschiedene Eigenschaften der Curven dritten Grades, die einen Mittelpunkt haben; und für verschiedene andre, die sich auf die Einbiegungspunkte dieser Curven beziehen. Wir können aber hier nicht in ein näheres Detail eingehen.

Note XXI.

(Vierte Epoche, §. 18.)

Ueber die Ovalen des Descartes oder über die aplanetischen Linien.

Quetelet hat in seiner schönen Theorie der *caustiques secondaires*, welche die Evolventen der Brennlinien des Tschirnhausen sind, gefunden, dass die secundären Brennlinien, welche durch die Reflexion und die Refraction in einem durch einen leuchtenden Punkt erhellten Kreise erzeugt werden, die Ovalen des Descartes oder die aplanetischen Linien sind. [43]) Auch Sturm ist seiner Seits und zu derselben Zeit [44]) auf dieses besondre Resultat gekommen, welches dem

43) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III.
44) *Annales des Mathématiques* von Gergonne, t. XV.

von Descartes für die Dioptrik erschaffenen Ovalen eine zweite Anwendung auf dieselbe Wissenschaft geben.

Um das Theorem von Quetelet geometrisch auszusprechen, sagen wir:

Wenn zwei feste Kreise in einer Ebene gegeben sind, und wenn der Mittelpunkt eines dritten beweglichen Kreises von veränderlicher Grösse sich auf der Peripherie des ersten Kreises bewegt und dabei sein Radius proportional der Entfernung seines Mittelpunkts von der Peripherie des zweiten Kreises ist; so wird diesen beweglichen Kreis eine Curve des vierten Grades einhüllen, welche die beiden conjugirten Ovalen des Descartes zusammen darstellt.

Unter den übrigen interessanten Eigenschaften, welche Quetelet für diese Curve gefunden hat, führen wir die beiden Arten an, auf die er sie an einem Körper, oder nach dem Ausdruck der Alten durch *loca ad superficiem*, erzeugt.

Erste Art: „Man denke sich eine Kugel und einen geraden Kegel, sodann bilde man die stereographische Projection der Durchschnittscurve dieser beiden Oberflächen, indem das Auge sich in dem Endpunkt *des* Durchmessers der Kugel befindet, welcher parallel mit der Axe des Kegels ist, und indem die Ebene der Projection senkrecht auf dieser Axe steht: dann wird die Projection eine aplanetische Linie sein."[45])

Zweite Art: „Wenn wir uns zwei gerade Kegel denken, welche ihre Scheitel in zwei verschiedenen Punkten haben, und ihre Axen parallel unter einander, so wird der Durchschnitt dieser beiden Kegel, projecirt auf eine Ebene die senkrecht auf ihren Axen steht, die aplanetischen Linien geben."[46])

Diese beiden Erzeugungsarten geben die beiden conjugirten Ovalen, welche eine vollständige aplanetische Linie bilden, und sie sind geeignet, die verschiedenen Gestalten zu zeigen, welche diese Curven annehmen können und vorzüglich die, welche der Analysis des Descartes entgangen sind.

Wir haben gefunden, dass das zweite Theorem sich auf folgende Art verallgemeinern lässt:

„Wenn zwei schiefe Kegel zwei Kreisperipherien in einerlei Ebene zu Grundflächen haben, und die Geraden, welche die

---

45) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, tom. V, und Supplement zu dem *Traité de la Lumière* von Herschel, von Quetelet, p. 403.

46) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, tom. V, und Supplement zu dem *Traité de la Lumière* von Herschel, von Quetelet, p. 397.

Mittelpunkte dieser Curven mit den Scheiteln der beiden respectiven Kegel verbinden, sich in einem Punkte im Raum treffen, so wird ein dritter Kegel, welcher diesen Punkt zum Scheitel hat und durch die Durchschnittscurve der beiden ersten geht, die Ebene ihrer Grundfläche in einer Curve des vierten Grades treffen, welche eine aplanetische Linie ist." 47)

Um in der Ebene, ohne Betrachtungen der Oerter auf der Oberfläche und der Projection, die aplanetischen Linien zu beschreiben, kann man sich folgender Construction bedienen, welche schneller zum Ziele führt, als die des Descartes, und welche auch noch den Vortheil hat, zu gleicher Zeit beide conjugirte Ovalen zu liefern.

Es seien zwei Kreise in einer Ebene gegeben; wenn man um einen festen Punkt, der auf der Centrallinie der beiden Kreise angenommen ist, eine Transversale drehen lässt, welche jeden der beiden Kreise in zwei Punkten trifft: so werden die Radien, welche von den Mittelpunkten der beiden Kreise nach ihren respectiven Durchschnittspunkten mit der Transversale gezogen werden, sich in vier Punkten schneiden, deren geometrischer Ort eine vollständige aplanetische Linie ist, welche ihre beiden Brennpunkte in den Mittelpunkten der beiden Kreise hat.

Diese Construction folgt unmittelbar aus dem Theorem des Ptolemäus über ein von einer Transversale geschnittenes Dreieck. Denn dieses Theorem, auf diese Figur angewandt, zeigt, dass jeder Punkt der construirten Curve die Eigenschaft besitzt, dass das Verhältniss seiner Entfernungen von den beiden Kreisperipherien constant ist.

Diese Beschreibung der Ovalen hat auch noch den Vorzug, ohne irgend eine Construction die Tangenten dieser Curven zu geben; denn jeder Punkt der Curve entspricht nach der Construction zweien Punkten der beiden Kreise, und die Tangenten an der Curve und an den beiden Kreisen in diesen drei Punkten treffen in Einem Punkt zusammen, was sich leicht durch ein geometrisches Theorem nachweisen lässt. 48)

Man kann nie zu viele verschiedene Mittel haben, um eine und dieselbe Curve zu beschreiben, weil jede eine charakteristische Eigenschaft der Curve ausdrückt, aus der sich

47) Man kann auch das erste Theorem verallgemeinern und die aplanetischen Linien auf irgend einer Oberfläche des zweiten Grades, statt auf einer Kugel, betrachten.

48) *Correspondance mathématique de Bruxelles*, t. V, p. 116.

natürlich mehre andre Eigenschaften ableiten, welche bei den andern Beschreibungsarten nicht eben so leicht hervortreten.

Die vorhergehenden Beschreibungsarten machen von ihren beiden Brennpunkten Gebrauch; es giebt aber auch eine andre Art, sie zu beschreiben, bei der man sich nur Eines Brennpunkts bedient und welche mehre besondre Vortheile gewährt. Es ist diese:

Es sei ein Kreis und in dessen Ebene ein willlkührlich gewählter fester Punkt gegeben; wenn man durch diesen Punkt einen Radius vector nach irgend einem Punkt der Peripherie des Kreises und eine zweite gerade Linie in der Weise zieht, dass sie mit einer festen Axe einen Winkel bildet, der das Doppelte von dem ist, welchen der Radius vector mit dieser Axe macht, und wenn man auf dieser zweiten Geraden, von dem festen Punkt ausgehend, ein Segment aufträgt, das proportional dem Quadrat des Radius vector ist; so wird der Endpunkt dieses Segments zu seinem geometrischen Ort eine aplanetische Linie haben, die aus zwei conjugirten Ovalen gebildet ist, für die der eine Brennpunkt in dem festen Punkte liegt.

Da dieses Theorem die aplanetischen Linien direct aus dem Kreise ableitet, so ist es besonders geeignet, mehre Eigenschaften dieser Curven entdecken zu lassen. Es werden sich z. B. die bekannten Eigenschaften von zwei oder drei Kreisen unmittelbar auf ein System von zwei oder drei aplanetischen Linien, welche einen gemeinsamen Brennpunkt haben, anwenden lassen.

Um von diesem Theorem Gebrauch zu machen, muss man noch bemerken, dass, wenn der Endpunkt des Radius vector eine gerade Linie statt einer Kreisperipherie durchläuft, man dann eine Parabel erhält, welche ihren Brennpunkt in dem festen Punkt hat.

Wenn sich z. B. zwei Gerade um zwei feste Punkte drehen, indem sie einen Winkel von constanter Grösse bilden, so erzeugt ihr Durchschnittspunkt einen Kreis, woraus man schliesst:

Wenn man zwei Gruppen von Parabeln hat, die alle denselben Brennpunkt haben und von denen die Einen durch einen ersten festen Punkt gehen und die Andern durch einen zweiten festen Punkt, und wenn man eine Parabel der ersten Gruppe und eine Parabel der zweiten Gruppe dergestalt nimmt, dass ihre Axen mit einander einen Winkel von constanter Grösse bilden; so werden die Durchschnittspunkte dieser beiden Parabeln auf einer aplanetischen Linie liegen.

Aus diesem Theorem lassen sich mehre Folgerungen ziehen, welche wir hier nicht näher prüfen können. [49])

Die aplanetischen Linien erfreuen sich noch einer sehr bemerkenswerthen Eigenschaft, welche, wie ich glaube, noch nicht angegeben ist: dass sie nämlich *statt nur zweier Brennpunkte stets drei haben*, d. h. dass sie ausser den beiden Brennpunkten, welche zu ihrer Beschreibung dienen, noch einen dritten haben, welcher mit dem einen der beiden ersten dieselbe Rolle spielt, als diese beiden zusammen. Die Betrachtung der drei Brennpunkte ist besonders geeignet, alle möglichen Formen der aplanetischen Linien kennen zu lehren.

Wenn der eine der Brennpunkte in der Unendlichkeit liegt, so wird die Curve ein Kegelschnitt und behält die beiden andern Brennpunkte.

Wenn zwei Brennpunkte zusammenfallen, so hat die Curve einen Knoten; sie wird die *limaçon* des Pascal und hat noch zwei Brennpunkte.

Endlich bieten die aplanetischen Linien noch einen generischen Charakter dar, welcher dazu dienen kann, sie unter den zahlreichen Curven des vierten Grades zu classificiren, sie haben nämlich *zwei imaginäre conjugirte Punkte, die in der Unendlichkeit liegen.* Hieraus schliesst man, dass man von einem Punkt ausserhalb einer solchen Curve im Allgemeinen und höchstens acht Tangenten ziehen könne.

Note XXII.

(Vierte Epoche, §. 29.)

Erweiterung der beiden allgemeinen Theoreme von Stewart.

Folgende sind die beiden Theoreme, welche eine bedeutend grössere Allgemeinheit darbieten, als die von Stewart, und aus denen sich diese nebst mehren andern ableiten.

---

49) Man leitet daraus, unter andern, ein Theorem ab, von dem Quetelet in seinem *Mémoire sur quelques constructions graphiques des orbites planétaires* in den *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, tom. III, Gebrauch gemacht hat.

Erstes Theorem: *Es seien in einer Ebene* m *Punkte* A, B, C ... *und eben so viele Quantitäten* a, b, c ... *gegeben; es sei ferner* n *kleiner als* m, *so wird man* (n + 1) *andre Punkte* A^1, B^1, C^1 ... *von der Art finden können, dass zwischen den Entfernungen irgend eines willkührlich gewählten Punktes* M *von den gegebenen Punkten und zwischen den Entfernungen desselben Punktes von den gefundenen Punkten* n *Relationen stattfinden, welche durch die Formel ausgedrückt werden:*

$$a.\overline{MA}^{2(n-\delta)} + b.\overline{MB}^{2(n-\delta)} + \ldots. =$$
$$\left(\overline{MA^1}^{2(n-\delta)} + \overline{MB^1}^{2(n-\delta)} + \ldots..\right) . \frac{a+b+c+\ldots}{n+1},$$

wo man dem δ *die* n *Werthe* 0, 1, 2 ... (n—1) *geben kann.*

Wenn man $\delta = 0$ macht, so erhält man das Theorem 44 des Stewart.

Die andern Werthe von δ geben andre Relationen, welche man als eben so viele verschiedene Theoreme aussprechen kann, welche aber nichts desto weniger alle zusammen stattfinden. Es ist diese Simultaneität dieser n verschiedenen Relationen, welche den Charakter des ausgesprochenen Theorems ausmacht.

Man darf dabei nicht übersehen, dass der Punkt M in diesem Theorem unbestimmt ist, und dass man also für jede Lage dieses Punkts n Relationen erhalten muss.

Es wäre δ noch eines $(n+1)$ten Werths $= n$ fähig; dieser würde aber zu der identischen Gleichung:

$$a+b+c+\ldots. = (n+1) . \frac{a+b+c+\ldots.}{n+1}$$

führen, weshalb wir die Zahl der Werthe für δ auf n reducirt haben.

Zweites Theorem: *Es seien in einer Ebene* m *Gerade und eben so viele Quantitäten* a, b, c ... *gegeben; es sei ferner* n *irgend eine Zahl kleiner als* m, *so wird man* (n + 1) *andre Gerade von der Art finden können, dass zwischen den Perpendikeln, welche von irgend einem in der Ebene dieser Geraden liegenden Punkt* M *auf die gegebenen Geraden gefällt werden, also zwischen* $M\alpha$, $M\beta$ .... *und zwischen den auf die gefundenen Geraden gefällten* $M\alpha^1$, $M\beta^1$ ...., $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n}{2}$ *Re-*

lationen stattfinden, welche durch die Formel ausgedrückt werden:

$$a.\overline{M\alpha}^{(n-2\delta)} + b.\overline{M\beta}^{(n-2\delta)} + \ldots = \left(\overline{M\alpha^1}^{(n-2\delta)} + \overline{M\beta^1}^{(n-2\delta)} + \ldots\right).\frac{a+b+c+\ldots}{n+1},$$

wo δ *die* $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ *Werthe* 0, 1, 2 .... $\frac{n-1}{2}$, *wenn* n *ungerade ist, oder die* $\frac{n}{2}$ *Werthe* 0, 1, 2 .... $\frac{n-2}{2}$, *wenn* n *gerade ist, annehmen kann.*

Wenn man $\delta = 0$ macht, so erhält man das Theorem, welches durch die Sätze 49 und 53 bei Stewart ausgedrückt wird.

Die andern Werthe von δ werden andre Relationen geben, welche man auch als eben so viele verschiedene Theoreme aussprechen kann, die jedoch alle zusammen stattfinden werden, und zwar, welches auch die Lage des Punktes *M* sein mag.

Bisher sind, wie ich glaube, die Sätze des Stewart, welche in den genannten beiden allgemeinen Theoremen enthalten sind, ohne Anwendung geblieben, als isolirt stehende Eigenschaften eines Systems von Punkten oder von Geraden. Inzwischen kann man glauben, dass diese Systeme andre Eigenschaften von derselben Art, als diese ersten besitzen müssen, und sich alle an einerlei Theorie anknüpfen. Ich hätte z. B. einigen Grund, anzunehmen, dass ein System von gegebenen Punkten und das System von Punkten, welche nach dem ersten in Rede stehenden Theorem bestimmt sind, mit den Systemen von vier Punkten, welche die Endpunkte zweier conjugirten Durchmesser einer Ellipse sind, gemeinsame Eigenschaften besitzen. Wenigstens will ich solche Systeme (freilich particuläre Systeme, d. h. solche, die einem bestimmten Gesetz unterworfen sind) von Punkten in beliebiger Anzahl bilden, welche allo diese Eigenschaften darstellen.

Ungeachtet dieser ersten Analogie kann ich mich doch in meinen Conjecturen täuschen. Wie dem aber auch sei, so wird man doch, wie ich glaube, anerkennen, dass die Theoreme des Stewart nur die ersten Schritte auf einem Felde von neuen Untersuchungen sind, welche den Geist der Geometer zu beschäftigen verdienen.

Note XXIII.

(Fünfte Epoche, §. 1.)

Ueber den Ursprung und die Entwickelung der beschreibenden Geometrie.

Wenn man auch Monge als den Schöpfer der beschreibenden Geometrie anerkennt, so muss man doch, um gerecht zu sein, zugestehen, dass verschiedene Verfahrungsarten dieser Wissenschaft und die Anwendung der Projection in den verschiedenen Theilen der construirenden Künste schon seit langer Zeit bekannt waren, besonders den Zimmerleuten und den Steinschneidern. Philibert von Lorme, Mathurin Jousse, Desargues, P. Deran und De La Rue haben auf die genannten Künste, welche auf der Projectionstheorie beruhen, Anwendungen gemacht. Desargues hat schon bei diesen Autoren die Analogie zwischen den verschiedenen Verfahrungsarten nachgewiesen und sie an allgemeine Principien angeknüpft. Frezier (*officier supérieur du génie*) hat in seinem *Traité de stéréotomie*, welches ein gelehrtes und mit sorgfältigen und nützlichen Anwendungen auf die theoretische und praktische Geometrie angefülltes Werk ist, die Ideen der Verallgemeinerung von Desargues verfolgt und auf eine abstracte und allgemeine Weise geometrisch die verschiedenen Fragen behandelt, welche sich bei den verschiedenen Theilen des Schnitts der Steine und des Zimmerwerks darbieten müssen. Wir führen z. B. an, Alles das, was mit der Abwickelung der conischen und cylindrischen Oberflächen auf eine Ebene zusammenhängt; die Theorie des Durchschnitts der sphärischen, cylindrischen und conischen Oberflächen unter einander; die Manier, eine Curve doppelter Krümmung im Raum durch ihre Projectionen auf Ebenen darzustellen; u. s. w.

Aber alle diese abstracten Fragen, welche eine Menge von praktischen Fragen in sich fassen und welche gegenwärtig eben so viele Kapitel unsrer beschreibenden Geometrie ausmachen, hängen wieder selbst, in ihren Lösungen, von einigen noch mehr elementaren Principien und Regeln ab, die ihnen gemeinschaftlich zukommen, so wie die vier Regeln der Arithmetik die gemeinsamen Hülfsmittel bei allen Operationen des Calculs sind. Es sind diese elementaren, abstracten und allgemeinen Regeln, welche das Genie des Monge in den Operationen der Stereotomie wahrgenommen

oder erschaffen hat und welche er in eine Doctrin, unter dem Namen der *Géométrie descriptive*, vereinigt hat; eine Lehre, deren Allgemeinheit, Klarheit und Leichtigkeit einen Mann von Genie in dem gewandten Fortsetzer zeigen.

Mit Hülfe dieser einfachen und unveränderlichen Principien, oder nach dem Ausdruck von Malus, mit Hülfe dieser Werkzeuge (*outils*), hat Monge mehre ungewisse und ungenaue Verfahren bei dem Schnitt der Steine berichtigen können, und hat es unternommen, Aufgaben aufzulösen, welche bis dahin die Grenzen der Wissenschaft der Stereotomisten zu überschreiten schienen oder welche nur empirische Lösungen erhalten hatten.

Wenn man von dem Ursprung der beschreibenden Geometrie spricht, darf man nicht die von Lacroix und Hachette dieser Wissenschaft geleisteten Dienste mit Stillschweigen übergehen.

Lacroix war der erste, welcher die Principien der beschreibenden Geometrie entwickelte und sie allen Lesern zugänglich machte, in seinem Werke, das zuerst den Titel führte: *Essai sur les plans et les surfaces* (in 8., 1795), dann: *Complément de Géométrie*, worin man die Klarheit und Präcision wiederfindet, welche die Schriften dieses berühmten Gelehrten auszeichnen.

Als Monge sein Werk über die beschreibende Geometrie in der Absicht bekannt machte, diese Wissenschaft so einfach und so zugänglich zu machen, als sie es nur zuliesse, hatte er zuerst verschiedene complicirte Fragen ausgeschlossen, die aber ganz natürlich mit darin aufgenommen werden mussten, sobald sich der Geist mit dieser neuen Lehre vertraut gemacht hatte. Hachette, sein Schüler in der Schule zu Mezieres, hernach sein College als Professor an der polytechnischen Schule, füllte zuerst diese Lücken aus, in zwei Werken *Supplémens à la Géométrie descriptive* (1812 und 1818). Diese neuen allgemeinen Untersuchungen oder Theorien, welche dieser Geometer zu dem Werke von Monge hinzugefügt hatte, wurden in dem vollständigen Werke über beschreibende Geometrie von Monge aufgenommen 1821 (eine zweite Ausgabe 1828), und sind seitdem in die zahlreichen Werke, welche über denselben Gegenstand in Frankreich und anderweitig erschienen sind, übergegangen. In dieser Hinsicht hat Hachette der mathematischen Wissenschaft einen bedeutenden Dienst geleistet. Es scheint besonders in Italien, wo die beschreibende Geometrie und ihre Anwendungen auf die Wissenschaft der Ingenieure in ihrer ganzen Ausdehnung cultivirt und in ausgezeichneten Werken vorgetragen

wird [50]), dass man diesem Gelehrten volle Gerechtigkeit widerfahren lässt, indem man häufig seine Werke citirt und sie selbst zum Muster annimmt. Wir glauben, dass sie ausserordentlich beigetragen haben, die Kenntniss der beschreibenden Geometrie zu verbreiten und auszudehnen. [51])

Seitdem sind noch andre gute Werke über beschreibende Geometrie in Frankreich erschienen. Wir müssen die von Vallée, Leroy und Lefebure de Fourcy anführen. Die beiden ersten sind so vollständig, als es der gegenwärtige Zustand der Wissenschaft zulässt; das dritte, hauptsächlich für die Aspiranten der polytechnischen Schule bestimmt, ist wegen seiner Ordnung und Präcision, welche stets die Werke dieses gelehrten Professors auszeichnen, ganz vorzüglich geeignet, seinen Zweck zu erfüllen.

Die beschreibende Geometrie ist noch im Fortschreiten begriffen. Olivier, für den dieser Theil der Geometrie schon seit langer Zeit ein Lieblingsstudium ist, hat in den letzten Bänden des *Journal de l'école polytechnique* mehre Memoiren über verschiedene neue Fragen geliefert, welche nothwendig in die künftigen Werke über diese Wissenschaft eingehen müssen.

---

50) Wir führen unter andern das Werk von dem Ingenieur Serenus an: *Trattato di Geometria descrittiva*, in 4., Rom 1826; und eine Sammlung von verschiedenen Memoiren, zum Theil Anwendungen der beschreibenden Geometrie, welche jährlich, so wie das Journal der polytechnischen Schule, von den Professoren der römischen Ingenieur-Schule unter dem Titel: *Ricerche Geometriche ed idrometriche fatte nella scuola degl' ingegneri pontifici d'acque e strade*, herausgegeben werden.

51) Nachdem diese Note schon geschrieben war, hat ein zu früher Tod Hachette den Wissenschaften und seinen zahlreichen Freunden entrissen. Seine alten Schüler in der polytechnischen Schule und besonders die, welche, wie ich, die Ehre seiner Freundschaft genossen und welche ihn in der Mitte seiner herrlichen Familie kannten, werden mit Rührung die Reden lesen, welche drei berühmte Gelehrte, Arago, Ch. Dupin und Poisson, seine Collegen in der Academie, und der eine seiner Schüler, welcher seine Arbeiten über die beschreibende Geographie fortsetzt, Th. Olivier, an seinem Grabe gehalten haben.

Note XXIV.

(Fünfte Epoche, §. 15.)

Ueber das Gesetz der Continuität und das Princip der zufälligen Relationen.

Man kann ohne Zweifel den Ausdruck, *Princip der Continuität*, statt *des der zufälligen Relationen* gebrauchen; jedoch findet zwischen dem einen und dem andern ein so wichtiger Unterschied statt, dass wir uns für die Annahme des zweiten entscheiden.

In der That geht das Princip der Continuität bis auf Leibnitz zurück, welcher es zuerst als ein solches aufstellte, das entschieden dieses Gesetz der Natur ausdrückte, *dass sich Alles durch unmerkliche Grade bilde*, oder wie sich die scholastische Philosophie ausdrückte, *Natura abhorret a saltu.* In dieser strengen Auffassung ist seitdem das Princip der Continuität angewandt worden. Dieses Princip leitet also seinen Ursprung aus dem Unendlichen ab. Es ist darnach die Ruhe eine unendlich kleine Bewegung; die Coincidenz eine unendlich kleine Entfernung; die Gleichheit das Letzte der Ungleichheiten; u. s. w. Leibnitz drückt dieses Princip auf folgende Art aus: „Wenn der Unterschied von zwei Fällen (*les cas*) kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Grösse *in datis* oder in dem was angenommen ist, so kann sie auch kleiner gemacht werden, als jede gegebene Grösse *in quaesitis* oder in dem was resultirt; oder, um einfacher zu sprechen, wenn die Fälle (*les cas*) (oder das was gegeben ist) sich einander beständig nähern und endlich zusammenfallen, so müssen die Folgen oder die Ergebnisse (oder das was verlangt wird) dasselbe thun.[52]

---

52) *Nouvelles de la République des Lettres*; Mai 1687, p. 744. Hierin stellte Leibnitz, als Antwort an Mallebranche über seine Lehre von den Gesetzen der Bewegung, sein *Gesetz der Continuität* auf, welches vorher noch von Niemand ausgesprochen war. Seitdem ist Leibnitz oft auf dieses schöne Gesetz zurückgekommen, welches ihm als Criterium oder Probirstein bei der Prüfung der verschiedenen Doctrinen diente. (S. *Essais de Théodicée*, art. 348; Brief an Faucher; *Journal des Savans*, 1692; Brief an Varignon, Ebend. 1702; *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, p. 11; *Recueil de diverses pièces* von Leibnitz, Clarke, Newton, u. A., 3te Ausgabe, in 8, 1759, tom. II, p. 450; etc.)

Man sieht also, dass das Gesetz der Continuität, wie es Leibnitz und seine Nachfolger auffassten, die Idee des Unendlichen in sich schliesst, welche durchaus nicht in dem *Princip der zufälligen Relationen*, so wie wir es entwickelt haben, enthalten ist; und dies ist der Grund, weshalb wir den Ausdruck *Princip der zufälligen Relationen* gebrauchen, welcher eine bestimmte Idee gewährt und eine Methode, die vollständig durch das auf Analysis gegründete Raisonnement gerechtfertigt wird.

Aber es ist wahr, dass Leibnitz auch sein *Gesetz der Continuität* als aus einem allgemeinern Princip sich ableitend betrachtet hat, was er durch diese Worte ausdrückt: *Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata.* [53]) Dieses war, sagt er an einer andern Stelle, die Regel der Folgerungen, bevor die Logik erfunden war, und ist es noch in den Augen des Volks. [54])

Joh. Bernoulli, welcher zuerst dieses Princip von Leibnitz annahm, und sich desselben zum ersten Mal offenbar bei der berühmten Frage über die Gesetze der Mittheilung der Bewegung bediente, sprach es so aus: *Wenn die Hypothesen dieselben bleiben, so müssen die Effecte auch dieselben sein.* (*Comm. epist.* von Leibnitz und Bernoulli, tom. I, p. 30.)

Dieses Princip umfasst das Gesetz der *Continuität*, wie man es mit der Idee des Unendlichen zu verstehen pflegt, und das Gesetz der *zufälligen Relationen.*

Der Gebrauch des *Princips der Continuität* in der Geometrie datirt sich wahrscheinlich von dem Ursprung dieser Wissenschaft, wie es Lacroix in der Vorrede zu seinem grossen *Traité du calcul différentiel et intégral* bemerkt, bei Gelegenheit des zweiten Satzes aus dem zwölften Buch der Elemente Euclids, welcher den Beweis zum Gegenstand hat, dass sich die Kreisflächen unter einander wie die Quadrate der Durchmesser verhalten. „In dem vorhergehenden Satze sagt Lacroix, beweist Euclid, dass dieses Verhältniss dasselbe sei, als das von ähnlichen Polygonen, die in zwei verschiedene Kreise eingeschrieben sind; und es scheint mir klar, dass der Geometer, wer es auch sein mag, der diese Wahrheit entdeckte, die Unabhängigkeit derselben von der Zahl der Seiten des Polygons erkannte, und dass, indem er zugleich bemerkte, dass diese Polygone um so weniger von

---

53) *Nouvelles de la République des Lettres*, a. a. O.

54) *Commercium epistol.* von Leibnitz und Bernoulli, tom. II, p. 110.

den Kreisen unterschieden waren, je mehr Seiten sie hatten, er nothwendig daraus, nach dem *Gesetz der Continuität,* schliessen musste, dass die Eigenschaft der erstern auch den zweiten zukäme."

Durch ähnliche Betrachtungen hat sich Archimedes zu viel schwierigeren Sätzen erhoben, dergleichen z. B. die Verhältnisse der Oberflächen und der körperlichen Inhalte von Cylinder und Kugel, die Quadratur der Parabel u. s. w. sind. Man würde gegenwärtig die dabei vorkommenden Sätze als hinreichend bewiesen betrachten; aber da sich die Alten des Gesetzes der Continuität nur als Mittel der Entdeckung bedienten, so liessen sie es nicht als Beweismittel gelten, sondern nahmen oft zu sehr mühsamen Verfahrungsarten ihre Zuflucht, um für ihre Wahrheiten ganz vollkommen überzeugende Beweise zu liefern, gegen welche durchaus kein Einwurf gemacht werden konnte.

Seit Leibnitz jedoch wurde das Princip der Continuität als Axiom in der Mathematik anerkannt und täglich gebraucht. Auf diesem Princip beruhen die Methode der Grenzen und die der ersten und letzten Verhältnisse. Inzwischen machten die Geometer nur stillschweigend davon Gebrauch und ohne sich darauf wie auf ein absolutes Gesetz zu berufen, als welches Leibnitz es betrachtet hatte.

Man kann es nicht leugnen, dass man gerade diesem Nachlassen von der Strenge der Alten die immensen Fortschritte verdankt, welche die Neueren in der Geometrie gemacht haben. Die Alten, mehr bemüht zu überzeugen als aufzuklären, haben alle Fäden verborgen gehalten, welche auf die Spur ihrer Erfindungsmethoden führen und die Fortsetzer ihrer Arbeiten hätten leiten können. Dieses war auch der Grund des langsamen und gehemmten Fortschreitens ihrer Geometrie und des geringen Zusammenhangs ihrer Methoden bei Aufgaben einerlei Art, oder, um genauer zu sprechen, des gänzlichen Mangels an sichern Methoden, welche sich, wie die der modernen Geometrie, für ganze Klassen von Aufgaben, die eine gewisse Allgemeinheit gestatten, geeignet hätten.

Note XXV.

(Fünfte Epoche, §. 15.)

Anwendung des Princips der zufälligen Relationen auf die Aufgabe, der Grösse und Richtung nach die drei Hauptdurchmesser eines Ellipsoids zu bestimmen, wenn drei conjugirte Durchmesser desselben gegeben sind.

Wir wollen zuerst das analoge Problem der ebenen Geometrie auflösen, worin verlangt wird, der Grösse und Richtung nach die beiden Hauptaxen einer Ellipse zu bestimmen, in welcher zwei conjugirte Durchmesser gegeben sind. Die Lösung dieses Problems wird uns die Auseinandersetzung der Lösung für das anologe im Raum erleichtern, und uns ausserdem eben so wie dieses ein Beispiel darbieten, welches sehr geeignet ist, die Anwendung des Princips der zufälligen Relationen zu zeigen und die Vortheile desselben fühlbar zu machen.

Problem: *Es sind zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse gegeben, man soll der Grösse und Richtung nach die beiden Hauptdurchmesser dieser Curve construiren.*

Nehmen wir zunächst an, dass statt der beiden conjugirten Durchmesser einer Ellipse zwei conjugirte Durchmesser einer Hyperbel gegeben sind, und dass man verlangt, die Hauptaxen dieser Curve zu construiren, so wird der eine der beiden conjugirten Durchmesser reell und seiner Grösse nach gegeben sein — wir wollen ihn a nennen —, der andre wird imaginär und sein algebraischer Ausdruck $b.\sqrt{-1}$ wird auch gegeben sein. Die Construction der beiden Hauptaxen der Hyperbel ist ausserordentlich leicht; denn man weiss, wenn man durch den Endpunkt A des Halb-Durchmessers a eine Parallele mit dem conjugirten Durchmesser zieht, so wird diese eine Tangente der Hyperbel; und wenn man auf dieser Geraden, zu beiden Seiten des Punkts der Curve, zwei Segmente $= b$ aufträgt, so werden ihre Endpunkte auf den beiden Asymptoten liegen. Wenn man daher diese beiden Asymptoten zieht und den Winkel zwischen beiden, so wie auch dessen Supplement halbirt, so wird man die Richtung der beiden Hauptaxen der Hyperbel haben. — Auf diese Weise ist das Problem höchst einfach gelöst.

Um diese Lösung auf den Fall der Ellipse, durch die Anwendung des Princips der zufälligen Relationen, überzutragen, muss man die Betrachtung der zufälligen Theile der Figur, welche uns dienlich gewesen sind und welche hier die Asymptoten sind, durch die Betrachtung irgend einer andern Eigenschaft der Figur ersetzen, die für den Fall einer Ellipse auch stattfindet.

Wir wollen die beiden Punkte, in denen die Tangente der Hyperbel die beiden Asymptoten trifft, als die Brennpunkte eines Kegelschnitts C betrachten, der durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht; die beiden Asymptoten werden zwei Radii vectores dieses Kegelschnitts sein: folglich werden von den beiden Hauptaxen der Hyperbel, welche den Winkel zwischen den beiden Radii vectores und dessen Supplement halbiren, die eine Tangente und die andre Normale für den Kegelschnitt C sein. Wir können also sagen, dass der Kegelschnitt C, der durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht, Tangente ist für die eine der Hauptaxen. Vermöge dieser Eigenschaft wird der Kegelschnitt C zur Construction der Richtungen der beiden Hauptaxen der Hyperbel dienen und wird für diesen Zweck die beiden Asymptoten ersetzen, deren wir uns zuerst bedient hatten.

Aber dieser Kegelschnitt C, auf welchen uns die Betrachtung der beiden Asymptoten geführt hat, kann ohne Anwendung dieser beiden Geraden construirt werden; denn wir kennen die Richtung seiner beiden Hauptaxen, welche die Tangente und die Normale der Hyperbel in dem Punkte A sind, und seine Excentricität, in der Richtung der Tangente, welche gleich b ist, d. h. gleich dem Durchmesser $b.\sqrt{-1}$ der Hyperbel, dividirt durch $\sqrt{-1}$. Die andre Excentricität des Kegelschnitts C wird nach der Normale gerichtet sein und gleich der ersten multiplicirt durch $\sqrt{-1}$, d. h. $= b.\sqrt{-1}$.[55]) Man hat also folgendes Theorem:

Wenn man die Tangente und die Normale in einem Punkte A *einer Hyperbel als die Hauptaxen eines Kegelschnitts betrachtet, der durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht und dessen Excentricität in der Richtung der Normale genau dem Durchmesser gleich ist, welcher dem in dem Punkt* A *endigenden conjugirt ist, so wird*

---

55) Wir nehmen an, dass ein Kegelschnitt vier Brennpunkte habe, von denen zwei reell und zwei imaginär sind, und zwei Excentricitäten, von denen die eine reell, die andre imaginär ist: die Quadrate dieser beiden Excentricitäten sind einander gleich, aber von entgegengesetzten Zeichen.

dieser Kegelschnitt nothwendig die eine der beiden Hauptaxen der Hyperbel tangiren.

Dieses Theorem drückt eine allgemeine Eigenschaft der Hyperbel aus, unabhängig von den Asymptoten, obgleich diese uns zu dem Beweis derselben gedient haben. Alle Theile der Figur, welche diese allgemeine Eigenschaft bedingt, finden sich in der Ellipse wieder, wir können also nach dem Princip der zufälligen Relationen diese Eigenschaft auf die Ellipse anwenden und also sagen:

Wenn man die Tangente und die Normale in einem Punkt einer Ellipse als die Hauptaxen eines Kegelschnitts betrachtet, der durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, und dessen Excentricität, auf der Normale genommen, gleich dem Durchmesser ist, welcher dem durch den gewählten Punkt auf der Ellipse gehenden conjugirt ist, so wird dieser Kegelschnitt die eine der beiden Hauptaxen der Ellipse tangiren.

Die auf der Normale liegende Excentricität wird reell sein, weil der Durchmesser, dem sie gleich ist, reell ist; die beiden Brennpunkte des Kegelschnitts werden also auf der Normale der Ellipse liegen. Die Radii vectores, die von diesen beiden Brennpunkten nach dem Mittelpunkt der Ellipse gezogen werden, bilden mit derjenigen der beiden Hauptaxen, für welche der Kegelschnitt Tangente ist, gleiche Winkel. Und hieraus folgert man dieses Theorem:

Wenn man auf der Normale für einen gewissen Punkt einer Ellipse zu beiden Seiten dieses Punkts zwei Segmente annimmt, die der Hälfte desjenigen Durchmessers gleich sind, welcher der conjugirte zu dem durch diesen Punkt gehenden ist, und wenn man von den Endpunkten dieser beiden Segmente nach dem Mittelpunkt der Ellipse zwei gerade Linien zieht, so werden diese beiden Geraden gleiche Neigung gegen die eine der beiden Hauptaxen der Ellipse haben.

Dieses Theorem liefert, wie man sieht, eine ausserordentlich einfache Construction der Richtung der beiden Hauptaxen einer Ellipse, von der man zwei conjugirte Durchmesser kennt. Es bleibt uns also noch übrig, die Länge dieser Hauptaxen zu bestimmen, wozu sich verschiedene Arten darbieten.

Erstlich kann man die beiden gegebenen conjugirten Halbaxen senkrecht auf die Hauptaxen projeciren, dann wird die Summe der Quadrate ihrer Projectionen gleich dem Quadrat ihrer Hauptaxe sein.

Man kann sich auch noch des folgenden, sehr leicht beweisbaren Theorems bedienen:

Wenn man durch einen Punkt eines Kegelschnitts die Normale zieht, so ist das Produkt der Segmente, die auf ihr durch den darauf senkrechten Durchmesser und durch eine der Hauptaxen gebildet werden, gleich dem Quadrat der halben andern Hauptaxe.

Diese Relation bestimmt die beiden Hauptaxen.

Man kann aber einen Ausdruck für die Länge dieser Axen erhalten, ohne *a priori* ihre Richtungen zu kennen.

Hierzu bemerken wir: wenn man über der Tangente und der Normale eines Kegelschnitts, als Hauptaxen betrachtet, einen zweiten Kegelschnitt construirt, welcher durch den Mittelpunkt des ersten geht und in diesem Punkt die eine Hauptaxe dieses Kegelschnitts tangirt, so wird das Product der Segmente, welche auf der Normale durch ein vom Mittelpunkt des ersten Kegelschnitts darauf gefälltes Perpendikel und durch die Hauptaxe, die Tangente des zweiten Kegelschnitts ist, gebildet werden, gleich dem Quadrat derjenigen halben Hauptaxe des zweiten Kegelschnitts sein, welche in der Richtung dieser Normale liegt; diese Hauptaxe wird also der zweiten Hauptaxe des vorgegebenen Kegelschnitts gleich sein, welche normal für den zweiten Kegelschnitt ist. Man hat daher dieses Theorem:

Wenn man die Tangente und die Normale in einem Punkt eines Kegelschnitts zu Hauptaxen eines zweiten Kegelschnitts annimmt, welcher durch den Mittelpunkt des ersten geht und in diesem Punkt normal gegen die eine der Hauptaxen dieses ersten Kegelschnitts ist, so wird die Hauptaxe dieses neuen Kegelschnitts, welche nach der Normale des ersten gerichtet ist, gleich sein der Hauptaxe dieses ersten Kegelschnitts, für welche die zweite Curve normal ist; d. h. jeder dieser beiden Kegelschnitte hat die eine seiner Axen normal auf der andern Curve und diese beiden Axen sind unter einander gleich.

Wenn der erste Kegelschnitt eine Ellipse ist, so haben wir gesehen, dass der zweite Kegelschnitt seine beiden reellen Brennpunkte auf der Normale des ersten Kegelschnitts hat; seine grosse Axe ist also nach dieser Normale gerichtet und ist gleich der Summe oder der Differenz der Radii vectores, welche von den beiden Brennpunkten nach dem Mittelpunkt der vorgegebenen Ellipse gezogen werden; diese Axe ist aber gleich der Hauptaxe dieser Ellipse, auf welcher der zweite Kegelschnitt normal ist: man schliesst also hieraus

endlich auf folgende sehr einfache Construction der vorgelegten Aufgabe:

Durch den Endpunkt A *des einen der beiden conjugirten Halbdurchmesser zieht man eine Gerade senkrecht gegen den zweiten Halbdurchmesser, und trägt auf dieser Geraden vom Punkte* A *aus zwei Segmente auf, die dem zweiten Halbdurchmesser gleich sind; die Endpunkte dieser beiden Segmente verbindet man mit dem Mittelpunkt der Curve durch zwei gerade Linien; den Winkel dieser beiden Linien und dessen Supplement halbirt man durch zwei neue Gerade: dann werden diese beiden neuen Geraden die Richtung der beiden Hauptaxen der Ellipse angeben und die Summe der beiden ersten Geraden wird der grossen Axe, ihre Differenz aber der kleinen Axe gleich sein.*

Der zweite Theil dieser Lösung, der sich auf die Länge der Axen bezieht, bietet eine Construction von zwei Wurzelgrössen dar, welche man in einigen analytischen Lösungen dieser Aufgabe findet, welche aber noch nicht so einfach construirt sind.

Der von uns verfolgte Weg scheint lang zu sein, weil wir, um eine Anwendung des Princips der zufälligen Relationen zu geben, Schritt für Schritt weiter gehen und die Hülfstheoreme angeben mussten, welche nöthig waren, um den Uebergang von dem Zufälligen zum Absoluten bei den Eigenschaften der Brennpunkte deutlich zu zeigen. Dieses wird man im Allgemeinen bei den Anwendungen dieses Princips nicht nöthig haben, wenn man sich mit demselben vertraut gemacht hat. Wir werden daher auch das Problem für den Raum kürzer lösen, obgleich es im Vergleich mit dem ersten einige Schwierigkeiten darbietet, dergleichen sich bei diesem nicht vorfanden.

Problem: *Wenn drei conjugirte Durchmesser eines Ellipsoids gegeben sind, so verlangt man der Grösse und Richtung nach die drei Hauptaxen dieser Oberfläche zu bestimmen.*

Wir wollen uns ein Hyperboloid mit einem Fach und seinen Asymptoten-Kegel denken. Die Tangenten-Ebene des Hyperboloids in einem Punkt m wird den Kegel in einer Hyperbel Σ schneiden, für welche die Quadrate ihrer Durchmesser den Quadraten *der* Durchmesser des Hyperboloids, welche ihnen respective parallel laufen, mit Ausnahme des Zeichens gleich sind.[56])

---

56) Dieses folgt daraus, dass ein Durchmesser der Hyperbel der Theil einer Tangente des Hyperboloids sein wird, welcher zwi-

Jetzt betrachten wir diese Hyperbel als den *excentrischen Kegelschnitt*[57]) einer Oberfläche des zweiten Grades, welche durch den Mittelpunkt des Hyperboloids geht. Diese Oberfläche wird normal sein gegen eine der Hauptaxen des Kegels[58]), welche dieselben sind, als die des Hyperboloids. Aber die eine der Hauptaxen dieser neuen Oberfläche ist nach der Normale für das Hyperboloid in dem Punkte *m* gerichtet und die beiden andern nach den beiden Hauptdurchmessern des Kegelschnitts Σ, welche die Tangenten für die Krümmungscurven des Hyperboloids sind. Wir können also das Theorem auf folgende Weise aussprechen, indem wir von dem Asymptoten-Kegel abstrahiren:

Wenn man in einem Punkte eines Hyperboloids mit einem Fach seine Normale und die Tangenten an seine Krümmungscurven zieht, und wenn man diese drei Geraden als die Hauptaxen einer Oberfläche des zweiten Grades betrachtet, welche durch den Mittelpunkt des Hyperboloids geht und welche zur Normale in diesem Punkt die eine der drei Hauptaxen dieses Hyperboloids hat, so werden die Quadrate der Durchmesser des excentrischen Kegelschnitts dieser Oberfläche, welche in der Tangenten-Ebene des Hyperboloids liegt, gleich, aber von entgegengesetzten Zeichen mit den Quadraten der parallelen Durchmesser des Hyperboloids sein.

Vermöge des Princips der zufälligen Relationen lässt sich dieses Theorem auf zwei andre Oberflächen, die einen Mittelpunkt haben, anwenden; man erhält dadurch diese Eigenschaft des Ellipsoids:

Wenn man bei einem Ellipsoid die Normale in einem Punkte m *und die beiden Tangenten an seine Krümmungscurven in diesem Punkte als die drei Hauptaxen einer Oberfläche des zweiten Grades betrachtet, welche durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geht und zur Normale in diesem Punkt die eine der drei Hauptaxen des Ellipsoids hat, so werden die Quadrate der Durchmesser*

---

schen zwei Seitenlinien des Asymptotenkegels liegt, von welchem Theil das Quadrat, bis aufs Zeichen, dem Quadrat *des* Durchmessers des Hyperboloids gleich ist, welcher parallel mit diesem Durchmesser geht; weil die durch diese Tangente und diesen Durchmesser gelegte Ebene das Hyperboloid in einer Hyperbel schneidet.

57) Es ist zum Verständniss des Folgenden nothwendig, vorläufige Kenntniss von der Note XXXI zu nehmen, wo wir erklären, was wir unter den *excentrischen Kegelschnitten* einer Oberfläche des zweiten Grades verstehen und wo wir verschiedene Eigenschaften dieser Curven angeben.

58) S. Note XXXI, Art. 11.

des excentrischen Kegelschnitts dieser Oberfläche, welcher in der Tangenten-Ebene des Ellipsoids liegt, gleich, aber von entgegengesetzten Zeichen mit den Quadraten der parallelen Durchmesser des Ellipsoids sein.

Dieser excentrische Kegelschnitt wird imaginär sein; er wird aber nichts desto weniger dazu dienen, die beiden andern excentrischen Kegelschnitte zu construiren, welche reell sein werden.

Es seien in der That $-b^2$ und $-c^2$ die Quadrate der beiden halben Hauptaxen dieses Kegelschnitts (indem b und c die beiden halben Hauptaxen der Durchschnittscurve des Ellipsoids mit einer Ebene sind, die parallel mit der durch den Punkt m gelegten Tangenten-Ebene ist); es sei b grösser als c; also wird $-c^2$ grösser als $-b^2$ sein, und die beiden Brennpunkte des imaginären Kegelschnitts werden auf der Axe c liegen. Auf der Normale des Ellipsoids trage man alsdann vom Punkte m aus zwei Segmente auf, die respective gleich b und c sind. In der Ebene, die durch diese Normale und durch eine mit der Axe c parallelen Linie bestimmt ist, beschreibe man eine Ellipse, welche zur halben grossen Axe das Segment $=b$ und zur Excentricität das Segment $=c$ hat. In der Ebene aber, welche durch die Normale und durch eine mit der Axe b parallelen Linie bestimmt ist, beschreibe man eine Hyperbel, welche zur halben Zwerchaxe das Segment c und zur Excentricität das Segment b hat.

Die auf diese Weise construirten Ellipse und Hyperbel werden die beiden gesuchten Curven sein, d. h. die beiden excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades, welche durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geht und zur Normale in diesem Punkt die eine der Hauptaxen des Ellipsoids hat. Folglich werden die beiden Kegel, welche zu ihren Grundflächen respective diese beiden Kegelschnitte und zu ihrem gemeinschaftlichen Scheitel den Mittelpunkt des Ellipsoids haben, zur gemeinschaftlichen Hauptaxe diese Hauptaxe des Ellipsoids haben (Note XXXI, Art. 11). Die beiden andern, diesen beiden Kegeln gemeinschaftlichen Hauptaxen werden gleichfalls die beiden andern Hauptaxen des Ellipsoids sein, weil man durch seinen Mittelpunkt zwei andre Oberflächen des zweiten Grades legen kann, welche zu excentrischen Kegelschnitten dieselben beiden gefundenen Curven haben und welche respective auf diesen beiden Hauptaxen des Ellipsoids normal sind. Die Frage über die Construction der Richtungen der drei Hauptaxen eines Ellipsoids reducirt sich also darauf, drei Hauptaxen zu finden, die *den* beiden Kegeln gemeinschaftlich sind, welche zu ihren End-

flächen die beiden in Rede stehenden Kegelschnitte haben. Diese drei Hauptaxen bilden in jedem der beiden Kegel ein System von drei conjugirten Axen: man muss also das System von drei conjugirten Axen suchen, die den beiden Kegeln gemeinschaftlich sind.

Hieraus schliesst man:

Wenn drei conjugirte Durchmesser eines Ellipsoids gegeben sind, so zieht man, um die Richtung seiner drei Hauptaxen zu finden, durch den Endpunkt A *des einen der gegebenen Durchmesser eine Linie senkrecht auf die Ebene der beiden andern; auf dieser nimmt man, vom Punkte* A *ausgehend, zwei Segmente an, die respective den beiden halben Hauptaxen der Ellipse gleich sind, die man über den beiden conjugirten Durchmessern construirt hat. Es sei* b *die grössere dieser beiden Axen und* c *die kleinere. Durch die Normale legt man zwei Ebenen, von denen die eine parallel mit dem Durchmesser* c *und die andre parallel mit dem Durchmesser* b *ist. In der ersten Ebene construirt man eine Ellipse, welche zur halben grossen Axe das Segment* b *und zur Excentricität das Segment* c *hat; in der zweiten Ebene eine Hyperbel, welche zur halben Hauptaxe das Segment* c *und zur Excentricität das Segment* b *hat. Den Mittelpunkt des Ellipsoids betrachtet man als den gemeinschaftlichen Scheitel zweier Kegel, welche diese Ellipse und diese Hyperbel respective zu ihren Grundflächen haben. Diese beiden Kegel werden sich in vier Seitenlinien schneiden, welche zu je zwei in sechs Ebenen liegen. Diese Ebenen werden sich je zwei in drei andern Geraden schneiden, welche die drei Hauptaxen des Ellipsoids sein werden.*

Um die Länge dieser Hauptaxen zu bestimmen, kann man auf jede von ihnen die drei gegebenen conjugirten Durchmesser senkrecht projeciren; dann wird das Quadrat jeder Axe gleich sein der Summe der Quadrate der Projectionen auf ihr.

Einfacher aber wird es, von folgendem Theorem Gebrauch zu machen, welches man leicht beweisen kann:

Die Normale in einem Punkt m *einer Oberfläche des zweiten Grades trifft die auf ihr senkrechten Diametral-Ebene und eine der Hauptebenen* P *in zwei Punkten, für welche das Product ihrer Entfernungen von dem Punkt* m *gleich ist dem Quadrat des halben Durchmessers der Oberfläche, welcher senkrecht auf der Hauptebene* P *ist.*

Man kann auch die Längen der Hauptaxen des Ellipsoids bestimmen, ohne ihre Richtungen zu kennen, indem man drei Oberflächen construirt, deren grosse Axen respective diesen drei Hauptaxen gleich sind. Dieses hängt von einem Theorem ab, welches wir beweisen wollen.

In einer Oberfläche, welche zu ihren Hauptaxen die Normale und die Tangenten der Krümmungscurven im Punkte *m* hat und welche durch den Mittelpunkt dieses Ellipsoids geht und in diesem Punkt die eine seiner Hauptebenen berührt, in dieser Oberfläche, sag' ich, ist das Quadrat der Halbaxe, welche nach der Normale gerichtet ist, gleich dem Product der Segmente, welche auf dieser Normale, vom Punkt *m* ausgehend, durch die Hauptebene und durch die auf dieser Normale senkrechten Diametral-Ebene gebildet werden.[59]) Nach dem vorhin ausgesprochenen Theorem ist also diese Axe der Oberfläche gleich *der* Axe des Ellipsoids, welche senkrecht auf der Hauptebene steht; so dass man dieses Theorem erhält:

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades so beschaffen sind, dass jede von ihnen ihren Mittelpunkt auf der andern hat und dass ihre drei Hauptaxen nach der Normale und nach den Tangenten der Krümmungscurven dieser andern gerichtet sind, so wird die Axe der ersten Oberfläche nach der Normale der zweiten gerichtet und derjenigen Axe der zweiten Oberfläche gleich sein, welche in der Normale der ersten liegt.

Woraus man schliesst:

Wenn man die Normale in einem Punkt einer Oberfläche des zweiten Grades und die Tangenten der beiden Krümmungscurven in diesem Punkt als die drei Hauptaxen betrachtet, welche dreien Oberflächen gemeinschaftlich sind, die durch den Mittelpunkt der gegebenen gehen und respective die drei Diametral-Ebenen berühren, so werden die Hauptaxen dieser drei Oberflächen, welche nach der Normale der gegebenen gerichtet sind, respective den drei Hauptaxen dieser Oberflächen gleich sein.

Wenn die gegebene Oberfläche ein Ellipsoid ist, welches nur durch drei conjugirte Durchmesser bestimmt ist, so ha-

---

59) Es folgt dieses aus dem in der elementaren Theorie der Oberflächen des zweiten Grades bekannten Theorem: „Die Tangenten-Ebene in einem Punkt der Oberfläche und die Ebene, welche durch diesen Punkt senkrecht auf einen der drei Hauptdurchmesser gelegt wird, bilden auf diesem Durchmesser, vom Mittelpunkt der Oberfläche ausgehend, zwei Segmente, deren Product dem Quadrat des halben Durchmessers gleich ist."

ben wir gesehen, wie man die den drei andern Oberflächen gemeinschaftlichen excentrischen Kegelschnitte findet, was zur Construction dieser Oberflächen hinreicht. Das letzte Theorem könnte also dazu dienen, die Aufgabe aufzulösen, die Längen der drei Hauptdurchmesser des Ellipsoids zu bestimmen, ohne ihre Richtungen zu kennen. Aber diese Art wäre schwierig und wenig praktisch. Nichts desto weniger scheint uns das Theorem, worauf sie beruht, zu verdienen, dass es bekannt ist, da es eine schöne allgemeine Eigenschaft der Oberflächen des zweiten Grades ausdrückt.

Die vorhergehenden Theoreme führen ohne Schwierigkeit zu mehren andern, die einiges Interesse haben.

Durch den Endpunkt m des einen der drei conjugirten Durchmesser wollen wir zwei Gerade ziehen, die gleich und parallel den beiden andern sind; und wollen eine Ellipse E beschreiben, welche diese beiden Geraden zu conjugirten Durchmessern hat. Der Kegel, dessen Scheitel im Mittelpunkt des Ellipsoids liegt und dessen Basis diese Ellipse ist, trifft das Ellipsoid in einer zweiten Ellipse E^1, deren Ebene parallel mit der der ersten ist. Diese beiden Ellipsen sind homothetisch. Die zweite Ellipse hat ihren Mittelpunkt auf dem Durchmesser, der nach dem Punkt m geht. Es sei m^1 dieser Mittelpunkt, dann findet man leicht $0m = 0m^1 \sqrt{3}$.

Diese zweite Ellipse besitzt die Eigenschaft, dass, wenn man auf ihr drei solche Punkte A^1, B^1, C^1 annimmt, dass der Mittelpunkt ihrer mittlern Entfernungen im Centrum der Ellipse liegt, dass dann die drei Geraden OA^1, OB^1, OC^1 drei conjugirte Durchmesser des Ellipsoids werden. Dieses ist eine Eigenschaft der Oberflächen des zweiten Grades, welche leicht zu beweissen ist.

Jetzt wollen wir den Punkt m^1 als den homologen zum Punkt m in Bezug auf den Punkt O, der als *centre de similitude* angenommen wird, betrachten, und drei Oberflächen annehmen, die homothetisch sind mit den drei Oberflächen des vorhergehenden Theorems, welche ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt in m haben und welche, indem sie durch den Mittelpunkt O des Ellipsoids gehen, respective normal sind gegen die drei Hauptaxen desselben. Diese drei neuen Oberflächen werden ihren *centre de figure* in m^1 haben; sie werden durch den Punkt O gehen, welcher der *centre de similitude* ist; sie werden in diesem Punkt respective Tangenten sein für die drei ersten Oberflächen; und werden folglich normal sein respective auf den drei Hauptaxen des Ellipsoids; und werden alle drei dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, welche in Ebenen liegen, die den Ebenen der

excentrischen Kegelschnitte der drei ersten Oberflächen parallel sind.

Es seien *b* und *c* die beiden halben Hauptdurchmesser des Kegelschnitts *E*, b^1 und c^1 die beiden halben Hauptdurchmesser des Kegelschnitts E^1. Diese werden respective den ersten parallel sein und man wird haben:

$$b^1 = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad c^1 = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Um die beiden excentrischen Kegelschnitte der drei neuen Oberflächen zu bilden, muss man also durch den Mittelpunkt m^1 des Kegelschnitts E^1 ein Perpendikel auf der Ebene dieser Curve errichten, auf dieser Geraden zwei Segmente gleich b^1 und c^1 abschneiden und in den beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen, die durch die Normale und durch die beiden Axen b^1 und c^1 gelegt sind, respective eine Ellipse und eine Hyperbel beschreiben, von denen die erstere zur halben grossen Axe b^1 und zur Excentricität c^1 und die andre zur halben Zwerchaxe c^1 und zur Excentricität b^1 hat. Diese Ellipse und diese Hyperbel werden die beiden excentrischen Kegelschnitte der drei neuen Oberflächen sein.

Die Kegel, welche zu ihrem Scheitel den Punkt *O* haben und deren Grundflächen diese beiden Kegelschnitte sind, werden ihre Hauptaxen nach den Hauptaxen des Ellipsoids gerichtet haben.

Man erhält dadurch folgendes Theorem:

Wenn drei conjugirte Durchmesser OA, OB, OC *eines Ellipsoids gegeben sind, so sucht man, um der Grösse und Richtung nach die drei Hauptaxen zu bestimmen, zuerst der Grösse und Richtung nach die beiden halben Hauptaxen einer Ellipse, welche durch die drei Punkte* A, B, C *geht und deren Centrum der Mittelpunkt der mittlern Entfernungen dieser drei Punkte ist. Es seien* b *und* c *die beiden halben Hauptaxen. In dem Mittelpunkt der Ellipse errichtet man auf ihrer Ebene ein Perpendikel, auf welchem man zwei Segmente* b^1 *und* c^1 *respective gleich* b *und* c *abschneidet. In den beiden auf einander senkrechten Ebenen, die durch dieses Perpendikel und die beiden Axen* b *und* c *bestimmt sind, beschreibt man zwei Kegelschnitte, von denen die eine, welche eine Ellipse ist, zur halben grossen Axe das Segment* b^1 *und zur Excentricität das Segment* c^1 *hat, und die andre, welche eine Hyperbel ist, zur halben Zwerchaxe das Segment* c^1 *und zur Excentricität das Segment* b^1 *hat. Dann werden*

1) *die beiden Kegel, deren gemeinschaftlicher Scheitel der Punkt* O *ist und welche zu ihren Grundflächen respective diese Ellipse und Hyperbel haben, dieselben Hauptaxen haben, als das Ellipsoid; und*

2) *werden in den drei Oberflächen, welche diese Ellipse und diese Hyperbel zum excentrischen Kegelschnitt haben und welche durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehen, die drei grossen Axen gleich den drei Hauptaxen des Ellipsoids, dividirt durch* $\sqrt{3}$, *sein.*

Dieses Theorem bietet, wie man sieht, eine zweite Auflösung der Aufgabe dar, der Grösse und Richtung nach die drei Hauptaxen eines Ellipsoids zu finden, wenn drei conjugirte Durchmesser desselben gegeben sind. Und diese Lösung ist eben so einfach als die erste; sie hat aber den Vortheil, dass sich daraus verschiedene Folgerungen ableiten lassen, welche die erste Lösung nicht lieferte. Man schliesst z. B. daraus unmittelbar:

Wenn drei conjugirte Durchmesser eines Ellipsoids in drei gegebenen Punkten endigen sollen, und wenn eine der drei Hauptaxen des Ellipsoids eine gegebene Länge haben soll, so ist der Mittelpunkt des Ellipsoids unbestimmt und hat zu seinem geometrischen Ort eine Oberfläche des zweiten Grades, deren Centrum im Mittelpunkt der mittlern Entfernungen der drei Punkte liegt, welche die Endpunkte der drei conjugirten Durchmesser des Ellipsoids sein sollen.

Man kann die Längen von zwei der drei Hauptdurchmesser des Ellipsoids geben, und der Mittelpunkt des Ellipsoids ist noch unbestimmt; er hat dann zu seinem geometrischen Ort die Curve doppelter Krümmung, welche durch den Durchschnitt zweier Oberflächen zweiten Grades entsteht, die dieselben excentrischen Kegelschnitte haben; diese Curve ist eine *Krümmungscurve* beider Oberflächen.

Wenn die drei Hauptdurchmesser des Ellipsoids der Länge nach gegeben sind, so genügen acht Ellipsoide dieser Aufgabe, ihre Centra sind die Punkte, welche dreien Oberflächen gemeinschaftlich sind, die dieselben excentrischen Kegelschnitte haben.

Was die Richtung der Hauptdurchmesser der Ellipsoide betrifft, so hat man dieses Theorem:

Wenn drei conjugirte Durchmesser eines Ellipsoids sich in drei gegebenen Punkten endigen sollen, so werden, welches auch der Punkt im Raum sein mag, den man zum Centrum dieser Oberfläche annimmt, ihre drei

Hauptaxen immer die drei Hauptaxen sein, welche zweien Kegeln gemeinschaftlich sind, die dieses Centrum zum Scheitel haben und die respective durch zwei feste Kegelschnitte gehen, deren Construction nur von der Lage der drei gegebenen Punkte abhängt.

Diese Kegelschnitte sind von der Beschaffenheit, dass der Kegel, welcher die eine von ihnen zur Basis und einen Punkt der andern Curve zum Scheitel hat, durch Umdrehung entsteht; das Ellipsoid, welches sein Centrum im Scheitel des Kegels hat, wird ebenfalls durch Umdrehung entstehen. Es ergiebt sich also daraus folgendes Theorem:

Wenn man ein Revolutions-Ellipsoid verlangt, von dem drei conjugirte Durchmesser in drei gegebenen Punkten endigen, so genügen dieser Forderung unendlich viele Ellipsoide. Ihre Mittelpunkte liegen auf zwei Kegelschnitten, einer Ellipse und einer Hyperbel, die in zwei auf einander senkrecht stehenden Ebenen liegen und von denen die eine zu seinen Scheiteln und Brennpunkten die Brennpunkte und Scheitel des andern hat.

Note XXVI.

(Fünfte Epoche, §. 17.)

Ueber das Imaginäre in der Geometrie.

Die Betrachtung der zufälligen Relationen und Eigenschaften einer Figur oder eines geometrischen Systems ist geeignet für das Wort *imaginär*, welches gegenwärtig sehr häufig und mit Vortheil bei den rein geometrischen Speculationen gebraucht wird, eine Erklärung zu geben.

In der That, man kann den Ausdruck *imaginär* betrachten, als bezeichne es nur einen Zustand einer Figur, in welchem gewisse Partien, die in einem andern Zustand der Figur reell waren, aufgehört haben zu existiren. Denn man kann sich nicht anders eine Idee von einem imaginären Object machen, als indem man sich zugleich ein Object des Raums in einem Zustand der reellen Existenz denkt; so dass die Idee des *Imaginären* ohne Sinn sein würde, wenn sie nicht immer begleitet wäre von der wirklichen Idee einer

reellen Existenz desselben Gegenstandes, auf den man sie anwendet. Dieses sind aber die Relationen und Eigenschaften, die wir *zufällige* genannt haben, welche den Schlüssel zu dem *Imaginären* in der Geometrie liefern.

Man sieht aber hieraus, dass man sehr leicht, wenn man will, beim Raisonnement die Betrachtung des Imaginären vermeiden kann: es würde hinreichen, neben der Figur, von welcher man irgend eine Eigenschaft zu beweisen hat, eine Figur derselben Natur anzunehmen, aber in einem allgemeinen Zustand der Construction, in welchem die zufälligen Eigenschaften, welche in der gegebenen Figur imaginär sind, reell werden. Dieses ist wirklich das, was man stillschweigend thut, indem man über imaginäre als über reelle Objecte raisonnirt; so dass man sagen kann, der Gebrauch des Worts imaginär ist eine abgekürzte Art sich auszudrücken, und welcher bedeutet, dass das Raisonnement, welches man anstellt, sich auf einen andern allgemeinen Zustand der Figur anwendet, in welchem die Partien, über die man Betrachtungen anstellt, wirklich vorhanden sind, statt imaginär zu sein, wie in der vorgegebenen Figur. Und da nach dem Princip der zufälligen Relationen oder, wenn man will, nach dem Princip der Continuität, die Wahrheiten, welche für den einen von zwei allgemeinen Zuständen der Figur bewiesen sind, sich auch auf den andern Zustand anwenden, so sieht man, dass der Gebrauch und die Betrachtung des Imaginären sich vollkommen gerechtfertigt finden.

Wir müssen hier eine wichtige Bemerkung machen:

Wenn eine Figur, in welcher sich imaginäre Partien finden, gegeben ist, so kann man sich nach dem Gesagten immer eine andre von eben so allgemeiner Construction als die erste denken, in welcher diese Partien, welche zuerst imaginär waren, reell sind; aber, und hierin besteht unsre Bemerkung, es ist niemals zu raisonniren oder zu operiren an der Figur selbst, indem man gewisse Partien, welche darin imaginär sind, als reell betrachtet. Wenn z. B. ein durch die Rechnung gegebener Ausdruck zur Bestimmung eines Punkts auf einer Geraden, imaginär ist, so würde man einen sehr bedeutenden Fehler begehen, wenn man diesen Punkt construiren wollte, als wenn sein Ausdruck reell wäre. Der auf diese Weise construirte Punkt würde weder zu der Figur, noch zu der Aufgabe, die vorgelegt ist, gehören, und alle aus der Betrachtung dieses Punkts abgeleiteten Resultate würden falsch sein.

So sind in jedem System von conjugirten Durchmessern der Hyperbel die Richtungen der beiden Durchmesser reell,

aber die Länge des einen dieser Durchmesser ist immer imaginär. Das Quadrat dieser Länge ist reell, und die allgemeinen Eigenschaften der Ellipse, in welche nur die Quadrate der conjugirten Durchmesser eingehen, werden sich auf die Hyperbel, wie auf die Ellipse anwenden lassen; aber die Eigenschaften, bei denen nur die erste Potenz dieser Längen gebraucht wird, werden bei der Hyperbel nicht mehr ihre Anwendung finden, weil man dadurch, dass man die imaginäre Axe der Hyperbel construiren wollte, indem man sie reell annähme, einen Fehler begehen würde. Die auf diese Weise construirte Linie und der dazu gehörige Endpunkt würden nicht mehr zu der vorgelegten Figur und Aufgabe gehören, sondern zu einer andern Figur und zu einer andern Aufgabe.

Es wäre interessant, die Verhältnisse und Correlationen aufzusuchen, welche zwischen den Eigenschaften der beiden Figuren stattfinden können, bei denen man in der einen die Partien, welche in der andern imaginär sind, construirt hat, indem man sie als reell annimmt. 60) Dergleichen sind die gleichseitige Hyperbel und der über der Hauptaxe derselben, als Durchmesser, beschriebene Kreis. Jede Chorde des Kreises, die senkrecht auf dieser Axe steht, hat ein reelles Quadrat: wenn der Fusspunkt derselben auf dieser Axe innerhalb des Kreises fällt, so wird die Chorde auch eine reelle Länge haben; wenn aber der Fusspunkt ausserhalb des Kreises fällt, so ist diese Länge imaginär, ihr Quadrat dagegen reell. Wenn man sie construirt, indem man sie reell annimmt, so wird ihr Endpunkt einen Punkt bestimmen, der einer gleichseitigen Hyperbel angehört. Und die in Rede stehende Chorde wird sich verschiedener Eigenschaften erfreuen, je nachdem sie im Kreis oder in der Hyperbel genommen wird. Beim Kreis z. B. bilden die beiden Geraden, welche vom Endpunkt der Chorde nach den beiden Endpunkten des Durchmessers gezogen werden, unter einander einen rechten Winkel, und bei der Hyperbel bilden diese Linien einen Winkel von veränderlicher Grösse.

Carnot hat schon in seinem ***Traité de la Corrélation des figures de Géométrie*** und in seiner ***Géométrie de position*** über die Correlation der Figuren, wovon wir sprechen, und über die der algebraischen Formeln, welche ihnen in der

60) In der Analysis kommt dieses bei gewissen Gliedern der Formeln, welche zu dieser Aufgabe gehören, darauf zurück, $\sqrt{+1}$ in $\sqrt{-1}$ umzuwandeln, oder allgemeiner die Einheit in eine ihrer Wurzeln.

Analysis entsprechen, Betrachtungen angestellt; da aber der Hauptgegenstand der Arbeiten dieses berühmten Gelehrten in dieser Materie die *Correlation* der Figuren war, welche in den algebraischen Ausdrücken nur durch einfache Aenderung der Zeichen der Variabeln selbst, und nicht ihrer Functionen, von einander verschieden sind, so ist die Correlation von Figuren, welche, wie wir gesagt haben, dadurch unterschieden sind, dass man in der einen als reell einen Ausdruck construirt, der in der andern imaginär ist, so ist diese Correlation, sag' ich, ein Gegenstand für ganz neue Untersuchungen, von denen es uns scheint, dass sie zu einigen allgemeinen Gesetzen der Ausdehnung führen können, welche den Einfluss der geometrischen Doctrinen vermehren dürften.

Wir führen noch in Bezug auf diesen Gegenstand den berühmten Lambert an, der einen sehr vorzüglichen und sehr nützlichen Gebrauch von den imaginären Verhältnissen gemacht hat, welche sich aus der Vergleichung der gleichseitigen Hyperbel und des Kreises, wenn beide einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, ableiten. Er erdachte eine Art von hyperbolischer Trigonometrie, vermöge deren er reelle Auflösungen für die Fälle fand, in denen die gewöhnliche Trigonometrie nur imaginäre gab, und umgekehrt.

Note XXVII.

(Fünfte Epoche, §. 23.)

Ueber den Ursprung der Theorie der reciproken Polären und über den der Worte Pol und Poläre.

Nachdem Monge in seiner *Géométrie descriptive* bewiesen hatte, dass, wenn der Scheitel eines Kegels, welcher einer Oberfläche des zweiten Grades umgeschrieben ist, eine Ebene durchläuft, dass die Ebene der Berührungscurve beständig durch einen und denselben Punkt geht, und dass, wenn der Scheitel des Kegels eine Gerade durchläuft, die Berührungsebene immer durch eine zweite Gerade geht; zeigten Livet und Brianchon, dass, wenn der Scheitel des Kegels eine Oberfläche des zweiten Grades durchläuft, die Berüh-

rungsebene eine andre Oberfläche des zweiten Grades einhüllt. (*Journal de l'école polytechnique*, Cah. XIII, 1806.)

In demselben Memoire wendet Brianchon diese Theorie an, um aus dem berühmten Theorem des Pascal über das den Kegelschnitten eingeschriebene Sechseck ein nicht weniger schönes und nicht weniger brauchbares Theorem über das den Kegelschnitten umgeschriebene Sechseck abzuleiten, dass nämlich *die drei Diagonalen dieses Sechsecks, welche je zwei und zwei gegenüberliegende Scheitel verbinden, durch denselben Punkt gehen.* Dieses war das erste Beispiel eines solchen Gebrauchs von der Theorie der Polären, wobei sich auf eine höchst merkwürdige Weise, vermöge der Analogie dieses Theorems mit dem des Pascal, die *Dualität* der ebenen Figuren darstellt.

Später bedienten sich Encontre und Stainville dieser Theorie zu einer wirklichen Transformation der Figur. Es handelte sich darum, um einem Kegelschnitt ein Polygon umzuschreiben, dessen Scheitel auf gegebenen Geraden liegen. Diese Geometer bemerkten, dass nach der Theorie der *Pole* dieses Problem auf ein andres zurückgeführt werden könne, in welchem verlangt wird, in einen Kegelschnitt ein Polygon einzuschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen; ein Problem, dessen Lösung man kannte. (*Annales des mathématiques*, T. I, p. 122 u. 190.) [61]

In diesem ausgezeichneten Journal, welches seit 20 Jahren so wesentlich zu den Fortschritten der Mathematik und besonders der Geometrie beigetragen hat, finden sich zuerst die Benennungen: *Pol*, *ebene Poläre* und *gerade Poläre*, welche den Gebrauch dieser Theorie sehr erleichtert haben.

Servois nannte zuerst *Pol* einer Geraden den Punkt, durch welchen alle Berührunglinien der Winkel gehen, die einem Kegelschnitt umgeschrieben sind und ihren Scheitel auf der geraden Linie haben; dann nannte Gergonne diese Gerade die *Poläre* des Punkts und dehnte diese Benennungen auf den Raum aus. (*Annales des mathématiques*, T. I, p. 337 und T. III, p. 297.) Sie sind von allen Geometern, welche über die Oberflächen des zweiten Grades geschrieben haben, angenommen.

---

61) Das Historische dieses Problems haben wir in der Note XI gegeben.

Note XXVIII.

(Fünfte Epoche, §. 27.)

Verallgemeinerung der Theorie der stereographischen Projectionen. — Oberflächen des zweiten Grades, welche vier andre berühren.

Die beiden Theoreme, von denen man in der Theorie der stereographischen Projectionen, als Methode der Aufsuchung betrachtet, Gebrauch macht, werden folgende in dieser verallgemeinerten Theorie, wie wir sie genannt haben, d. h. wenn man den Ort des Auges in irgend einem Punkt des Raums annimmt.

Wenn man die Perspective einer Oberfläche des zweiten Grades auf irgend einer Ebene bildet, während sich das Auge in einem Punkt des Raums befindet, der willkührlich ausserhalb der Oberfläche angenommen ist, so werden:

1) *die Projectionen der ebenen Curven, welche auf der Oberfläche gezogen sind, Kegelschnitte sein, welche alle einen doppelten Contact reell oder imaginär mit einem einzigen Kegelschnitt haben, der die Perspective des scheinbaren Umrisses der Oberfläche ist;*

2) *der Pol der Berührungssehne jedes Kegelschnitts mit dem einzigen Kegelschnitt wird die Projection des Scheitels eines Kegels sein, der die Oberflächen in der ebenen Curve, von welcher dieser erste Kegelschnitt die Projection ist, berührt.*

Zu diesen beiden ersten Principien ist es von Nutzen, noch dieses dritte hinzuzufügen:

Die Projectionen der beiden reciproken geraden Polären in Bezug auf die Oberfläche sind zwei Gerade, von denen jede durch den Pol der andern geht, wenn diese Pole in Bezug auf den einzigen Kegelschnitt genommen werden.

Vermittelst dieser drei Theoreme gelangt man mit ausserordentlicher Leichtigkeit zu der Entdeckung sehr vieler Eigenschaften eines Systems von Kegelschnitten, welche einem einzigen Kegelschnitt eingeschrieben sind, wobei man, so zu sagen, gar keinen Beweis nöthig hat, weil es hin-

reicht, die augenfälligen Eigenschaften der Curven, welche auf der Oberfläche des zweiten Grades gezeichnet sind, im Raum zu betrachten und sie auf die Ebene überzutragen.

Von dieser Theorie der Kegelschnitte, welche in einer Ebene beschrieben sind, ist es leicht, sich zur analogen Theorie im Raum zu erheben, d. h. zu den Eigenschaften eines Systems von Oberflächen des zweiten Grades, welche in eine einzige Oberfläche des zweiten Grades eingeschrieben sind. Wir sagen von Oberflächen, die eine sei in die andre eingeschrieben, wenn sich zwei Oberflächen ihrer ganzen Ausdehnung nach in einer Curve berühren. Für zwei Oberflächen des zweiten Grades wird diese Berührungscurve eine ebene Curve.

Man gelangt auf diese Weise zu vielen Eigenschaften der Oberflächen zweiten Grades und zu der Lösung einer grossen Anzahl von Aufgaben, die sich auf die Berührung dieser Oberflächen beziehen und von denen alle die auf die Berührung von Kugeln bezüglichen nur besondre Fälle sind. Und das, wodurch diese Theorie den Geometern, welche die möglich grösste Allgemeinheit lieben, genügen kann, liegt darin, dass alle die Fragen selbst in ihrer Allgemeinheit nur Corollarien einer einzigen sind, welche in ihrem Ausspruch und in ihrer Lösung sie alle in sich fasst; nämlich:

Problem. — *Es seien vier Oberflächen des zweiten Grades gegeben, welche einer einzigen Oberfläche des zweiten Grades* E *eingeschrieben sind, es soll eine fünfte Oberfläche desselben Grades beschrieben werden, welche die vier ersten berührt und ebenfalls in die Oberfläche* E *eingeschrieben ist.*

Die Lösung dieser Aufgabe ist sehr einfach; um sie aber elegant und präcis darzustellen, wird es nützlich sein, einige Definitionen vorauszuschicken.

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades in eine dritte Oberfläche desselben Grades eingeschrieben sind, so schneiden sich die erstern in zwei ebenen Curven, welche selbst reell oder imaginär sein können, deren Ebenen aber stets reell sind; wir wollen diese Ebenen, analog mit den *Symptosen-Axen* (*axes de symptose*) bei den Kegelschnitten, *Symptosen-Ebenen* (*plans de symptose*) der beiden Oberflächen nennen.

Die beiden Oberflächen erfreuen sich auch der Eigenschaft, dass man ihnen zwei Kegel des zweiten Grades umschreiben kann, welche wieder selbst reell oder imaginär sein können, deren Scheitel aber immer reell sind. Wir wollen uns zur Bezeichnung dieser beiden Punkte des Ausdrucks *centres d'homologie* bedienen, welchen Poncelet gebraucht hat.

Wir werden ferner *Symptosen-Linie* (*droite de symptose*) der beiden Oberflächen jede Gerade nennen, welche in einer der beiden Symptosen-Ebenen liegt, und *plan d'homologie* jede Ebene, welche durch einen ihrer beiden Centra der Homologie geht.

Denken wir uns jetzt drei Oberflächen des zweiten Grades, welche in Eine Oberfläche desselben Grades eingeschrieben sind, so werden je zwei von ihnen zwei, alle zusammen also sechs Symptosen-Ebenen haben.

Man beweist, dass *diese sechs Ebenen, zu je drei, durch vier gerade Linien gehen, und dass diese vier Geraden sich in einem und demselben Punkt des Raums schneiden*; so dass diese sechs Symptosen-Ebenen die vier Seitenflächen und die beiden Diagonalflächen einer vierseitigen Pyramide sind.

Jede der vier Geraden, durch welche je drei der sechs Symptosen-Ebenen gehen, nennen wir eine den drei Oberflächen *gemeinschaftliche Symptosen-Linie* (*droite de symptose commune aux trois surface*), und jeden Punkt in einer dieser vier Linien *einen gemeinschaftlichen Symptosenpunkt* (*un point de symptose commune aux trois surface*).

Betrachten wir die Mittelpunkte der Homologie der drei Oberflächen, so haben je zwei von diesen zwei, alle zusammen also sechs Mittelpunkte der Homologie.

Man beweist, dass *diese sechs Centra der Homologie, zu je drei, auf vier geraden Linien liegen, und dass diese vier Geraden sich in Einer Ebene befinden*; so dass die sechs Centra der Homologie die vier Scheitelpunkte und die beiden Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks sind.

Wir nennen eine den drei Oberflächen *gemeinschaftliche Linie der Homologie* (*droite d'homologie*) jede der vier Geraden, auf welchen je drei der sechs Centra der Homologie der drei Oberflächen liegen, und eine den drei Oberflächen *gemeinschaftliche Ebene der Homologie* (*plan d'homologie*) jede Ebene, welche durch eine dieser vier Geraden gelegt ist.

Denken wir uns vier Oberflächen des zweiten Grades, welche Einer Oberfläche desselben Grades eingeschrieben sind, so zeigt man, dass *diese vier Oberflächen acht Symptosenpunkte haben, die ihnen gemeinschaftlich sind*, d. h. dass es im Raum acht Punkte giebt, von denen sich jeder in einer Symptosen-Ebene von je zwei der vier Oberflächen befindet; so dass jeder dieser acht Punkte der gemeinschaft-

liche Durchschnittspunkt von sechs der zwölf Symptosen-Ebenen ist, welche man erhält, indem man die vier Oberflächen zu je zwei zusammenstellt.

Ebenso beweist man, dass *die vier Oberflächen acht gemeinschaftliche Ebenen der Homologie haben*, d. h. dass es acht Ebenen giebt, von denen jede durch einen Mittelpunkt der Homologie je zweier der vier Oberflächen geht. Jede von diesen acht Ebenen enthält also sechs von den zwölf Mittelpunkten der Homologie, welche zu je zwei der vier Oberflächen gehören.

Dieses Alles vorausgesetzt, können wir die Lösung der vorgelegten Aufgabe mit Leichtigkeit so aussprechen:

Erste Lösung: Man construire die acht gemeinschaftlichen Ebenen der Homologie der vier Oberflächen und ihre acht gemeinschaftlichen Symptosen-Punkte. Man nehme in Bezug auf irgend eine der vier Oberflächen A die Pole der acht Ebenen der Homologie und verbinde durch eine Gerade jeden dieser Pole mit jedem der acht Symptosen-Punkte. Auf diese Weise wird man 64 Gerade erhalten, welche die Oberfläche A in 128 Punkten treffen, von denen jeder der Berührungspunkt einer gesuchten Oberfläche mit der Oberfläche A sein wird.

Zweite Lösung: Nachdem man, wie bei der ersten Lösung, die acht gemeinschaftlichen Symptosen-Punkte und die acht gemeinschaftlichen Ebenen der Homologie der vier Oberflächen construirt hat, nehme man die Polar-Ebenen dieser acht Symptosen-Punkte in Bezug auf irgend eine der vier Oberflächen A. Von diesen acht Polar-Ebenen wird jede die acht Ebenen der Homologie in acht Geraden schneiden; man wird also 64 Gerade erhalten. Durch jede dieser Linien lege man zwei Tangenten-Ebenen an die Oberfläche A: dann wird jeder Berührungspunkt dieser 128 Tangenten-Ebenen ein Punkt sein, in welchem eine der gesuchten Oberflächen die Oberfläche A berührt.

Aus jeder dieser beiden Lösungen sieht man, dass die Aufgabe in ihrer grössten Allgemeinheit 128 Lösungen zulässt.

Für die Discussion der sehr zahlreichen, in diesem allgemeinen Problem enthaltenen, besondern Fälle, bei denen die Zahl der Lösungen beträchtlich geringer sein kann, ist es gut zu bemerken, dass diese Lösungen zu je 16 für jede Ebene oder für jeden Symptosenpunkt, der den drei Oberflächen gemeinschaftlich ist, gegeben sind; so dass eben so vielmal 16 Lösungen verschwinden, als Ebenen der Ho-

mologie oder Symptosenpunkte, die den vier Oberflächen gemeinschaftlich sind, fehlen.

Wenn z. B. die vier Oberflächen Kugeln sind, so haben sie nur Einen Symptosenpunkt (dieses ist der Punkt, welchen Gaultier *centre radical* der vier Kugeln genannt hat); es giebt also auch nur 16 Lösungen.

Es kann für den ersten Augenblick wunderbar scheinen, dass vier Kugeln, welche irgendwie im Raum liegen, und eine fünfte, die jene berührt, als fünf Oberflächen des zweiten Grades betrachtet werden, welche in eine einzige Oberfläche desselben Grades eingeschrieben sind. Man sieht davon aber leicht den Grund ein.

Wenn in einer Oberfläche des zweiten Grades die eine Axe Null wird, so reducirt sie sich auf einen Kegelschnitt; jede andre Oberfläche des zweiten Grades, die durch diesen Kegelschnitt geht, berührt denselben in allen seinen Punkten und kann als ihm umgeschrieben betrachtet werden. Mehre Oberflächen des zweiten Grades also, welche durch einen und denselben Kegelschnitt gehen, erfreuen sich der Eigenschaften eines Systems von Oberflächen, die einer und derselben Oberfläche des zweiten Grades umgeschrieben sind, welche Oberfläche in diesem Fall die eine ihrer Axen gleich Null hat und sich auf einen Kegelschnitt reducirt.

Wenn wir bemerken, dass die Ebene dieses Kegelschnitts in Bezug auf zwei beliebige der Oberflächen eine Symptosen-Ebene ist, und dass der Kegelschnitt imaginär werden kann, obwohl die Ebene reell ist, so schliesst man daraus vermöge des ***Princips der Continuität*** oder des ***der zufälligen Relationen***, dass mehre Oberflächen des zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Symptosen-Ebene haben, als eben so viele Oberflächen betrachtet werden können, die in eine einzige Oberfläche des zweiten Grades eingeschrieben sind.

Nun kann man annehmen, dass die den Oberflächen gemeinschaftliche Symptosen-Ebene in der Unendlichkeit liege; dann werden die Oberflächen ähnlich sein und ähnlich liegen. ***Es können*** also ***mehre Oberflächen des zweiten Grades, die unter einander ähnlich sind und ähnlich liegen, als ein System von Oberflächen des zweiten Grades betrachtet werden, welche alle in eine einzige Oberfläche desselben Grades eingeschrieben sind.***

So ist es daher bewiesen, dass die Auflösungen, welche wir für eine Oberfläche des zweiten Grades, die vier andre tangirt und wie diese einer Oberfläche desselben Grades eingeschrieben ist, gegeben haben, sich auch auf die Construc-

tion einer Kugel anwenden lassen, welche vier andre berührt, und allgemeiner noch auf die Construction einer Oberfläche des zweiten Grades, welche tangirend und homothetisch mit vier andern ist.

Note XXIX.

(Fünfte Epoche, §. 30.)

Beweis eines Theorems, aus dem das Princip der Dualität folgt.

Das in Rede stehende Theorem kann nicht, wie für den Fall ebener Figuren, aus den Eigenschaften der *supplementären* Figuren auf der Kugel abgeleitet werden; sein directer Beweis ist aber sehr leicht. Er beruht auf folgendem Satz der Elementar-Geometrie. „Wenn man von einem festen Punkt Radien nach den verschiedenen Punkten einer Ebene zieht und auf diesen Radien (oder auch auf deren Verlängerungen) von dem festen Punkte ausgehend Linien aufträgt, welche den inversen Werthen dieser Radien proportional sind, so werden die Endpunkte dieser Linien auf einer Kugel liegen, die durch den festen Punkt geht und deren Mittelpunkt auf dem vom festen Punkt auf die Ebene gefällten Perpendikel liegt."

Hieraus folgt, dass die Ebenen, welche durch die Endpunkte dieser Linien senkrecht gegen die Radien gelegt werden, alle durch einen und denselben Punkt dieses Perpendikels gehen werden, welcher der Endpunkt des Durchmessers der Kugel sein wird.

Für eine andre Ebene erhält man einen andern correspondirenden Punkt.

Nun muss man beweisen, dass, *wenn mehre Ebenen durch einen und denselben Punkt gehen, ihre correspondirenden Punkte in einerlei Ebene liegen.* Jeder dieser Ebenen wird eine Kugel entsprechen, und alle diese Kugeln werden durch einen Punkt O gehen, welcher auf der vom festen Punkt S nach dem Durchschnittspunkt aller Ebenen gezogenen geraden Linie liegt.

Die Gerade SO ist also eine gemeinschaftliche Sehne aller Kugeln, und die Ebene, welche durch den Punkt O senk-

recht auf diese Gerade gelegt wird, geht durch den Endpunkt *des* Durchmessers jeder Kugel, der von dem Punkt *S* gezogen wird. Aber der Endpunkt dieses Durchmessers ist auf jeder Kugel der *correspondirende* Punkt zu der Ebene, welcher diese Kugel entspricht. Es liegen also alle diese correspondirenden Punkte in Einer Ebene.

Hieraus folgt, dass die Figuren, welche im Raum, wie wir im Texte selbst angegeben haben, construirt sind, sich der Eigenschaften der *Dualität* erfreuen; so wie die, deren Construction in der Ebene sich aus den supplementären Figuren der Kugel ergab.

Note XXX.

(Fünfte Epoche, §. 31.)

Ueber die reciproken Curven und Oberflächen des Monge. — Verallgemeinerung dieser Theorie.

Reciproke Curven und Oberflächen sind folgende:

Es seien x, y die Coordinaten eines Punkts einer ebenen Curve, dann sind die des entsprechenden Punkts der *reciproken* Curve $x^1 = p$, $y^1 = px - y$, worin $p = \frac{dy}{dx}$ ist. Die Reciprocität dieser beiden Curven besteht darin, dass die erste sich eben so aus der zweiten bildet, wie diese aus der ersten gebildet wurde. (S. *Correspondance sur l'école polytechnique*, T. I, p. 73, J. 1805.)

Das *Mémoire sur les surfaces réciproques* von Monge findet sich in einem Verzeichniss seiner verschiedenen Memoiren, welches im Anfang seiner *Application de l'analyse à la Géométrie* (3te Ausg., J. 1809) steht, angeführt. Es muss zu den Memoiren des *Institut* vom J. 1808 gehören; ich glaube aber nicht, dass es veröffentlicht ist. Zu dem Titel dieses Memoirs ist die Definition der *reciproken Oberflächen* in diesen Worten hinzugesetzt:

„Wenn x, y, z die Coordinaten eines Punkts einer krummen Oberfläche sind, deren Differential-Gleichung dz

$= p.dx + q.dy$ ist, so haben x^1, y^1, z^1, die Coordinaten seines *reciproken* Punkts, folgende Werthe:

$$x^1 = p,\ y^1 = q,\ z^1 = p.x + q.y - z.$$

Der Ort aller dieser reciproken Punkte ist die *reciproke* Oberfläche der gegebenen Oberfläche. Die Reciprocität dieser beiden Oberflächen besteht darin, dass die erste Oberfläche der Ort der reciproken Punkte der zweiten ist, wie die zweite der Ort der reciproken Punkte der ersten."

Die Werthe von x, y, z durch x^1, y^1, z^1 werden dieselbe Form haben, als die von x^1, y^1, z^1 durch x, y, z; man findet in der That:

$$x = p^1,\ y = q^1,\ z = p^1.x^1 + q^1.y^1 - z^1.$$

Man erkennt aus der blossen Ansicht dieser Formeln, dass *jeder Tangenten-Ebene der ersten Oberfläche ein Punkt der zweiten entspricht*, und dass, *wenn diese Tangenten-Ebenen durch Einen Punkt gehen, ihre entsprechenden Punkte in Einer Ebene liegen.*

In der That, die Tangenten-Ebene in dem Punkte (x, y, z) der ersten Oberfläche ist durch die Werthe der Coordinaten dieses Punkts und durch die Werthe der beiden Differential-Quotienten p und q bestimmt. Diese Werthe geben auch die Lage des Punkts (x^1, y^1, z^1), welcher dieser Tangenten-Ebene entspricht.

Wenn nun diese Tangenten-Ebene, deren Gleichung

$$z - Z = p.(x - X) + q.(y - Y)$$

ist, durch einen festen Punkt (α, β, γ) geht, so wird man zwischen den Coordinaten des Berührungspunkts (x, y, z) die Relation haben:

$$z - \gamma = p.(x - \alpha) + q.(y - \beta).$$

Substituirt man in diese Gleichung die Werthe für x, y, z durch x^1, y^1, z^1, p^1, q^1, so hat man:

$$z^1 + \gamma = \alpha.x^1 + \beta.y^1,$$

die Gleichung einer Ebene, wie man es finden musste.

Die reciproken Oberflächen des Monge können also als die in einander nach dem Princip der ***Dualität*** transformirten betrachtet werden. Und es sind auch in der That *diese Oberflächen ganz einfach reciproke Polären in Bezug auf das Revolutions-Paraboloid, welches zur Gleichung hat*:

$$x^2 + y^2 = \alpha.$$

Diese geometrische Construction der Oberflächen des Monge zeigt, dass sie nur ein besondrer Fall einer allgemeinen Klasse

von reciproken Oberflächen sind, welche man analytisch wie diese ausdrücken kann, und welche, geometrisch betrachtet, *reciproke Polären* in Bezug auf irgend eine Oberfläche des zweiten Grades sind.

Man muss bedauern, dass das Memoire von Monge nicht bekannt geworden ist. Es wäre interessant gewesen, den Weg kennen zu lernen, auf welchem er zur Erfindung seiner *reciproken* Oberflächen gekommen ist, und besonders derer, deren analytischer Ausdruck der einfachste unter unendlich vielen andern ist; zu wissen, ob es die Theorie der Pole bei den Oerlächen des zweiten Grades war, welche diesen grossen Geometer leitete; und vor Allem, welchen Gebrauch er von der Betrachtung seiner reciproken Oberflächen gemacht hat.

Wir wissen, dass die *reciproken Curven* ihm ein Mittel darboten, die Integration der Differential-Gleichungen zweier Variabeln, von der Form $y = x . Fp + fp$, wo F und f irgend welche Functionen von $p = \frac{dy}{dx}$ bedeuten, auf Quadraturen zurückzuführen.

Hiernach ist es natürlich, zu vermuthen, dass Monge zu demselben Zweck die reciproken Oberflächen erdacht habe und dass sie ihm zur Integration der Gleichungen mit den partiellen Differentialien dreier Variabeln gedient haben. Man erkennt auch wirklich, dass sie dazu sich eignen können. Es sei z. B. die Gleichung mit partiellen Differentialien

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zu integriren, so wird man sie als zu einer Oberfläche A gehörig betrachten, d. h. so dass ihr Integral die Gleichung der Oberfläche A sei.

Der vorgegebenen Differential-Gleichung wird eine andre Gleichung entsprechen, die zu einer Oberfläche A^1, der reciproken von A, gehört; diese Gleichung wird sein:

$$F(p^1, q^1, p^1 . x^1 + q^1 . y^1 - z^1, x^1, y^1) = 0.$$

Wenn diese von der vorgegebenen verschiedene Gleichung integrabel ist, so wird man durch die Integration eine Gleichung $f(x^1, y^1, z^1) = 0$ erhalten, welche die endliche Gleichung der Oberfläche A^1 sein wird.

Von dieser Gleichung wird man auf dem Wege der Elimination zur Gleichung der Oberfläche A, welche die reciproke von A^1 ist, gelangen, und diese Gleichung wird das Integral der vorgegebenen sein.

Wenn die vorgegebene Gleichung die Differential-Quotienten der zweiten Ordnung:

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2},\ s = \frac{d^2 z}{dx\,.\,dy},\ t = \frac{d^2 z}{dy^2}$$

enthält, so wird die Methode dieselbe sein. Man würde zu der Differential-Gleichung zwischen x^1, y^1, z^1, p^1, q^1, r^1, s^1, t^1 übergehen, indem man die Differential-Quotienten r, s, t durch ihre Ausdrücke in Functionen von r^1, s^1, t^1 ersetzt. Man findet für diese Ausdrücke:

$$r = \frac{t^1}{r^1\,.\,t^1 - s^{1^2}},\ s = -\frac{s^1}{r^1\,.\,t^1 - s^{1^2}},\ t = \frac{r^1}{r^1\,.\,t^1 - s^{1^2}}$$

und umgekehrt:

$$r^1 = \frac{t}{r\,.\,t - s^2},\ s^1 = -\frac{s}{r\,.\,t - s^2},\ t^1 = \frac{r}{r\,.\,t - s^2}$$ [62]).

Ebenso würde man mit den Gleichungen mit Differential-Quotienten höherer Ordnung verfahren.

---

62) Die Berechnung dieser Ausdrücke ist einfach. Man differentiirt die Gleichung $x = p^1$ und $y = q^1$ successive in Bezug auf x und in Bezug auf y, indem man p^1 und q^1 als Functionen von x^1 und y^1 betrachtet; dadurch erhält man diese vier Gleichungen:

$$1 = \frac{dp^1}{dx^1}\,.\,\frac{dx^1}{dx} + \frac{dp^1}{dy^1}\,.\,\frac{dy^1}{dx^1},$$
$$0 = \frac{dp^1}{dx^1}\,.\,\frac{dx^1}{dy} + \frac{dp^1}{dy^1}\,.\,\frac{dy^1}{dy},$$
$$0 = \frac{dq^1}{dx^1}\,.\,\frac{dx^1}{dx} + \frac{dq^1}{dy^1}\,.\,\frac{dy^1}{dx},$$
$$1 = \frac{dq^1}{dx^1}\,.\,\frac{dx^1}{dy} + \frac{dq^1}{dy^1}\,.\,\frac{dy^1}{dy}.$$

Man hat aber:

$$\frac{dp^1}{dx^1} = r^1,\ \frac{dp^1}{dy^1} = \frac{dq^1}{dx^1} = s^1,\ \frac{dq^1}{dy^1} = t$$

und

$$\frac{dx^1}{dx} = \frac{dp}{dx} = r,\ \frac{dy^1}{dx} = \frac{dq}{dx} = s,\ \frac{dx^1}{dy} = \frac{dp}{dy} = s,\ \frac{dy^1}{dy} = \frac{dp}{dy} = t.$$

Die obigen vier Gleichungen werden daher

$$1 = r^1\,.\,r + s^1\,.\,s,$$
$$0 = r^1\,.\,s + s^1\,.\,t,$$
$$0 = s^1\,.\,r + t^1\,.\,s,$$
$$1 = s^1\,.\,s + t^1\,.\,t,$$

woraus man die Werthe für r, s, t durch r^1, s^1, t^1 ausgedrückt und umgekehrt diese durch jene erhalten kann.

Aber diese Art der Integration scheint nicht allgemeine Integrale zu liefern, in denen willkührliche Functionen enthalten sind, welche die vorgegebene Differentialgleichung gestattet. Denn wenn man diese willkührlichen Functionen in das Integral der Gleichung zwischen x^1, y^1, z^1, welches die Oberfläche A^1 darstellt, eingehen liesse, so würden sie es verhindern, aus derselben auf dem Wege der Elimination die Gleichung der reciproken Oberfläche A abzuleiten.

Diese Schwierigkeit lässt es lebhaft bedauern, dass die Arbeit von Monge, der schon so viel zu dem Fortschreiten der Wissenschaft in diesem so delikaten Theile der Analysis beigetragen hatte, für uns verloren gegangen ist.

Wir sagten schon vorhin, dass die Oberflächen des Monge unter den reciproken polären Oberflächen diejenigen sind, deren analytischer Ausdruck der einfachste ist. Wir müssen hinzufügen, dass es noch eine andre Gattung von Oberflächen giebt, welche denen des Monge analog und eben so einfach in ihrem analytischen Ausdruck sind, welche aber nicht zu den polären Oberflächen gehören.

Die Relationen dieser neuen reciproken Oberflächen sind folgende:

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punkts einer ersten Oberfläche, und x^1, y^1, z^1 die Coordinaten des correspondirenden Punkts der reciproken Oberfläche, so hat man:

$$x^1 = q,\ y^1 = -p,\ z^1 = -p \cdot x - q \cdot y + z$$

und

$$x = q^1,\ y = -p^1,\ z = -p^1 \cdot x^1 - q^1 \cdot y^1 + z^1.$$

Diese Formeln können wie die des Monge zur Integration von Gleichungen mit partiellen Differentialien dienen, und es kann sich ereignen, dass sie dann ihre Anwendung finden, wenn die andern nicht brauchbar sind, d. h. wenn diese nicht zu einer integrabeln Gleichung führen. Denn wenn die vorgegebene Gleichung war:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

so transformirt man sie nach den Formeln des Monge in;

$$F(p^1, q^1, p^1 \cdot x^1 + q^1 \cdot y^1 - z^1, x^1, y) = 0$$

und nach den neuen Formeln in diese:

$$F(q^1, -p^1, -p^1 \cdot x^1 - q^1 \cdot y^1 + z^1, -y^1, x^1) = 0.$$

Es ist nun möglich, dass diese zweite Gleichung leichter zu integriren ist, als die erste.

Die Relationen der Differential-Quotienten der zweiten Ordnung sind eben so einfach, als bei den Formeln des Monge. Man erhält sie, indem man successive die beiden Gleichungen $x = q^1$, $y = -p^1$ in Bezug auf x und in Bezug

auf y differentiirt, wobei man q^1 und p^1 als Functionen von x^1 und y^1 betrachtet. Man erhält dadurch vier Gleichungen, von denen drei die vierte bedingen, und aus diesen findet man:

$$r^1 = -\frac{r}{r.t-s^2},\quad s^1 = -\frac{s}{r.t-s^2},\quad t^1 = -\frac{t}{r.t-s^2}$$

und

$$r = -\frac{r^1}{r^1.t^1-s^{1^2}},\quad s = -\frac{s^1}{r^1.t^1-s^{1^2}},\quad t = -\frac{t^1}{r^1.t^1-s^{1^2}}$$

Unsere neuen Oberflächen haben, wie die des Monge, unter einander eine geometrische Beziehung, welche man auf verschiedene Art ausdrücken kann. Wir begnügen uns folgende anzuführen:

Wenn eine Oberfläche gegeben ist, so wird man ihr eine unendlich kleine Bewegung mittheilen können von der Art, dass die Ebenen, welche auf den Richtungen der Bewegung ihrer verschiedenen Punkte normal sind, genau die Tangenten-Ebenen für die reciproke Oberfläche werden.

Die mitzutheilende Bewegung wird das Resultat zweier gleichzeitigen elementaren Bewegungen sein, von denen die erste eine rotirende Bewegung um die als fest betrachtete Axe der z ist und die zweite eine translative in der Richtung dieser Axe.

Die reciproken Oberflachen des Monge und die neuen Oberflächen, deren analytischen Ausdruck und geometrische Construction wir so eben gegeben haben, sind beide nur besondre Arten von andern Oberflächen, die einen viel allgemeinern analytischen Ausdruck haben und deren Betrachtung, wie die der ersten, zu der Integration von Gleichungen dienen kann;

Einige allgemeine Formeln, welche diesen Oberflächen entsprechen, sind folgende:

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punkts der ersten Oberfläche und p, q die beiden Differential-Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, so werden die Coordinaten des reciproken Punkts der zweiten Oberfläche sein:

$$(1)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned} x^1 &= \frac{A^{111}.(p.x+q.y-z)+A^{11}-A^1.q-A.p}{D^{111}.(p.x+q.y-z)+D^{11}-D^1.q-D.p},\\ y^1 &= \frac{B^{111}.(p.x+q.y-z)+B^{11}-B^1.q-B.p}{D^{111}.(p.x+q.y-z)+D^{11}-D^1.q-D.p},\\ z^1 &= \frac{C^{111}.(p.x+q.y-z)+C^{11}-C^1.q-C.p}{D^{111}.(p.x+q.y-z)+D^{11}-D^1.q-D.p}.\end{aligned}\right.$$

A, B, C, D; A^1, B^1, C^1, D^1; $A^{11}, B^{11}, C^{11}, D^{11}$; $A^{111}, B^{111}, C^{111}, D^{111}$ sind willkührliche Coefficienten.

Eben so umgekehrt:

$$(2) \ldots \begin{cases} x = \dfrac{D.(p^1.x^1+q^1.y^1-z^1)+C-B.q^1-A.p^1}{D^{111}.(p^1.x^1+q^1.y^1-z^1)+C^{111}-B^{111}.q^1-A^{111}.p^1}, \\ y = \dfrac{D^1.(p^1.x^1+q^1.y^1-z^1)+C^1-B^1.q^1-A^1.p^1}{D^{111}.(p^1.x^1+q^1.y^1-z^1)+C^{111}-B^{111}.q^1-A^{111}.p^1}, \\ z = \dfrac{D^{11}.(p^1.x^1+q^1.y^1-z^1)+C^{11}-B^{11}.q^1-A^{11}.p^1}{D^{111}.(p^1.x^1+q^1.y-z^1)+C^{111}-B^{111}.q^1-A^{111}.p^1}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke von p^1, q^1 durch x, y, z und die von p, q durch x^1, y^1, z^1 erfordern eine ziemlich lange Rechnung. Um sie zu bilden, wollen wir durch das Symbol $(A^1B^{11}C^{111})$ das Polynom

$$A^1(B^{11}C^{111}-B^{111}C^{11})+A^{11}(B^{111}C^1-B^1C^{111})+A^{111}(B^1C^{11}-B^{11}C^1)$$

darstellen, durch $(B^1C^{11}A^{111})$ das, was aus diesem Polynom wird, wenn man darin A^1 in B^1, B^{11} in C^{11}, C^{111} in A^{111} umwandelt, und eben so die ähnlichen Polynome, welche man aus den 16 Coefficienten A, B, C, D; A^1, B^1, C^1, D^1; $A^{11}, B^{11}, C^{11}, D^{11}$; $A^{111}, B^{111}, C^{111}, D^{111}$ zu je drei bilden kann. Mit Hülfe dieser Abkürzungen erhält man für p^1, q^1 und für p, q folgende Ausdrücke:

$$(1) \begin{cases} p^1 = -\dfrac{(B^1C^{11}D^{111}).x-(B^{11}C^{111}D).y+(B^{111}CD^1).z-(BC^1D^{11})}{(D^1A^{11}B^{111}).x-(D^{11}A^{111}B).y+(D^{111}AB^1).z-(DA^1B^{11})}, \\ q^1 = \dfrac{(C^1D^{11}A^{111}).x-(C^{11}D^{111}A).y+(C^{111}DA^1).z-(CD^1A^{11})}{(D^1A^{11}B^{111}).x-(D^{11}A^{111}B).y+(D^{111}AB^1).z-(DA^1B^{11})}, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} p = -\dfrac{(B^1C^{11}D^{111}).x^1-(C^1D^{11}A^{111}).y^1+(D^1A^{11}B^{111}).z-(A^1B^{11}C^{111})}{(B^{111}CD^1).x^1-(C^{111}DA^1).y^1+(D^{111}AB^1).z^1-(A^{111}BC^1)}, \\ q = \dfrac{(BC^{11}D^{111}).x^1-(CD^{11}A^{111}).y^1+(DA^{11}B^{111}).z^1-AB^{11}C^{111})}{(B^{111}CD^1).x^1-(C^{111}DA^1).y^1+(D^{111}AB^1).z^1-(A^{111}BC^1)}, \end{cases}$$

Um die Verhältnisse, welche zwischen den Ausdrücken p^1, q^1, p, q stattfinden, besser aufzufassen, wollen wir durch die Buchstaben a, b, c, d, a^1, b^1, c^1, d^1 etc. die verschiedenen Polynome bezeichnen, welche die Coefficienten in diesen Ausdrücken bilden, so dass man hat:

$$\begin{array}{ll} a = (B^1C^{11}D^{111}), & b = -(C^1D^{11}A^{111}), \\ a^1 = -(B^{11}C^{111}D), & b^1 = (C^{11}D^{111}A), \\ a^{11} = (B^{111}CD^1), & b^{11} = -(C^{111}DA^1), \\ a^{111} = (BC^1D^{11}), & b^{111} = -(CD^1A^{11}), \\ \hline c = (D^1A^{11}B^{111}), & d = (A^1B^{11}C^{111}), \\ c^1 = -(D^{11}A^{111}B), & d^1 = -(A^{11}B^{111}C), \\ c^{11} = (D^{111}AB^1), & d^{11} = (A^{111}BC^1), \\ c^{111} = (DA^1B^{11}), & \end{array}$$

Hiernach werden die Ausdrücke von p^1, q^1, p, q folgende:

$$p^1 = -\frac{a.x + a^1.y + a^{11}.z - a^{111}}{c.x + c^1.y + c^{11}.z - c^{111}},$$

$$q^1 = -\frac{b.x + b^1.y + b^{11}.z - b^{111}}{c.x + c^1.y + c^{11}.z - c^{111}},$$

$$p = -\frac{a.x^1 + b.y^1 + c.z^1 - d}{a^{11}.x^1 + b^{11}.y^1 + c^{11}.z^1 - d^{11}},$$

$$q = -\frac{a^1.x^1 + b^1.y^1 + c^1.x^1 - d^1}{a^{11}.x^1 + b^{11}.y^1 + c^{11}.z^1 - d^{11}}.$$

In den Formeln von Monge findet sich eine vollkommene Reciprocität zwischen den Werthen von x^1, y^1, z^1, p^1, q^1 durch x, y, z, p, q und den Werthen von x, y, z, p, q durch x^1, y^1, z^1. p^1, q^1 ausgedrückt, d. h. dass ausser derselben Form diese Werthe auch dieselben Coefficienten haben. Dasselbe findet auch in den besondern Formeln statt, welche wir nach denen des Monge gegeben haben. Aber eine solche vollkommene Reciprocität findet sich nicht mehr in den allgemeinen Formeln, worin die Ausdrücke von x^1, y^1, z^1, p^1, q^1 zwar noch dieselbe Form haben, als die von x, y, z, p, q, worin aber die Coefficienten verschieden sind. Um diesen allgemeinen Formeln die vollständige Reciprocität zu geben, reicht es hin, über sechs von den 16 willkührlichen Coefficienten A, B, C, D, A^1, B^1 etc. zu disponiren und zu setzen:

$$D = A^{111},\ D^1 = B^{111},\ D^{11} = C^{111},\ B = A^1,\ C = A^{11},\ C^1 = B^{11};$$

woraus sich ergiebt:

$$d = a^{111},\ d^1 = b^{111},\ d^{11} = c^{111},\ b = a^1,\ c = a^{11},\ c^1 = b^{11};$$

dann werden, wenn die Ausdrücke von x^1, y^1, z^1, p^1, q^1 dieselben bleiben, die von x, y, z, p, q folgende:

$$(3) \ldots \left\{\begin{aligned}
x &= \frac{A^{111}.(p^1.x^1 + q^1.y^1 - z^1) + A^{11} - A^1.q^1 - A.p^1}{D^{111}.(p^1.x^1 + q^1.y^1 - z^1) + D^{11} - D^1.q^1 - D.p^1},\\
y &= \frac{B^{111}.(p^1.x^1 + q^1.y^1 - z^1) + B^{11} - B^1.q^1 - B.p^1}{D^{111}.(p^1.x^1 + q^1.y^1 - z^1) + D^{11} - D^1.q^1 - D.p^1},\\
z &= \frac{C^{111}.(p^1.x^1 + q^1.y^1 - z^1) + C^{11} - C^1.q^1 - C.p^1}{D^{111}.(p^1.x^1 + q^1.y^1 - z^1) + D^{11} - D^1.q^1 - D.d^1},\\
p &= -\frac{a.x^1 + a^1.y^1 + a^{11}.z^1 - a^{111}}{c.x^1 + c^1.y^1 + c^{11}.z^1 - c^{111}},\\
q &= -\frac{b.x^1 + b^1.y^1 + b^{11}.z^1 - b^{111}}{c.x^1 + c^1.y^1 + c^{11}.z^1 - c^{111}}
\end{aligned}\right.$$

Man muss dabei beachten, dass von den sechzehn Coefficienten A, B, C, D, A^1 etc., welche in den Formeln (1) und (3) enthalten sind, wegen der angenommenen sechs Gleichheiten $D = A^{111}$, $D^1 = B^{111}$ etc., nur zehn willkührlich sind. Man wird über diese zehn willkührlichen Coefficienten so disponiren, dass die Formeln sich vereinfachen und sich den verschiedenen Aufgaben, auf die man sie anwenden will, anpassen.

Um die Formeln des Monge zu erhalten, muss man alle Coefficienten gleich Null setzen, mit Ausnahme der drei A, B^1, C^{111}, welchen man die Werthe giebt:

$$A = -1,\; B^1 = -1,\; C^{111} = 1.$$

Note XXVI.

(Fünfte Epoche, §. 48.)

Neue Eigenschaften der Oberflächen zweiten Grades, welche denen der Brennpunkte bei den Kegelschnitten analog sind.

§. 1. *Eigenschaften der excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades.*

1. „Die Tangente und die Normale, welch durch jeden Punkt eines Kegelschnitts gezogen werden, treffen jede der beiden Hauptaxen der Curve in zwei Punkten, welche die conjugirten harmonischen zu zwei festen Punhten sind; diese beiden festen Punkte sind reell auf der ersten Axe der Curve, sie sind nämlich die Brennpunkte, und imaginär auf der zweiten Axe.“ 62)

Das diesem analoge Theorem für die Oberflächen des zweiten Grades ist folgendes:

Die Normale und die Tangenten-Ebene für irgend einen Punkt einer Oberfläche des zweiten Grades, tref-

---

62) Diese beiden Punkte geben zwei imaginäre Brennpunkte auf der zweiten Axe, so dass man sagen kann, der Kegelschnitt habe *vier Brennpunkte*, von denen die beiden auf der grossen Axe liegenden reell, und die beiden auf der kleinen Axe liegenden immer imaginär sind.

fen jede der Haupt-Diametralebenen der Oberfläche[63]), *in einem Punkt und in einer Geraden:*

Dieser Punkt ist immer der Pol der Geraden in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt, der in der Hauptebene liegt;

Auf der Ebene der grossen und der mittlern Axe ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse;

Auf der Ebene der grossen und der kleinen Axe ist er eine Hyperbel;

Und auf der Ebene der mittlern und der kleinen Axe ist er immer imaginär.

2. Man kann auch noch folgendes Theorem, als der angeführten Eigenschaft der Kegelschnitte entsprechend, betrachten:

Wenn man für jeden Punkt einer Oberfläche des zweiten Grades die Normale der Oberfläche und die Tangenten an die beiden in diesem Punkt sich kreuzenden Krümmungscurven zieht, so werden diese drei Geraden jede der Haupt-Diametralebenen in drei solchen Punkten treffen, dass die Poläre jedes von ihnen, in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt in dieser Ebene genommen, durch die beiden andern geht.

3. Die drei Kegelschnitte, welche man nach diesem oder nach dem vorigen Theorem erhält, sind vollständig bestimmt, und man erkennt leicht, dass zwischen jedem von ihnen und der Oberfläche folgende sehr einfachen Beziehungen, welche zur Construction dieser Curven hinreichen, stattfinden, dass nämlich *jeder der drei in Rede stehenden Kegelschnitte in der Ebene eines Hauptschnitts der Oberfläche liegt; dass er zu Brennpunkten die dieses Schnittes hat und zu Scheiteln die Brennpunkte der beiden andern Hauptschnitte der Oberfläche.*

4. Hieraus folgt, dass die grosse Axe der Ellipse und die Zwerchaxe der Hyperhel auf der grossen Axe der Oberfläche liegen; und dass die Scheitel der Ellipse die Brennpunkte der Hyperbel sind, und umgekehrt, woraus sich ergiebt, dass die Quadrate der beiden andern Hauptaxen der beiden Curven, welche auf einander senkrecht stehen, mit Ausschluss der Zeichen einander gleich sind.

---

63) Wir setzen voraus, dass die Oberfläche einen Mittelpunkt hat, die Theoreme aber, welche wir aussprechen wollen, wenden sich von selbst auf die Paraboloide an.

Was den dritten imaginären Kegelschnitt betrifft, so hat er zwei reelle Brennpunkte, welche in den Endpunkten der kleinen Axe der Ellipse liegen. Die Quadrate der beiden imaginären Hauptaxen sind, bis aufs Zeichen, den Quadraten der grossen Axe der Ellipse und der Zwerchaxe der Hyperbel gleich.

5. Wenn man annimmt, dass ein Kegelschnitt vier Brennpunkte hat, welche zu je zwei auf den beiden Hauptaxen liegen und von denen zwei reell und zwei imaginär sind, so kann man die Relation zwischen den drei Curven auch so aussprechen:

Wenn die eine der drei Curven gegeben ist, so liegt jede der beiden andern in einer Ebene, die durch eine der Hauptaxen der ersten senkrecht auf ihre Ebene gelegt wird, und hat zu Scheiteln die Brennpunkte und zu Brennpunkten die Scheitel dieser ersten, welche auf ihrer Hauptaxe liegen.

Dieses genügt zur Construction der beiden andern Kegelschnitte, wenn der eine von den dreien gegeben ist.

6. Der Deutlichkeit wegnn sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung der Oberfläche, so sind die Gleichungen der drei in Rede stehenden Kegelschnitte:

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

Wenn $a > b > c$, so wird die erste Curve, welche in der xyEbene liegt, eine Ellipse, die zweite in der xz Ebene eine Hyperbel, und die dritte in der yzEbene ist imaginär.

7. Wir nennen diese drei Curven *excentrische Kegelschnitte* oder *focale Kegelschnitte* der Oberfläche.[64])

---

64) Ich werde mich des erstern Ausdrucks bedienen, obgleich ich den zweiten seiner vollständigern Analogie wegen mit den *Focis* der Kegelschnitte und den *Focallinien* der Kegel vorgezogen hätte. Da aber Quetelet den Namen *Focale* einer Curve des dritten Grades gegeben hat, welche der Ort der Brennpunkte aller ebenen Schnitte, die auf eine gewisse Art auf einem Kegel des zweiten Grades ge-

So wie ein Kegelschnitt zwei Paare Brennpunkte oder zwei Excentricitäten hat, von denen die eine imaginär ist, eben so hat eine Oberfläche des zweiten Grades drei *focale* oder *excentrische Kegelschnitte*, von denen zwei reell sind, der dritte aber imaginär. [65])

8. Aus der Construction, welche wir für die excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades gegeben haben, sieht man:

Wenn die Hauptschnitte zweier Oberflächen des zweiten Grades um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, so haben sie dieselben excentrischen Kegelschnitte; und umgekehrt, wenn zwei Oberflächen denselben excentrischen Kegelschnitt haben, so sind ihre Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben.

---

bildet werden, ist, so kann ich mich hier dieses Worts nicht zur Bezeichnung andrer krummen Linien bedienen.

Ich würde vorschlagen, diese Focalen des dritten Grades *Focoïdes* oder vielmehr *Focoïcae* zu nennen, in Uebereinstimmung mit den Ideen des Ch. Dupin über die Nomenclatur der Geometrie (*Développemens de Géométrie*, Note zum vierten Memoire). Dann würde man den Namen *focale Kegelschnitte* oder einfach *Focale* für die beiden Curven annehmen, welche bei den Oberflächen des zweiten Grades dieselbe Rolle spielen, als die Brennpunkte bei den Kegelschnitten. Und wenn man diese beiden Curven in ihrem gegenseitigen Verhältniss betrachtet, ohne von der Oberfläche, zu der sie gehören, zu sprechen, so könnte man sie *conjugirte Focale* nennen.

65) Es erscheint ohne Zweifel wunderbar, wenn wir sagen, dass von zwei Excentricitäten der Kegelschnitte *die eine imaginär ist* und dass von den drei excentrischen Kegelschnitten der Oberflächen zweiten Grades auch *eine einzige imaginär ist*, da man doch weiss, dass das Imaginäre immer nur gepaart vorkommt. Auch müssen wir sagen, dass es bei den Kegelschnitten ein drittes Paar Brennpunkte giebt, welche immer imaginär sind und immer in der Unendlichkeit liegen. Diese Brennpunkte sind noch nicht beachtet worden, weil man bei der Untersuchung über Kegelschnitte nicht gesucht hat, auf den wahren Ursprung ihrer vorzugsweise so genannten Brennpunkte und auf die Analogie zurückzugehen, welche zwischen ihren besondern Eigenschaften und den allgemeinen Eigenschaften, die sich auf jeden andern Punkt in der Ebene der Curve beziehen, stattfinden. — Eben so giebt es bei jeder Oberfläche des zweiten Grades einen vierten excentrischen Kegelschnitt, welcher immer imaginär ist und in der Unendlichkeit liegt.

Es ist uns hier unnütz, das dritte Paar der Brennpunkte bei den Kegelschnitten eben so wie den vierten excentrischen Kegelschnitt der Oberflächen zu betrachten. Wir wollen zu einer andern Zeit die allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte und der Oberflächen des zweiten Grades darstellen, woraus sich die Eigenschaften, welche den *Brennpunkten* und den *excentrischen Kegelschnitten* eigenthümlich sind, ableiten.

9. Nachdem jetzt die Definition und die Construktion der excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades gehörig aufgefasst sind, wollen wir mehre Eigenschaften dieser Curven auseinandersetzen und ihre Analogie mit gewissen Eigenschaften der Brennpunkte bei den Kegelschnitten zeigen.

„Wenn ein Winkel einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, so treffen die beiden Geraden, deren eine den Winkel selbst, und die andre dessen Supplement halbirt, jede der beiden Hauptaxen der Curve in zwei Punkten, welche die conjugirten harmonischen sind in Bezug auf die beiden in dieser Axe liegenden Brennpunkte."

Ebenso:

Wenn ein Kegel einer Oberfläche des zweiten Grades umgeschrieben ist, so treffen seine drei Hauptaxen jede der Haupt-Diametralebenen der Oberfläche in drei Punkten, die so beschaffen sind, dass die Poläre jedes von ihnen, in Bezug auf den in der Diametralebene liegenden excentrischen Kegelschnitt, durch die beiden andern geht.

10. „Wenn man von einem in der Ebene eines Kegelschnitts liegenden Punkt zwei gerade Linien nach den beiden Brennpunkten zieht, so werden sie gegen die Gerade, welche den Winkel zwischen den beiden Tangenten, die von demselben Punkt an die Curve gezogen sind, halbirt, gleich geneigt sein."

Bei den Oberflächen hat man folgendes analoge Theorem:

Es werde ein Punkt im Raum zum gemeinschaftlichen Scheitel zweier Kegel angenommen, von denen der eine einer Oberfläche des zweiten Grades umgeschrieben ist und der andre einen der excentrischen Kegelschnitte der Oberfläche zur Basis hat, so werden diese beiden Kegel dieselben Hauptschnitte und dieselben Focallinien haben.

11. „Wenn man von einem Punkt auf einem Kegelschnitt zwei Gerade nach seinen Brennpunkten zieht, so sind diese beiden Geraden gegen die Normale des Kegelschnitts in diesem Punkt oder auch gegen seine Tangente gleich geneigt."

Dieses ist eine der ältesten Eigenschaften der Kegelschnitte; das analoge Theorem für die Oberflächen ist folgendes:

Wenn ein Punkt auf einer Oberfläche des zweiten Grades als der Scheitel eines Kegels betrachtet wird, der

einen der excentrischen Kegelschnitte der Oberfläche zur Basis hat, so werden die Normale für die Oberfläche und die Tangenten ihrer Krümmungscurven in diesem Punkt die Hauptaxen des Kegels sein.[66] *Und wenn die Oberfläche ein Hyperboloid mit Einem Fach ist, so werden die beiden Focallinien des Kegels die beiden Generatrices dieses Hyperboloids sein, welche durch den Scheitel des Kegels gehen.*

12. Aus dem ersten Theil dieses Theorems schliesst man:

Wenn man durch eine Tangente für irgend einen Punkt einer Oberfläche des zweiten Grades zwei Tangenten-Ebenen an einen der excentrischen Kegelschnitte legt, so werden diese gegen die Tangenten-Ebene der Oberfläche, welche durch die Tangente gelegt wird, gleich geneigt sein.

13. Aus dem Theorem 10. lassen sich mehre Folgerungen ziehen.

In der That, wenn zwei Kegel des zweiten Grades dieselben Hauptaxen und dieselben Focalen haben, so schneiden sie sich unter rechten Winkeln[67], und man schliesst aus dem Theorem 10:

Für ein Auge, das sich in irgend einem Punkt des Raums befindet, scheinen der scheinbare Umriss einer Oberfläche des zweiten Grades und der eine der excentrischen Kegelschnitte der Oberfläche sich unter rechten Winkeln zu schneiden.

14. Die beiden Kegel, welche denselben Scheitel und zu Bases die beiden excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche haben, haben dieselben Hauptaxen und dieselben Focallinien; diese beiden Kegel schneiden sich also unter rechten Winkeln, was man so ausdrücken kann:

Von welchem Punkt im Raum man auch die beiden excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades betrachtet, so erscheinen sie immer so, dass sie sich unter rechten Winkeln schneiden.[68]

---

66) So dass, wenn ein Kegel zur Basis einen Kegelschnitt hat, und wenn diese Curve als excentrischer Kegelschnitt einer durch den Scheitel des Kegels gehenden Oberfläche der zweiten Ordnung angenommen wird, diese Oberfläche normal auf einer der drei Hauptaxen des Kegels sein wird.

67) *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré*, p. 28.

68) Ich hatte schon Gelegenheit, dieses Theorem auszusprechen, in meinem *Mémoire sur les propriétés générales des surfaces de*

15. Wenn man statt eines Kegels einen Cylinder der Oberfläche umschreibt, so wird das Theorem 10. dieses:

Wenn ein Cylinder einer Oberfläche des zweiten Grades umgeschrieben ist, und wenn man durch den einen der excentrischen Kegelschnitte der Oberfläche einen zweiten Cylinder legt, dessen Seitenlinien mit denen des ersten parallel sind, so werden die Endflächen dieser beiden Cylinder in einer Ebene, die senkrecht auf ihren Seitenlinien steht, zwei um dieselben Brennpunkte beschriebene Kegelschnitte sein.

16. Hieraus folgert man:

Die senkrechten Projectionen der beiden excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades auf irgend einer Ebene sind zwei Kegelschnitte, welche dieselben Brennpunkte haben.

17. Dasselbe Theorem 10. würde noch viele andre Folgerungen, in Bezug auf die Systeme von Oberflächen, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, zulassen; aber wir müssen uns, in diesem Augenblick, auf die Eigenschaften dieser Curven selbst einschränken.

18. Die Brennpunkte eines Kegelschnitts besitzen eine allgemeine Eigenschaft, welche zu ihrer Definition dienen könnte, da sie eine charakteristische ist; nämlich:

„Wenn man durch einen in der Ebene eines Kegelschnitts willkührlich gewählten Punkt zwei auf einander senkrechte Gerade so zieht, dass der Pol der einen in Bezug auf den Kegelschnitt genommen auf der andern liegt, so werden diese beiden Linien jede der beiden Hauptaxen der Curve in zwei Punkten treffen, welche conjugirte harmonische zu zwei festen Punkten sind. Diese beiden festen Punkte sind reell auf der grossen Axe der Curve und sind die beiden Brennpunkte, dagegen imaginär auf der kleinen Axe."

Für die Oberflächen hat man ebenso diese charakteristische Eigenschaft der excentrischen Kegelschnitte:

Wenn eine Oberfläche des zweiten Grades gegeben ist, und wenn man durch einen willkührlich im Raum gewählten Punkt drei unter einander rechtwinklige Gerade zieht, so dass die Poläre jedes von ihnen, in Be-

---

révolution, im Vten Bande der *Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles* (1829); und ich sagte dort, dass die beiden in Rede stehenden Kegelschnitte sich vieler andern Eigenschaften erfreuen, welche noch nicht entdeckt wären. Diese Note enthält in der That mehre, welche mir neu zu sein scheinen.

zug auf die Oberfläche genommen, in der Ebene der beiden andern liegt, so werden diese drei Geraden jede der drei Hauptebenen der Oberfläche in drei Punkten treffen, welche so beschaffen sind, dass die Poläre jedes von ihnen, in Bezug auf den in dieser Ebene liegenden excentrischen Kegelschnitt genommen, durch die beiden andern geht.

19. Um die Analogie zwischen gewissen Eigenschaften der excentrischen Kegelschnitte, welche wir anführen wollen, und zwischen gewissen Eigenschaften der Brennpunkte erkennen zu können, muss man die doppelte Excentricität eines Kegelschnitts, d. h. die Gerade, welche seine beiden Brennpunkte verbindet, so betrachten, als wäre sie selbst ein Kegelschnitt, dessen kleine Axe gleich Null ist. Man wird alsdann jede durch einen Brennpunkt gezogene Gerade als eine Tangente dieses Kegelschnitts betrachten können.

20. Man weiss, dass „jede durch einen Brennpunkt eines Kegelschnitts gezogene Transversale ihren Pol, in Bezug auf diese Curve, auf einer Geraden hat, die in dem Brennpunkt senkrecht auf dieser Transversale steht."

Ebenso *hat jede Transversal-Ebene, welche einen excentrischen Kegelschnitt einer Oberfläche des zweiten Grades tangirt, ihren Pol, in Bezug auf die Oberfläche, in der Linie, welche auf dieser Ebene in ihrem Berührungspunkt mit dem Kegelschnitt senkrecht steht.*

21. Das vorhergehende auf einen Kegelschnitt bezügliche Theorem ist ein besondrer Fall von dem folgenden, welches vielleicht noch nicht bemerkt, aber leicht zu beweisen ist.

„Wenn irgend eine Transversale in der Ebene eines Kegelschnitts gezogen wird und wenn man ihren Pol in Bezug auf die Curve nimmt und *den* Punkt, welcher in Bezug auf die beiden Brennpunkte der conjugirte harmonische von demjenigen ist, in dem diese Gerade die grosse Axe trifft, so wird die Gerade, welche diese beiden Geraden verbindet, senkrecht auf der Transversale stehen."

Ebenso *sei eine Oberfläche des zweiten Grades gegeben und man lege irgend eine Transversal-Ebene; wenn man dann ihren Pol in Bezug auf die Oberfläche und den Pol ihrer Durchschnittslinie mit der Ebene eines excentrischen Kegelschnitts in Bezug auf diese Curve nimmt, so wird die Gerade, welche diese beiden Pole verbindet, senkrecht auf der Transversal-Ebene stehen.*

22. „Das Product der Entfernungen der Brennpunkte eines Kegelschnitts von irgend einer Tangente ist constant."

Wenn wir durch die Brennpunkte zwei Gerade parallel mit der Tangente ziehen und sie, gemäss dem was wir oben (19) gesagt haben, als Tangenten der doppelten Excentricität des Kegelschnitts betrachten, so wird das Produkt der Entfernungen dieser beiden Geraden von der Tangente constant sein."

Ebenso *ist für jede Tangenten-Ebene einer Oberfläche des zweiten Grades das Produkt ihrer Entfernungen von zwei solchen Punkten eines der excentrischen Kegelschnitte der Oberfläche, durch welche die Tangenten der Curve parallel mit dieser Ebene gehen, constant.*

23. „Das Product der Entfernungen eines Kegelschnitts von zwei unter einander parallelen Tangenten ist constant."

Ebenso *ist das Produkt der Entfernungen jedes Punkts eines excentrischen Kegelschnitts einer Oberfläche des zweiten Grades von zwei Tangenten-Ebenen der Oberfläche, die nicht nur unter einander, sondern auch mit der Tangente des Kegelschnitts im gewählten Punkt parallel sind, constant, welches auch dieser Punkt sein mag.*

24. „Wenn man durch einen Brennpunkt eines Kegelschnitts eine Gerade zieht, welche parallel mit irgend einer Tangente der Curve ist, so wird der Unterschied der Quadrate der Entfernungen dieser beiden Geraden von dem Mittelpunkt des Kegelschnitts constant sein." Dieses folgt unmittelbar daraus, dass das Produkt der Entfernungen der beiden Brennpunkte von einer Tangente constant ist.

Ebenso *wenn irgend eine Tangenten-Ebene für eine Oberfläche des zweiten Grades und eine Tangenten-Ebene für den einen ihrer excentrischen Kegelschnitte parallel mit der ersten gelegt wird, so ist der Unterschied der Quadrate der Entfernungen dieser beiden Ebenen von dem Mittelpunkt der Oberfläche constant.*

Dieses und das vorige Theorem können zur Construktion der excentrischen Kegelschnitte der Oberfläche dienen.

25. „Der Scheitel eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel auf einem Kegelschnitt hingleitet und dessen andrer Schenkel durch einen Brennpunkt geht, erzeugt die Peripherie eines Kreises, der über der grossen Axe als Durchmesser beschrieben wird."

Ebenso *durchläuft der Scheitel eines dreikantigen, aus drei Rechten gebildeten Winkels, dessen eine Seitenfläche auf einer Oberfläche des zweiten Grades und die beiden andern Seitenflächen respective auf den beiden excentrischen Kegelschnitten hingleiten, eine Kugel, welche über der grossen Axe als Durchmesser beschrieben wird.*

26. Zwei Seitenflächen des dreikantigen, aus drei Rechten gebildeten Winkels können auf der Oberfläche und die dritte auf einem der beiden excentrischen Kegelschnitte, oder auch zwei Seitenflächen können auf einem excentrischen Kegelschnitt fortrollen und die dritte auf der Oberfläche oder auf dem zweiten excentrischen Kegelschnitt: in jedem dieser drei Fälle beschreibt der Scheitel des dreikantigen Winkels eine Kugel, welche aber für jeden dieser Fälle eine andre wird.

27. Man wird durch die Construktion und durch die Gleichungen, welche wir für die beiden excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades gegeben haben, die beiden, schon seit längerer Zeit von mehren Geometern gefundenen Curven erkannt haben. Ch. Dupin fand sie als den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der unendlich vielen Kugeln, welche drei gegebene Kugeln berühren[69]), und später als die Grenzen zweier Reihen von Oberflächen des zweiten Grades, welche senkrechte Trajectorien unter einander sind[70]); Binet fand sie als die Oerter im Raum, für welche zwei der Hauptmomente der Trägheit eines festen Körpers unter einander gleich sind[71]); Ampère als den Ort der Punkte eines Körpers, welche unendlich viele permanente Rotationsaxen haben[72]); Quetelet[73]), darauf Demonferrand[74]) und Morton[75]) als den Ort der Scheitel aller Drehungskegel, welche man durch einen Kegelschnitt durchgehen lassen kann; Steiner[76]) und später Bobillier[77]) als den Ort der Drehungskegel, welche man einer Oberfläche des zweiten Grades umschreiben kann.

Aber in den verschiedenen Untersuchungen dieser Geometer hat Nichts, wie ich glaube, die Analogie ahnen lassen, welche wir zwischen den Eigenschaften der in Rede

---

69) *Correspondance sur l'école polytechnique*, T. I, p. 25 und T. II, p. 424.

70) *Développement de Géométrie*, p. 280.

71) *Journal de l'école polytechnique*, XVI, p. 63.

72) *Mémoire sur les axes permanens de rotation des corps*, p. 55.

73) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, T. II, p. 151, J. 1820; und *Correspondance mathématique*, T. III, p. 274.

74) *Bulletin de la société philomathique*, J. 1825.

75) *Transactions of the philosophical society of Cambridge*, T. III, p. 185.

76) *Mathem. Journal* von Crelle, T. I, p. 38; und *Bulletin* von Ferussac, Jan. 1827, p. 2.

77) *Correspondance mathématique* von Quetelet, T. IV, p. 157.

stehenden Curve, in Bezug auf die Oberfläche, zu der sie gehören, betrachtet, und zwischen den Eigenschaften der Brennpunkte bei den Kegelschnitten nachgewiesen haben.

Mehre dieser Eigenschaften sind in einer vollständigern Weise, als die der Brennpunkte, ausgesprochen, was in der vollständigern Form der Oberflächen des zweiten Grades liegt, die drei Dimensionen haben und erst Kegelschnitte werden, wenn sie eine dieser Dimensionen verlieren. Hieraus folgt auch, dass mehre Corollarien oder besondre Fälle der allgemeinen Eigenschaften der excentrischen Kegelschnitte nicht ihre analogen für die Brennpunkte haben können, weil das, was sie von ihrem Charakter der Allgemeinheit verloren haben, gerade das war, was ihre Analogie oder ihre Verknüpfung mit den Eigenschaften der Kegelschnitte bildete.

28. Alle Eigenschaften der Kegelschnitte finden auch ihre analogen bei den Kegeln des zweiten Grades, wo die beiden Focallinien dieselbe Rolle spielen, als die Brennpunkte. Es giebt aber für diese Kegel eine charakteristische Eigenschaft, welche uns zur Erklärung dieser Geraden gedient hat [78]), und welche bei den Kegelschnitten nicht stattfinden kann, obgleich sie unmittelbar zu vielen Eigenschaften der Brennpunkte dieser Curven führt; es ist diese: *jede Ebene, welche senkrecht auf einer Focallinie steht, schneidet den Kegel in einem Kegelschnitt, der den einen seiner Brennpunkte in dem Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Focallinie hat.*

Es war natürlich zu vermuthen, dass dieses Theorem sein analoges bei den Oberflächen des zweiten Grades haben müsse. Und in der That findet man:

Jeder excentrische Kegelschnitt einer Oberfläche des zweiten Grades hat die Eigenschaft, dass die Normal-Ebene für irgend einen seiner Punkte die Oberfläche in einem Kegelschnitt schneidet, welcher einen seiner Brennpunkte in diesem Punkte hat.

Dieses Theorem bildet vollständig die Analogie zwischen den excentrischen Kegelschnitten einer Oberfläche des zweiten Grades und den Focallinien eines Kegels des zweiten Grades.

29. Es giebt eine Haupteigenschaft der Kegelschnitte, die sich bei den Kegeln wiederfindet und die wir noch nicht in Bezug auf die Oberflächen des zweiten Grades angeführt

78) *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré*, p. 13.

haben. Dass nämlich „die Summe oder die Differenz der Radii vectores, welche von einem Punkt eines Kegelschnitts nach den beiden Brennpunkten gezogen werden, constant ist." Wir haben lange Zeit gesucht, irgend etwas Analoges für die Oberflächen aufzufinden; aber immer vergebens. Wir wünschen lebhaft, dass dieser Gegenstand Interesse genug besitzen möge, um andre Untersuchungen hervorzurufen. Wir haben zwar einigen Grund zu vermuthen, dass sich das gesuchte Theorem nicht so *explicite*, wie das der Kegelschnitte, wird ausdrücken lassen, aber nichts desto weniger glauben wir, dass hierbei irgend Etwas zu finden ist und dass dieser Gegenstand das Interesse und die Bemühung der Geometer anregen sollte.

§. 2. *Eigenschaften von zwei oder drei Oberflächen, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben.*

30. Wir haben so eben die Beziehungen betrachtet, welche zwischen einer Oberfläche des zweiten Grades und ihren excentrischen Oberflächen stattfinden. Jetzt wollen wir von den Eigenschaften sprechen, welche zwei oder drei Oberflächen gemeinschaftlich sind, wenn sie dieselben excentrischen Kegelschnitte haben.

„Durch einen Punkt kann man zwei Kegelschnitte legen, welche zu ihren gemeinschaftlichen Brennpunkten zwei gegebene Punkte haben; die eine ist eine Ellipse, die andre eine Hyperbel; sie schneiden sich unter rechten Winkeln und die Tangenten dieser Curven in jedem Durchschnittspunkt halbiren den Winkel und dessen Supplement, welche durch die beiden von diesem Punkt nach den Brennpunkten der Curven gezogenen Geraden gebildet werden."

Ebenso *kann man durch irgend einen Punkt im Raum drei Oberflächen des zweiten Grades legen, welche zu einem gemeinschaftlichen excentrischen Kegelschnitt einen gegebenen Kegelschnitt haben; die eine ist ein Ellipsoid, die zweite ein Hyperboloid mit Einem Fach und die dritte ein Hyperboloid mit zwei Fächern. Diese drei Oberflächen schneiden sich, je zwei, unter rechtem Winkel; die drei Tangenten ihrer Durchschnittscurven in dem gegebenen Punkt sind die Hauptaxen des Kegels, dessen Scheitel in diesem Punkt liegt und der den excentrischen Kegelschnitt zur Basis hat; und die Focallinien des Kegels sind die beiden Generatrices des Hyperboloids mit Einem Fach, die sich in seinem Scheitel durchschneiden.*

Wir fügen noch hinzu, dass die Durchschnittscurven dieser Oberflächen die Krümmungscurven der Oberflächen sind; was schon Dupin und Binet bewiesen haben.

31. Aus diesem Theorem lassen sich vielfältige Folgerungen ziehen. Denn es ergiebt sich daraus, dass die meisten Eigenschaften, welche sich auf Eine Oberfläche und seinen excentrischen Kegelschnitt beziehen, Gelegenheit geben zu Eigenschaften, bezüglich auf zwei oder mehre Oberflächen, die einen gemeinschaftlichen excentrischen Kegelschnitt haben.

32. So schliesst man aus dem Theorem (11):

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades denselben excentrischen Kegelschnitt haben, und wenn man irgend einen Punkt im Raum zum gemeinsamen Scheitel zweier um diese Oberflächen umgeschriebenen Kegel annimmt, so werden diese beiden Kegel dieselben Hauptaxen und dieseben Focallinien haben. Diese drei Hauptaxen werden Normalen für drei Oberflächen sein, welche man durch den gemeinsamen Scheitel der Kegel legen kann und welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, als die beiden gegebenen Oberflächen. Und die beiden Focallinien werden die Generatrices des Hyperboloids mit Einem Fach sein, welche die eine dieser drei Oberflächen ist.

33. Aus diesem Theorem folgert man:

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades denselben excentrischen Kegelschnitt haben, so werden ihre scheinbaren Umrisse, von welchem Punkt im Raum man sie auch betrachten mag, sich unter rechten Winkeln zu schneiden scheinen.[79])

34. *Und folglich sind zwei solche Oberflächen geeignet, die beiden Fächer zu bilden, welche der Ort für die Mittelpunkte der Krümmung einer bestimmten einzigen Oberfläche sind.*

35. Wenn der Scheitel der Kegel in der Unendlichkeit liegt, so liefert das Theorem (32) das folgende:

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades denselselben excentrischen Kegelschnitt haben, und wenn man

---

79) Ich habe schon dieses Theorem für zwei Umdrehungsoberflächen in meinem Memoire über die allgemeinen Eigenschaften dieser Oberflächen und für zwei beliebige Oberflächen, so wie ich es hier ausgesprochen habe, in einem Memoire über die Construction der Normalen verschiedener mechanischer Curven, welches der philomathischen Societät im April 1830 vorgelegt wurde, bewiesen.

sich zwei Cylinder denkt, die respective diesen Oberflächen umgeschrieben und deren Seitenlinien unter einander parallel sind, so werden die Schnitte dieser Cylinder durch eine Ebene, die senkrecht auf ihren Seitenlinien steht, zwei Kegelschnitte sein, welche dieselben Brennpunkte haben.

Man sieht, dass die Eigenschaft der beiden Oberflächen, dass ihre Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, eine besondre Folge dieses Theorems ist.

36. „Wenn man über der Tangente und der Normale für einen Punkt eines Kegelschnitts, als Hauptaxen genommen, zwei andre Kegelschnitte construirt, welche durch den Mittelpunkt des vorgegebenen Kegelschnitts gehen und respective Normalen für dessen Hauptaxen sind, so werden

1) diese beiden Kegelschnitte dieselben Brennpunkte haben;

2) werden ihre nach der gegen den vorgegebenen Kegelschnitt normalen Linie gerichteten Axen respective *den* Axen dieses Kegelschnitts gleich sein, gegen welche die beiden andern Kegelschnitte respective normal sind."

Ebenso:

Wenn die Normale in irgend einem Punkt einer Oberfläche des zweiten Grades und die beiden Tangenten der Krümmungscurven in diesem Punkt ihrer Richtung nach als die drei Hauptaxen dreier andern Oberflächen des zweiten Grades angenommen werden, welche alle drei durch den Mittelpunkt der gegebenen gehen und in diesem Punkt respective gegen die drei Hauptaxen dieser Oberfläche normal sind; so *werden*:

1) *diese drei Oberflächen dieselben excentrischen Kegelschnitte haben*;

2) *werden die Durchmesser dieser Oberflächen, welche nach der Normale der gegebenen gerichtet sind, respective den drei Durchmessern dieser gegebenen gleich sein, gegen welche diese drei Oberflächen normal sind.*

37. Das Merkmal, wodurch man in der Analysis ausdrückt, dass bei zwei Oberflächen ihre Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, besteht darin, dass die Differenz der Quadrate ihrer Hauptdurchmesser constant ist.

Wenn also a^2, b^2, c^2 die Quadrate der halben Hauptdurchmesser der ersten Oberfläche und a'^2, b'^2, c'^2 die Quadrate der halben Hauptdurchmesser der zweiten sind, so hat man $a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2$.

Diese Relation zwischen den beiden Oberflächen, welche genügt, um auszudrücken, dass sie dieselben excentrischen

Kegelschnitte haben, lässt sich auf zwei Arten verallgemeinern, und kann aus den Eigenschaften, die sich auf *alle* Punkte der beiden Oberflächen und nicht allein auf ihre Scheitel beziehen, abgeleitet werden.

Wir drücken die eine dieser allgemeinen Eigenschaften durch folgendes Theorem aus:

Wenn man an zwei Oberflächen des zweiten Grades, die denselben excentrischen Kegelschnitt haben, zwei unter einander parallele Ebenen legt, welche respective diese beiden Oberflächen berühren, so wird die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkt der beiden Oberflächen constant sein, welches auch die gemeinschaftliche Richtung der beiden Tangenten-Ebenen sein mag.

38. Hieraus folgt:

Wenn ein Ellipsoid und ein Hyperboloid dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, so sind die Tangenten-Ebenen des Ellipsoids, welche parallel mit den Tangenten-Ebenen an den Asymptotenkegel des Hyperboloids gelegt werden, alle in gleicher Entfernung von dem gemeinsamen Mittelpunkt beider Oberflächen.

39. Die zweite in Rede stehende allgemeine Eigenschaft betrifft zwei Oberflächen derselben Art, d. h. es müssen alle beide entweder Ellipsoide oder Hyperboloide mit Einem Fach oder mit zwei Fächern sein. Um sie auszusprechen, wollen wir *correspondirende* Punkte der Oberflächen zwei solche Punkte nennen, deren Coordinaten, in der Richtung jeder Hauptaxe, proportional den halben Durchmessern der Oberflächen sind, welche nach derselben Axe gerichtet sind. Hiernach findet man:

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades von einerlei Art denselben excentrischen Kegelschnitt haben, so ist die Differenz der Quadrate zweier Halbdurchmesser dieser Oberflächen, welche in zwei correspondirenden Punkten endigen, constant.

40. Aus diesem Theorem leitet man für die Oberflächen, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, eine andre merkwürdige Eigenschaft ab, welche, speciell für die Ellipsoide betrachtet, die Grundlage zu dem schönen Theorem von Ivory über die Attraction dieser Körper ist. Nämlich:

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades von einerlei Art dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, so ist die Distanz zweier willkührlich auf diesen beiden Oberflächen gewählten Punkte gleich der Distanz der correspodirenden Punkte.

41. Wir wollen diesen Paragraphen mit zwei Theoremen beschliessen, welche, gleich dem eben genannten, ihre Anwendung in der Theorie von der Anziehung der Ellipsoide finden.

Maclaurin hat bewiesen: „Wenn zwei Ellipsen um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, und wenn man durch einen, auf einer ihrer Hauptaxen gewählten, Punkt zwei Transversalen zieht, welche mit der andern Axe solche Winkel bildet, dass ihre Cosinus sich unter einander wie die Durchmesser der beiden Ellipsen, welche nach dieser zweiten Axe gerichtet sind, verhalten, so werden die Segmente, die auf diesen beiden Transversalen respective durch die beiden Ellipsen abgegeschnitten werden, sich unter einander wie die Durchmesser, welche nach der ersten Axe gerichtet sind, verhalten. (*Treatise of fluxions*, Art. 648.)

Dem analogen Theorem für die Oberflächen des zweiten Grades kann man eine ausgedehntere und vollständigere Aussprache geben, und zwar folgende:

Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, und wenn man durch einen festen Punkt auf einer ihrer Hauptaxen willkührlich eine Transversale durch die erste Oberfläche zieht; darauf eine zweite Transversale, die durch die Bedingurg bestimmt wird, dass die Cosinus der Winkel, welche die beiden Transversalen mit jeder der beiden andern Hauptaxen bilden, sich unter einander wie die nach jeder dieser Axen gerichteten Durchmesser der Oberflächen verhalten, so findet Folgendes statt:

1) *Die Segmente, welche auf den beiden Transversalen respective durch die beiden Oberflächen abgeschnitten werden, verhalten sich unter einander wie die beiden Durchmesser der Oberflächen, welche nach der ersten Hauptaxe gerichtet sind;*

2) *Die Sinus der Winkel, welche die beiden Transversalen mit dieser ersten Hauptaxe bilden, verhalten sich unter einander wie zwei Durchmesser der beiden Oberflächen, welche durch die beiden Punkte gehen, in denen die beiden Transversalen die auf dieser ersten Axe senkrechte Diametralebene treffen;*

3) *Diese beiden Durchmesser werden in den beiden Oberflächen einander correspondirende sein.*

42. Dieses Theorem kann dazu dienen, mit Leichtigkeit das Theorem von Maclaurin zu beweisen, welches sich auf die Attraction der Ellipsoide auf Punkte, die in ihren Haupt-

axen liegen, bezieht (*Treatise of fluxions*, Art. 653). Dieser Beweis ist direct und fordert nicht, wie der des Maclaurin, die vorläufige Kenntniss von der Anziehung eines Revolutions-Ellipsoids auf Punkte in der Revolutionsaxe.

43. Es lässt sich leicht beweisen: „Wenn zwei Kegelschnitte dieselben Brennpunkte haben, und man von einem Punkt auf einer ihrer Hauptaxen zwei Tangenten zieht, so verhalten sich die Cosinus der Winkel, welche sie mit der andern Hauptaxe bilden, unter einander wie die beiden nach dieser Axe gerichteten Durchmesser der Kegelschnitte."

Ebenso: ***Wenn zwei Oberflächen des zweiten Grades dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, und wenn man durch eine gerade Linie, welche in einer ihrer drei Hauptebenen liegt, zwei Tangenten-Ebenen legt, so verhalten sich die Cosinus der Winkel, welche dieselben mit der auf dieser Hauptebene senkrechten Hauptaxe bilden, wie die Durchmesser der Oberflächen, die nach dieser Axe gerichtet sind.***

44. Dieses Theorem hätte aus der Analysis, welche Legendre in seinem Memoire über die Attraction der Ellipsoide[80]) angewandt hat, gefolgert werden können, wenn dieser berühmte Geometer die geometrische Bedeutung der analytischen Formeln aufgesucht hätte, durch welche er durchgehen musste, um zur direkten Auflösung dieser schwierigen Aufgabe zu gelangen. Aber wir glauben sagen zu können, dass diese Uebersetzung der Formeln von Legendre in die gewöhnliche Sprache zu vielen andern interessanten Resultaten geführt hätte. So würde man gesehen haben, dass die konischen Oberflächen, deren er sich bedient, um den Weg seiner Integrale darzustellen, alle zu ihren gemeinschaftlichen Hauptaxen die einer konischen Oberfläche haben, welche dem anziehenden Ellipsoid umgeschrieben ist; und dass die eine dieser Axen genau *die* Gerade ist, welche eine Eigenschaft des *maximum* besitzt und welche bei diesem Gegenstand eine wichtige Rolle spielt. Diese Eigenschaft des *maximum* wird von Legendre analytisch durch eine Gleichung des dritten Grades ausgedrückt; in der Geometrie bedeutet sie: ***Wenn man um den angezogenen Punkt eine Transversale drehen lässt und man nimmt die Differenz der inversen Werthe der Entfernungen dieses Punkts von den beiden Punkten, in denen die Transversale die Oberfläche des Ellipsoids trifft, so wird diese Differenz ein maxi-***

80) S. die *Mémoires de l'Académie des sciences*, J. 1788.

mum sein, wenn die Richtung der Transversale dieselbe ist, als die der einen von den drei Hauptaxen eines Kegels, welcher dem Ellipsoid umgeschrieben ist und dessen Scheitel der angezogene Punkt ist. Und man findet, dass, wenn die Differenz, statt ein *maximum* zu sein, constant sein soll, dass dann die Transversale einen Kegel des zweiten Grades beschreibt. Das sind die Kegel, deren sich Legendre bedient hat. Ihre gemeinschaftliche Eigenschaft ist die, dass sie alle durch die Curven doppelter Krümmung vom vierten Grade gehen, welche die Durchschnitte eines gewissen Hyperboloids mit zwei Fächern und einer Reihe von concentrischen Kugeln sind.

45. Wir wollen noch bemerklich machen, dass alle Theoreme, welche wir bisher aufgestellt haben, von der grössten Allgemeinheit sind, mit Ausnahme der beiden letzten; d. h. dass in diesen Theoremen die Punkte, die Ebenen, die Geraden, welche man in Bezug auf die Oberflächen des zweiten Grades zu betrachten hatte, durchaus willkührliche Lagen im Raum hatten. In den beiden letzten dagegen ist der Punkt, durch den man die Transversalen zieht, nothwendig auf der einen Hauptaxe der Oberflächen genommen, und die Gerade, durch welche man die Tangenten-Ebenen an diese Oberflächen legt, liegt in der einen ihrer Hauptebenen. Es wäre interessant, die allgemeinen Theoreme zu kennen, die sich auf ganz willkührliche Lagen dieses Punkts und dieser Geraden im Raum beziehen; von welchen allgemeinen Theoremen sich dann die angeführten (**41** und **43**) als besondre Fälle ableiten würden.

Wir bezeichnen diesen Gegenstand zu Untersuchungen im Interesse der Geometrie und weil wir glauben, dass es ein Mittel sein dürfte, direct durch die Geometrie und ohne Hülfe des Theorems von Ivory die Attraction der Ellipsoide auf irgend welche ausserhalb liegende Punkte zu finden, so wie wir angeführt haben, dass das Theorem (**41**) die Attraction auf Punkte giebt, welche auf den Hauptaxen liegen.

§. 3. *System von Oberflächen des zweiten Grades, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben.*

46. „Man kann in einer Ebene unendlich viele Kegelschnitte beschreiben, welche zu ihren gemeinschaftlichen Brennpunkten zwei gegebene Punkte haben; sie bilden zwei Reihen von Ellipsen und Hyperbeln; jede Ellipse schneidet in vier Punkten und unter rechtem Winkel jede der Hyperbeln.

Ebenso *kann man unendlich viele Oberflächen des zweiten Grades bilden, welche alle zu ihrem gemeinschaftlichen excentrischen Kegelschnitt einen gegebenen Kegelschnitt haben; alle diese Oberflächen theilen sich in drei Gruppen: in der ersten sind Ellipsoide, in der zweiten Hyperboloide mit Einem Fach und in der dritten Hyperboloide mit zwei Fächern;*

Irgend welche zwei Oberflächen, welche zu zwei verschiedenen Gruppen gehören, schneiden sich unter rechtem Winkel und ihre Durchschnittslinie ist eine Krümmungscurve jeder der beiden Oberflächen;

Irgend welche drei Oberflächen, welche respective den drei Gruppen angehören, schneiden sich in acht Punkten;

In jedem dieser Punkte sind die Normalen der Oberflächen die Hauptaxen eines Kegels, dessen Scheitel in diesem Punkt liegt und der durch den einen der excentrischen Kegelschnitte geht, welche den drei Oberflächen gemeinschaftlich sind;

Und die beiden Generatrices des Hyperboloids mit einem Fach in diesem Punkt sind die beiden Focallinien dieses Kegels.

47. „Mehre Kegelschnitte, welche um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, besitzen alle Eigenschaften eines Systems von Kegelschnitten, die in ein und dasselbe Viereck eingeschrieben sind: die Seiten des Vierecks sind imaginär, aber zwei seiner gegenüberliegenden Scheitel sind reell, das sind die beiden Brennpunkte; die Verbindungslinie dieser beiden Punkte kann als einer von den ins Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte betrachtet werden."

Diese Haupteigenschaft der um dieselben Brennpunkte beschriebenen Kegelschnitte, von der schon Poncelet Gebrauch gemacht hat, kann die Quelle einer grossen Menge von Eigenschaften dieser Curven sein; und aus diesen Eigenschaften können sich als besondre Fälle die der Brennpunkte in Bezug auf jeden Kegelschnitt ableiten.

Ebenso *können mehre Oberflächen, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, betrachtet werden, als wären sie alle in eine und dieselbe developpable Oberfläche eingeschrieben. Diese Oberfläche ist imaginär und des ungeachtet sind zwei ihrer* lignes de striction *reell: dieses sind zwei den Oberflächen gemeinschaftliche excentrische Kegelschnitte; die beiden andern* lignes de striction *sind imaginär; die eine ist der dritte ex-*

centrische Kegelschnitt der Oberflächen (welcher in der Ebene der kleinen und der mittlern Hauptaxe liegt) und die andre ist in der Unendlichkeit.

Wir fügen noch hinzu, dass *die beiden reellen lignes de striction als Oberflächen betrachtet werden können, deren eine Axe Null ist und welche zu der Reihe der gegebenen Oberflächen gehören.*

48. Also:

Oberflächen des zweiten Grades, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, und diese beiden Curven, als unendlich abgeplattete Oberflächen betrachtet, besitzen alle Eigenschaften eines Systems von Oberflächen des zweiten Grades, die in Eine developpable Oberfläche eingeschrieben sind.

Aus der ganzen Theorie der Oberflächen, die um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, scheint mir dieses Theorem das fruchtbarste und einflussreichste zu sein. Man leitet daraus leicht eine grosse Anzahl von Eigenschaften dieser Oberflächen ab.

49. Ein solches System von Oberflächen hat sich schon bei verschiedenen Aufgaben dargeboten, und namentlich, was bemerkenswerth genug ist, bei Fragen der Physik und der Mechanik; und man ist auf diese Weise zur Entdeckung einiger ihrer Eigenschaften geführt worden. Aber diese Eigenschaften, noch gering an Zahl, sind isolirt geblieben, ohne dass man versucht hat, sie an irgend eine Theorie, die sich auf die Oberflächen des zweiten Grades im Allgemeinen bezieht, oder an irgend einen Fundamentalsatz, wie den eben angeführten, anzuknüpfen.

50. Die folgenden Theoreme sind Folgerungen aus diesem Satz.

Wenn man durch mehre Oberflächen des zweiten Grades, mit denselben excentrischen Kegelschnitten, irgend eine Transversale legt, welche die Oberflächen in Kegelschnitten durchschneidet, und wenn man diese Curven als Berührungscurven eben so vieler Kegel annimmt, die den Oberflächen respective umgeschrieben sind, so werden die Scheitel aller dieser Kegel in einer geraden Linie liegen, die senkrecht auf der Transversal-Ebene steht.

Oder mit andern Worten und allgemeiner:

Die Pole der Transversal-Ebene, in Bezug auf die Oberflächen genommen, werden auf einer einzigen Geraden liegen, die senkrecht auf dieser Ebene steht.

51. Da die beiden excentrischen Kegelschnitte der Oberflächen selbst als zwei unendlich abgeplattete Oberflächen betrachtet werden können, so schliesst man daraus auf folgende besondre Eigenschaften dieser beiden Curven:

Wenn man durch die beiden excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades irgend eine Transversal-Ebene legt, und wenn man den Pol der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der jedes dieser Kegelschnitte in Bezug auf diese Curve nimmt, so wird die Gerade, welche diese beiden Pole verbindet, senkrecht auf der Transversal-Ebene stehen.

Wenn diese Transversal-Ebene Tangente für einen Punkt der Oberfläche des zweiten Grades ist, so wird diese Gerade Normale für die Oberfläche in diesem Punkt.

52. *Wenn man durch irgend eine Gerade im Raum an mehre Oberflächen des zweiten Grades, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, Tangenten-Ebenen legt, so werden die Normalen dieser Oberflächen, welche durch ihre Berührungspunkte mit den Ebenen gezogen werden, ein hyperbolisches Paraboloid bilden.*

53. Wenn die Gerade, durch welche die Tangenten-Ebenen gelegt sind, für eine der Oberflächen eine Normale ist, so wird das Paraboloid ein Kegelschnitt, und die Berührungspunkte der Tangenten-Ebenen mit den Oberflächen liegen auf einer ebenen Curve des vierten Grades.

Und wenn die Gerade auf irgend eine Weise in einer der Hauptebenen der Oberflächen liegt, so werden die Berührungspunkte der Tangenten-Ebenen auf einer Kreisperipherie liegen.

54. *Wenn mehre Oberflächen dieselben excentrischen Kegelschnitte haben und wenn irgend ein Punkt im Raum als der gemeinschaftliche Scheitel eben so vieler diesen Oberflächen umgechriebenen Kegel betrachtet wird, so hüllen die Ebenen der Berührungscurven eine developpable Oberfläche ein, welche die Eigenschaft besitzt, dass jede ihrer Tangenten-Ebenen sie in einem Kegelschnitt scheidet. Die drei Hauptebenen der Oberflächen und die drei Hauptebenen der Kegel, welche ihnen umgeschrieben sind* (32)*, werden Tangenten-Ebenen dieser developpabeln sein.*

Diese Oberfläche ist vom vierten Grad und ihre Rückkehrcurve (*arête de rebroussement*) *ist die Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade.*

55. *Wenn mehre Oberflächen dieselben excentrischen Kegelschnitte haben und wenn man von irgend einem Punkte im Raum Normalen auf diese Oberflächen fällt*, so *werden*:

1) *diese Normalen einen Kegel des zweiten Grades bilden*;

2) *werden die Tangenten-Ebenen der Oberflächen, welche durch die Fusspunkte der Normalen gelegt werden, eine developpable des vierten Grades bilden.*

56. *Wenn mehre Oberflächen dieselben excentrischen Kegelschnitte haben und wenn man von einem Punkt, der in der einen ihrer Hauptebenen angenommen ist, Normalen auf diese Oberflächen fällt, so werden*:

1) *alle diese Normalen in zwei Ebenen liegen, von denen die eine diese Hauptebene und die andre senkrecht darauf sein wird*;

2) *werden die Fusspunkte der Normalen in der Hauptebene auf einer Curve des dritten Grades liegen, welche die ist, die Quetelet focale à noeud genannt hat*[81]);

3) *liegen die Fusspunkte der Normalen, welche in der zweiten Ebene enthalten sind, auf der Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser das Perpendikel ist, welches von dem angenommenen festen Punkt in der einen Hauptebene auf die Poläre dieses Punkts, in Bezug auf den in derselben Ebene liegenden excentrischen Kegelschnitt genommen, gefällt wird*;

4) *hüllen die Tangenten-Ebenen der Oberflächen, welche durch die Fusspunkte der ersten Normalen gelegt werden, einen parabolischen Cylinder ein, und ihre Tangenten-Ebenen, welche durch die Fusspunkte der andern Normalen gelegt werden, gehen alle durch eine und dieselbe gerade Linie, die in der Hauptebene liegt.*

Wenn man sich durch den festen Punkt einen concentrischen Kegelschnitt denkt, der ähnlich ist und ähnlich liegt mit dem excentrischen Kegelschnitt, so wird die Ebene, in welcher die zweiten Normalen liegen, normal gegen diesen Kegelschnitt sein.

57. *Wenn mehre Oberflächen dieselben excentrischen Kegelschnitte haben und wenn man für sie unter*

---

81) Quetelet hat diese Curve als den geometrischen Ort der Schnitte gefunden, welche an einem geraden Kegel durch Ebenen gebildet werden, die durch eine und dieselbe Tangente des Kegels und senkrecht auf eine seiner Seitenlinien gelegt werden.

einander parallele Normalen zieht, so werden die Fusspunkte dieser Normalen auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren eine Asymptote parallel mit den Normalen sein wird.

58. *Wenn man durch mehre Oberflächen, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, irgend eine Transversal-Ebene legt, und wenn man alle Normalen der Oberflächen aufsucht, die in dieser Ebene liegen, so werden:*

1) *diese Normalen einen Kegelschnitt einhüllen;*

2) *werden die Tangenten-Ebenen der Oberflächen, welche durch die Fusspunkte der Normalen gelegt sind, alle durch eine und dieselbe gerade Linie gehen;*

3) *werden die Fusspunkte der Normalen auf den Oberflächen eine Curve des dritten Grades bilden, welche die focale à noeud sein wird.*

59. Man weiss, dass der Scheitel eines rechten Winkels, dessen beide Schenkel sich auf Kegelschnitte aufwickeln, welche um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, eine Kreisperipherie beschreibt; ebenso:

Wenn drei unter einander rechtwinklige Ebenen respective für drei Oberflächen des zweiten Grades, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, Tangenten sind, so wird der Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen auf einer Kugel liegen.

Diese Eigenschaft dreier Oberflächen, deren Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, ist schon analytisch von Bobillier bewiesen. (*Annales des mathématiques,* T. XIX, p. 329.)

60. Die in dieser Note angeführten Theoreme sind die wichtigsten von denen, zu welchen wir in der Theorie der *excentrichen Kegelschnitte* der Oberflächen zweiten Grades gekommen sind. Es würde uns jetzt noch übrig sein, zu zeigen, dass diese neue Theorie ein nützliches Element in der rationellen Geometrie werden muss; da aber diese Note schon zu lang geworden ist, so begnügen wir uns hier, von den Fragen, bei denen man von dieser Theorie zweckmässig Gebrauch machen kann, folgende drei anzuführen, durch die man ohne Mühe zu einer Menge verschiedener Sätze gelangen kann:

1) Die Vertheilung im Raum der Hauptaxen und der Focallinien aller Kegel, welche man durch einen und denselben Kegelschnitt gehen lassen oder einer und derselben Oberfläche des zweiten Grades umbeschreiben kann.

2) Die Vertheilung im Raum der Hauptaxen alle Ellipsoide, die ihre Mittelpunkte in verschiedenen Punkten des Raums haben, und deren drei conjugirte Durchmesser von drei festen Punkten ausgehen;

3) Endlich die Vertheilung im Raum aller permanenten Rotationsaxen eines festen Körpers; und die Werthe der Momente der Trägheit des Körpers in Bezug auf diese Axen.

Note XXXII.

(Fünfte Epoche, §. 30.)

Theoreme für die Oberflächen des zweiten Grades, welche den Theoremen von Pascal und Brianchon für die Kegelschnitte analog sind.

1. Es sei ein Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben. Seine drei Seiten von ungerader Ordnung, bis zu ihrem Zusammentreffen verlängert, bilden ein Dreieck, und die drei Seiten von gerader Ordnung sind drei Sehnen des Kegelschnitts, welche respective in den drei Winkeln dieses Dreiecks liegen. Das Theorem von Pascal drückt aus, dass *diese drei Chorden respective die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten treffen, welche in gerader Linie liegen.*

Man kann also, um das Theorem des Pascal auszudrücken, für die Betrachtung des Sechsecks die eines Dreiecks substituiren, welches in der Ebene eines Kegelschnitts verzeichnet ist.

Indem wir das Theorem von diesem Gesichtspunkt aus betrachten, wollen wir es auf die Oberflächen des zweiten Grades übertragen, wo sein analoges eine Eigenschaft eines Tetraeders sein wird, dessen Kanten einer Oberfläche des zweiten Grades begegnen.

2. Dieses Theorem ist folgendes:

Wenn die sechs Kanten eines irgend wie im Raum gelegenen Tetraëders eine Oberfläche des zweiten Grades in zwölf Punkten treffen, so liegen diese zwölf Punkte zu je drei in vier Ebenen, von denen jede drei Punkte

enthält, die solchen drei Kanten angehören, welche von einerlei Ecke des Tetraëders ausgehen;

Diese vier Ebenen treffen respective die diesen Ecken gegenüberliegenden Seitenflächen in vier Geraden, welche die vier Generatrices einer und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloids mit Einem Fache sind.

Man kann mehre Systeme von vier Ebenen bilden, welche zu je drei die zwölf Durchschnittspunkte der Kanten des Tetraëders und der Oberfläche enthalten; das Theorem wird für jedes dieser Systeme stattfinden. Wenn z. B. die vier Ecken des Tetraëders innerhalb der Oberfläche liegen, so kann man die vier in Rede stehenden Ebenen dergestalt annehmen, dass jede von ihnen solche drei Punkte enthält, in welchen die von jeder Ecke respective ausgehenden Kanten selbst und nicht die Verlängerungen dieser Kanten die Oberfläche treffen.

Diese Eigenschaft des Tetraëders, in Bezug auf eine Oberfläche des zweiten Grades betrachtet, entspricht, wie man sieht, der durch das Theorem von Pascal ausgedrückten Eigenschaft des Dreiecks, welches in der Ebene eines Kegelschnitts liegt. Unter diesem Gesichtspunkt stellen wir das obige Theorem als das dem Pascal'schen analoge im Raume dar.

Wenn die sechs Kanten des Tretaëders Tangenten für die Oberfläche des zweiten Grades sind, so giebt es nur Ein System von vier Ebenen, welche zu je drei die sechs Berührungspunkte enthalten, und das Theorem wird folgendes:

3. *Wenn die sechs Kanten eines Tetraëders Tangenten für eine Oberfläche des zweiten Grades sind, so trifft die Ebene dreier Berührungspunkte solcher Kanten, die von Einer Ecke ausgehen, die dieser Ecke gegenüberliegende Seitenfläche des Tetraëders in einer geraden Linie; und die auf diese Weise bestimmten vier Geraden gehören einem Hyperboloid mit Einem Fache an.* [81])

4. Wenn das vorgelegte Tetraëder in die Oberfläche des zweiten Grades eingeschrieben ist, so kann man jede seiner Ecken als ausserhalb der Oberfläche, aber unendlich nahe an ihr liegend betrachten; die drei Punkte, in denen die von dieser Ecke auslaufenden Kanten in die Oberfläche eintreten, werden ihre Tangenten-Ebene bestimmen, und man schliesst daraus auf folgendes Theorem:

---

82) Ich habe dieses Theorem aus einem allgemeinern und von dem obigen verschiedenen Theorem abgeleitet, in den *Annales des mathématiques*, XIX, p. 79.

Wenn ein Tetraëder einer Oberfläche des zweiten Grades eingeschrieben ist, so schneiden die Tangenten-Ebenen, welche durch die Eckpunkte gelegt sind, respective die Ebenen der gegenüberliegenden Seitenflächen in vier Geraden, welche Generatrices eines und desselben Hyperboloids sind. [83])

5. Das Theorem von Brianchon besteht darin, dass *in jedem Sechseck, das einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, die drei Diagonalen, welche je zwei gegenüberliegende Scheitelpunkte verbinden, in Einem Punkt zusammenkommen.* Betrachten wir die Scheitel von ungerader Ordnung, so bestimmen sie ein Dreieck von vollkommen willkührlicher Lage in Bezug auf den Kegelschnitt. Jeder Scheitel von gerader Ordnung im Sechseck ist der Durchschnittspunkt zweier Tangenten, die von zwei Scheiteln des Dreiecks ausgehen; und verbindet man diesen Punkt durch eine Gerade mit dem dritten Scheitel des Dreiecks, so hat man auch drei Gerade, welche in Einem Punkt zusammenkommen. Dieser Satz, welcher, nur auf andre Weise ausgesprochen, das Theorem des Brianchon ist, ist eine Eigenschaft irgend eines Dreiecks in der Ebene eines Kegelschnitts.

6. Eben so hat man im Raume das folgende Theorem:

Wenn man durch die Kanten eines Tetraëders, welches irgendwie im Raume liegt, zwölf Tangenten-Ebenen an eine Oberfläche des zweiten Grades legt, so schneiden sich diese zwölf Ebenen zu je drei in vier Punkten, von denen jeder der Durchschnitt dreier Ebenen ist, welche durch solche Kanten gelegt sind, die in Einer Seitenfläche des Tetraeders liegen;

die Geraden, welche diese vier Punkte mit den respective diesen Seitenflächen gegenüberliegenden Endpunkten verbinden, sind vier Generatrices einer und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloids mit Einem Fach.

Dieses ist das Theorem, welches als das analoge im Raume von dem des Brianchon betrachtet werden kann.

Man kann auf verschiedene Arten das System von vier Punkten bilden, welche die Durchschnittspunkte je dreier der zwölf Tangenten-Ebenen der Oberfläche zweiten Grades sind.

---

83) Steiner und Bobillier (*Annales des mathématiques*, T. XVIII, p. 336) und hernach wir (ibid. T. XIX, p. 67) haben schon dieses Theorem auf verschiedene Arten bewiesen.

7. Wenn die Kanten eines Tetraëders Tangenten der Oberfläche sind, dann giebt es nur ein einziges System von vier Punkten, und das Theorem drückt sich dann so aus:

Wenn die sechs Kanten eines Tetraëders Tangenten für eine Oberfläche des zweiten Grades sind, so schneiden sich die Tangenten-Ebenen der Oberfläche, welche durch die in Einer Seitenfläche des Tetraëders enthaltenen Kanten gelegt werden, in Einem Punkt; wenn man diesen Punkt durch eine Gerade mit dem dieser Seitenfläche gegenüberliegenden Eckpunkt verbindet, so wird man auf diese Weise vier Gerade erhalten, welche Generatrices derselben Erzeugungsart eines Hyperboloids mit Einem Fache sind.

8. Wenn das gegebene Tetraëder der Oberfläche umgeschrieben ist, so giebt das allgemeine Theorem, als Corollar, das folgende:

Wenn ein Tetraëder einer Oberfläche des zweiten Grades umgeschrieben ist, so sind die Geraden, welche die Ecken desselben respective mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, vier Generatrices einer und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloids mit Einem Fach.

9. Das Zusammenstellen eines Tetraëders und einer Oberfläche des zweiten Grades, die auf irgend eine Weise im Raume liegen, bietet noch mehre andre Eigenschaften dar, welche von den, durch die beiden allgemeinen Theoreme 2 und 6, ausgedrückten verschieden sind und welche, so wie diese, Sätzen der ebenen Geometrie entsprechen. Wir führen folgendes doppelte Theorem an, welches wir in den *Annales* von Gergonne (T. XIX, p. 76) bewiesen haben und welches uns in seinen Folgen fruchtbarer zu sein scheint, als die beiden Theoreme 2 und 6.

Es sei im Raum ein Tetraëder und eine Oberfläche des zweiten Grades gegeben, dann werden:

1) *die Geraden, welche die Ecken des Tetraëders respective mit den Polen der gegenüberliegenden Seitenflächen verbinden, in Bezug auf die Oberflächen genommen, vier Generatrices einer und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloids;*

2) *sind die Durchschnittslinien der Seitenflächen des Tetraëders respective mit den Polarebenen der gegenüberliegenden Eckpunkte, vier Generatrices einer und derselben Erzeugungsart eines zweiten Hyperboloids.*

10. Folgende allgemeine Eigenschaft des Tetraëders kann auch als zu derselben Theorie, wie die vorhergehenden, gehörig betrachtet werden.

Es sei im Raum ein Tetraëder und eine Oberfläche des zweiten Grades gegeben.

1) *Die Polarebene jedes Eckpunktes des Tetraëders, in Bezug auf die Oberfläche, trifft die drei an dieser Ecke liegenden Kanten in drei Punkten. Auf diese Weise erhält man auf den Kanten des Tetraeders zwölf Punkte, und diese zwölf Punkte liegen auf Einer Oberfläche des zweiten Grades.*

2) *Wenn man durch den Pol jeder Seitenfläche des Tetraëders, in Bezug auf die Oberfläche genommen, drei Ebenen legt, welche respective durch die drei in dieser Seitenfläche enthaltenen Kanten gehen, so wird man zwölf Ebenen erhalten, und diese zwölf Ebenen werden Eine Oberfläche des zweiten Grades tangiren.*

11. Von den vier allgemeinen Theoremen 2, 6, 9 und 10, welche diese Note enthält, sind die beiden letztern doppelt, indem jedes von ihnen in seinem Ausspruch zwei verschiedene Theile enthält, welche zwei gesonderte Theoreme ausmachen könnten. Die beiden ersten hätten eben so vollständig ausgesprochen werden können, wenn wir uns nicht hätten genau auf die Analogie einschränken wollen, welche sie mit den Theoremen von Pascal und Brianchon darbieten. Um die Theoreme zu vervollständigen, führen wir an, dass man in jedem von ihnen ein zweites Tetraëder bildet, dessen Seitenflächen und dessen Ecken respective den Seitenflächen und den Ecken des vorgegebenen Tetraëders correspondiren; und dass

1) *die correspondirenden Seitenflächen der beiden Tetraëder zu je zwei sich in vier geraden Linien schneiden, welche Generatrices einer und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloids sind*; und dass

2) *die correspondirenden Eckpunkte der beiden Tetraëder zu je zwei auf vier geraden Linien liegen, welche Generatrices einer und derselben Erzeugungsart eines zweiten Hyperboloids sind.*

Note XXXIII.

(Fünfte Epoche, §. 50.)

Relationen zwischen sieben Punkten einer Curve doppelter Krümmung des dritten Grades. — Verschiedene Aufgaben, bei welchen diese Curven vorkommen.

1. *Durch sechs gegebene Punkte im Raume kann man eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade legen.*

In der That, wenn wir den ersten der sechs Punkte als den Scheitel eines Kegels vom zweiten Grade betrachten, welcher durch die fünf andern Punkte gehen soll, so wird dieser Kegel bestimmt sein, weil man fünf Seitenlinien desselben kennt. Ebenso wird man einen zweiten Kegel des zweiten Grades construiren können, der seinen Scheitel im zweiten der sechs Punkte hat und durch die fünf andern geht. Die beiden Kegel werden zu einer gemeinschaftlichen Seitenlinie die Gerade haben, welche die beiden ersten Punkte mit einander verbindet; sie werden sich also in einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade schneiden, welche mit dieser Geraden den vollständigen Durchschnitt vom vierten Grade der beiden Kegel bildet. Diese Curve wird aber durch die sechs vorgegebenen Punkte gehen, die diesen beiden Kegeln gemeinschaftlich sind: der ausgesprochene Satz ist also bewiesen.

2. Wir bemerken, dass jeder andre Kegel, ausser den beiden ersten, welcher seinen Scheitel in einem Punkte der Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade hat und welcher durch diese Curve geht, auch vom zweiten Grade sein wird. Denn jede durch seinen Scheitel gelegte Ebene wird die Curve nur in zwei andern Punkten schneiden und folglich den Kegel nur in zwei Seitenlinien, was beweist, dass er vom zweiten Grade ist.

Wir können mithin sagen:

Der geometrische Ort der Scheitel aller Kegel vom zweiten Grade, welche alle durch sechs gegebene Punkte im Raume gehen, ist die Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade, welche durch diese sechs Punkte bestimmt ist.

3. Betrachten wir einen siebenten Punkt, welcher willkührlich auf der Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade, die durch sechs gegebene Punkte geht, angenommen wird, so seien *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* diese sechs gegebenen und g der siebente Punkt. Diese sieben Punkte, in irgend einer Ordnung genommen, sind die Scheitel eines nichtebenen Siebenecks (*eptagone gauche*), in dem man jede der Seiten als dem Scheitel eines der Winkel respective gegenüberliegend betrachten kann. Wenn also die Reihenfolge der Scheitel dieselbe ist, als die der Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, welche sie darstellen, so wird die vierte Seite *de* dem ersten Scheitel *a* gegenüberliegen, die fünfte Seite *ef* dem zweiten Scheitel *b*, u. s. w. f.

Die Relationen, welche zwischen den sieben Punkten *a*, *b*, *c* etc. stattfinden müssen, damit sie einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade angehören, werden durch folgendes Theorem ausgedrückt:

Wenn die Scheitel a, b, c *etc. eines nichtebenen Siebenecks auf einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade liegen, so treffen die Ebene irgend eines Winkels* a *des Siebenecks und die Ebenen der beiden zunächst liegenden Winkel* b *und* g *respective die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in einer Ebene liegen, die durch den Scheitel des ersten Winkels* a *geht.*

4. Es ist hinreichend, wenn diese Eigenschaft eines Siebenecks, welches einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade eingeschrieben ist, für zwei Winkel verificirt wird; dann findet sie auch für die andern Winkel statt. Hieraus schliesst man:

Wenn ein nichtebenes Siebeneck so beschaffen ist, dass die Ebene eines Winkels und die Ebenen der beiden zunächst liegenden Winkel respective die drei gegenüberliegenden Seiten in drei solchen Punkten treffen, welche in einer Ebene liegen, die durch den Scheitel des ersten Winkels geht; und wenn dasselbe für einen der sechs andern Winkel stattfindet, so wird es auch ebenfalls für jeden der fünf andern Winkel stattfinden, und man kann alsdann durch die sieben Scheitelpunkte des Siebenecks eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade durchgehen lassen.

5. Nach diesem Theorem wird es leicht sein, nur mit Hülfe der geraden Linien, durch Punkte die Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade zu construiren, welche durch sechs gegebene Punkte gehen soll. Zu dem Endo wird man

den Punkt suchen, in welchem irgend eine Ebene, die durch zwei der gegebenen sechs Punkte gelegt ist, die Curve trifft.

Dasselbe Theorem führt auch zur Lösung vieler andern Aufgaben, z. B. zur Bestimmung der Tangenten und Berührungsebenen der Curve in jedem der sechs gegebenen Punkte, u. s. w.

Aber statt in diese Details über die Construction der Curven doppelter Krümmung vom dritten Grade einzugehen, wollen wir einige Aufgaben anführen, bei welchen diese Curven vorkommen. Denn bis jetzt sind sie kaum bei den geometrischen Speculationen bemerkt worden und die Beispiele, welche wir von der Rolle geben werden, die sie darin spielen können, werden vielleicht beweisen, dass es nützlich sein dürfte, sich auf das Studium dieser Curven zu legen und dass dieses nicht früh genug geschehen könne.

6. *Wenn die vier Seitenflächen eines beweglichen Tetraëders gezwungen sind, respective durch vier Gerade zu gehen, welche irgendwie im Raume liegen, und wenn drei Eckpunkte des Tetraëders auf drei andern Geraden liegen sollen, welche auch irgendwie im Raume liegen, so wird die vierte Ecke des Tetraëders eine Curve doppelter Krümmung vom vierten Grade durchlaufen.*

Dieses Theorem entspricht dem Satze der ebenen Geometrie von der Beschreibung der Kegelschnitte, der von Maclaurin und Braikenridge bewiesen ist und aus dem sich das Pascal'sche Theorem über das Sechseck ableitet.

7. *Wenn man im Raume drei willkührlich liegende Punkte und drei eben so beliebige Ebenen hat, so lasse man um eine feste Gerade eine Transversal-Ebene drehen, welche die drei gegebenen Ebenen in drei Geraden schneiden wird; durch diese drei Geraden lege man drei andre Ebenen, welche respective durch die drei gegebenen Punkte gehen: dann werden sich diese drei Ebenen in einem Punkt schneiden, dessen geometrischer Ort eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade ist.*

Dieses Theorem kann als demselben Satze aus der ebenen Geometrie entsprechend betrachtet werden, als das vorhergehende.

8. *Wenn drei Flächenwinkel, deren Kanten im Raume fest sind, sich um diese Kanten dergestalt drehen, dass die Durchschnittspunkte dreier Seitenflächen dieser drei Winkel immer auf einer gegebenen Geraden liegen, so erzeugt der Durchschnittspunkt der drei andern Seitenflächen eine Curve doppelter Krümmung vom dritten*

Grade, welche sich an die Kanten der drei beweglichen Winkel anlehnt.

Dieses Theorem enthält eine Analogie mit dem des Newton über die organische Beschreibung der Kegelschnitte durch den Durchschnittspunkt der Schenkel zweier beweglichen Winkel. Und eben so wie das Theorem des Newton nur ein besonderer Fall allgemeinerer Theoreme über die Beschreibung der Kegelschnitte ist, wie wir es in der Note XV gezeigt haben, so ist auch das hier angeführte Theorem nur ein besondrer Fall allgemeinerer Sätze über die Beschreibung der Curven doppelter Krümmung vom dritten Grade.

9. Ein solcher ist der folgende Satz:

Wenn drei Chorden einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade als die Kanten dreier Flächenwinkel angenommen werden, welche eine beliebige Grösse haben, aber beweglich sind um diese Kanten; und wenn der Durchschnittspunkt dreier Seitenflächen dieser drei Winkel die Curve doppelter Krümmung durchläuft: so wird der Durchschnittspunkt der drei andern Seitenflächen der drei Winkel eine zweite Curve doppelter Krümmung vom dritten Grad erzeugen, welche sich an die drei Chorden der ersten anlehnt.

10. Das folgende Theorem gehört auch noch zu derselben Theorie, als die vorhergehenden.

Wenn drei Punkte sich mit irgend welchen, aber gleichförmigen Geschwindigkeiten auf drei willkührlich im Raum gelegenen Geraden bewegen, und wenn man durch jeden dieser Punkte und durch eine feste Gerade, welche für jeden dieser drei Punkte eine andre ist, eine Ebene legt, so erzeugt der Durchschnittspunkt der drei auf diese Weise construirten Ebenen eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade, welche sich an die drei Geraden, durch welche die drei Ebenen gehen, anlehnt.

11. Die folgenden Theoreme gehören zu verschiedenen Theorien.

Wenn mehre Oberflächen des zweiten Grades durch acht gegebene Punkte gehen, so liegen ihre Mittelpunkte auf einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade.

Und, noch allgemeiner: *die Pole irgend einer Ebene, in Bezug auf diese Oberflächen genommen, liegen auf einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade.*

12. *Wenn ein Körper in Bewegung ist und wenn man für irgend einen Augenblick fragt, welche die*

Punkte des Körpers sind, deren Richtungen nach einem gegebenen Punkt hinstreben, d. h. für welche die Tangenten an ihre Trajectorien durch einen gegebenen Punkt gehen, so werden diese Punkte auf einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade liegen, und die Tangenten an ihre Trajectorien, welche durch diese Punkte gezogen sind, werden einen Kegel des zweiten Grades bilden.

13. Es sei ein System von Kräften, welches einen Körper sollicitirt; für jeden Punkt *m* des Raums denke man sich die Hauptebene dieses Systems von Kräften in Bezug auf diesen Punkt und die Normale auf dieser Ebene, welche durch diesen Punkt gezogen wird:

Dann werden diejenigen dieser Normalen, welche durch einen gegebenen Punkt im Raum gehen, einen Kegel des zweiten Grades bilden, und die Punkte m, *durch welche sie gezogen sind, werden auf einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade liegen.*

14. Die Tangenten der verschiedenen Punkte einer Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade bilden eine developpable Oberfläche des vierten Grades. Und umgekehrt *jede developpable Oberfläche des vierten Grades hat zu ihrer Rückkehrcurve (arête de rebroussement) eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade.*

Man kann also noch an diese Theorie die Fragen anknüpfen, bei denen developpable Oberflächen des vierten Grades vorkommen; so wie dergleichen folgende sind:

15. *Es seien sechs irgendwie im Raum liegende Ebenen gegeben, man verlangt einen Kegelschnitt zu construiren, welcher diese sechs Ebenen berührt; dann werden unendlich viele Kegelschnitte dieser Forderung genügen und die Ebenen aller dieser werden eine Oberfläche des vierten Grades einhüllen.*

16. *Wenn die vier Eckpunkte eines variabeln Tetraëders vier feste Gerade durchlaufen, die irgendwie im Raume liegen, und wenn drei Seitenflächen des Tetraëders respective durch drei andre gegebene Gerade gehen, so wird die vierte Seitenfläche auf einer developpabeln Oberfläche des vierten Grades hingleiten.*

17. *Wenn drei Punkte und drei Ebenen im Raum gegeben sind, und wenn der Scheitel eines dreikantigen Winkels, dessen drei Kanten sich um die drei Punkte drehen, eine gerade Linie durchläuft, so werden die Punkte, in welchen die drei Kanten die drei gegebenen*

Ebenen treffen, in einer Ebene liegen, die auf einer Developpabeln des vierten Grades hingleitet.

18. *Wenn drei Punkte sich respective auf drei Geraden mit irgend welchen, aber constanten Geschwindigkeiten bewegen, so wird die durch diese drei Punkte bestimmte Ebene auf einer developpabeln Oberfläche des vierten Grades hingleiten.*

19. *Wenn mehre Oberflächen des zweiten Grades dieselben acht Ebenen berühren, und wenn man einen Punkt im Raum als den Scheitel eben so vieler den Oberflächen umgeschriebenen Kegel betrachtet, so hüllen die Ebenen der Berührungscurven eine Developpable des vierten Grades ein.*

20. *Einer Oberfläche des zweiten Grades können unendlich viele Kegel umgeschrieben werden: wenn man verlangt, dass eine der Hauptaxen jedes Kegels durch einen gegebenen Punkt gehe, so bilden alle diese Hauptaxen einen Kegel des zweiten Grades, und die Ebenen, welche durch die Scheitel der Kegel, respective senkrecht auf diese Axen, gelegt werden, hüllen eine Developpable des vierten Grades ein.*

21. Wenn ein fester Körper gegeben ist, so kann man durch jeden Punkt im Raum drei Gerade ziehen, welche drei permanente Drehungsaxen des Körpers in Bezug auf diesen Punkt sein werden, und unendlich viele andre Geraden, welche permanente Drehungsaxen des Körpers in Bezug auf andre Punkte, die auf diesen Geraden genommen sind, sein werden:

1) *dann bilden alle diese Geraden einen Kegel des zweiten Grades*;

2) *die Ebenen, die senkrecht auf diese Geraden durch die Punkte gelegt werden, für welche dieselben permanente Drehungsaxen des Körpers sind, hüllen eine Developpable des vierten Grades ein.*

22. Wenn ein fester Körper in Bewegung ist, so gleitet jede Ebene, die in dem Körper angenommen wird, während der Bewegung auf einer developpabeln Oberfläche, welche sie successive in verschiedenen auf einander folgenden Kanten (*arêtes*) dieser Oberfläche berührt; diese Oberfläche wollen wir die *developpable Trajectorie* der Ebene nennen. In irgend einem Augenblick der Bewegung werden alle Ebenen, die man in dem Körper gelegt hat, ihre developpabeln Trajectorien jede in einer Geraden schneiden.

Wenn man diejenigen dieser Geraden verlangt, welche in diesem Augenblick der Bewegung in einer gegebenen Ebene liegen, so werden alle diese Geraden eine Parabel einhüllen, und alle Ebenen, welche ihre developpabeln Trajectorien in diesen Geraden berühren, werden eine Developpable des vierten Grades einhüllen.

23. *Wenn ein Körper in Bewegung ist, so bilden die Tangenten für die Trajectorien der Punkte einer Geraden ein hyperbolisches Paraboloid; und diese Tangenten bewegen sich während dieses Augenblicks in Ebenen, welche eine Developpable des vierten Grades bilden.*

u. s. w. u. s. w.

Note XXXIV.

(Sechstes Kapitel, §. 10.)

Ueber die Dualität in der Mathematik. — Beispiele aus der Drechslerkunst und aus den Principien der Dynamik.

Unter den Transformationsarten, auf welchen die fruchtbarsten Doctrinen der neuern Geometrie beruhen, muss man wesentlich die auszeichnen, welche zur Erkenntniss des mathematischen Gesetzes der *Dualität* Gelegenheit giebt. Ausser dem Vortheil, welchen diese Methode als Mittel der Entdeckung gewährt, stellt das Princip, auf dem sie beruht, eine constante Relation auf, welche alle geometrische Wahrheiten zu je zwei mit einander verbindet; wodurch, um mich so auszudrücken, zwei Arten von Geometrie entstehen. Diese beiden Geometrien unterscheiden sich durch einen Umstand, der sehr wichtig zu bemerken ist: in der ersten ist der Punkt die Einheit und so zu sagen das Element oder die Monade, deren man sich zur Bildung der andern Theile der Ausdehnung bedient; dieses ist die Grundlage für die Philosophie der alten und der analytischen Geometrie. In der zweiten Geometrie betrachtet man die gerade Linie oder die Ebene, je nachdem man in der Ebene oder im Raum operirt, als das Primitive oder die Einheit, welche zur Bildung der andern Theile der Ausdehnung dienlich sind.

Diese Theilung aller Eigenschaften der Ausdehnung in zwei gesonderte Klassen, welche auf den beiden wesentlich von einander geschiedenen Grundideen beruht, scheint uns, wie es Gergonne und Poncelet klar gezeigt haben [84]), von dem grössten Einfluss auf die Geometrie zu sein. Aber wir dehnen diesen Einfluss auf mehre andre Theile der mathematischen Wissenschaften aus, wo es uns scheint, dass man, unterstützt durch dieses schöne Gesetz der Ausdehnung, die Dualität, und geleitet durch diesen Dualismus, den man als das Element und den Ausgangspunkt in der Geometrie annehmen kann, zur Aufsuchung einer ähnlichen Sache geführt werden muss.

Wir finden ein Beispiel einer solchen Dualität in einem Werke, welches wir über eine neue Lehre der *analytischen Geometrie* gegeben haben, welche analog der des Descartes ist und in der die Ebene dieselbe Rolle spielt, als der Punkt in dieser. [85])

Die Anwendung derselben Ideen der Dualität lässt sich auch auf die Mechanik ausdehnen. In der That ist das primitive Element der Körper, auf welche man zunächst die ersten Principien dieser Wissenschaft anwendet, so wie in der alten Geometrie, der mathematische Punkt. Sind wir nicht berechtigt zu glauben, dass man jetzt, indem man die Ebene und nicht mehr den Punkt als Element der Ausdehnung nimmt, zu neuen Doctrinen geführt werden wird, welche so zu sagen eine neue Wissenschaft ausmachen? Und wenn es ein einziges Princip giebt, um von dieser Wissenschaft zu der alten überzugehen, wie in der Geometrie das Theorem, welches die Correlation der Eigenschaften der begränzten Ausdehnung darstellt, so wird dieses die Grundlage zu einer ähnlichen Dualität in der Wissenschaft von der Bewegung der Körper sein.

§. 2. Die beiden genannten Beispiele der Dualität sind auf den Dualismus gegründet, welchen in der Zusammensetzung der Körper der Punkt und die Ebene darbieten. Man wird aber in verschiedenen Theilen der Mathematik andre Gesetze der Dualität, auf andre Principien gegründet, vorfinden, und ich glaube, man wird zu der Ansicht geführt werden, wie wir schon in unsrer Note über die Definition

---

84) *Annales des mathématiques*, T. XVI, p. 209 und T. XVII p. 265.

85) Wir haben die Principien dieses neuen Coordinatensystems kurz auseinandergesetzt in der *Correspondance mathématique* von Quetelet, T. VI, p. 81.

der Geometrie (Note V) gesagt haben, dass ein *allgemeiner Dualismus* das grosse Gesetz der Natur ist und in allen Theilen der Kenntnisse des menschlichen Geistes herrscht.

Indem wir uns hier auf die Geometrie beschränken, wollen wir zwei sehr verschiedene Beispiele der Dualität anführen, welche die ausgesprochenen Ideen unterstützen werden.

§. 3. Das erste bietet sich in der Kunst dar, welche durch den Mechanismus der Drehbank construirt.

Für jeden Gegenstand, mit dem sich der Drechsler beschäftigt, giebt es eine doppelte Art ihn zu construiren, entweder befestigt man das Material und lässt das Handwerkszeug sich drehen, oder, wie es der Drechsler thut, man befestigt das Werkzeug und lässt das Material sich drehen.

Man sieht also in den Künsten eine klar ausgesprochene und constante Dualität der Beschreibung. Man weiss aber, dass jede dieser Constructionen unter allen Umständen auf geometrischen Principien beruht; es wird also auch in den beiden Theorien, die sich auf diese beiden Constructionsarten beziehen, eine constante Dualität stattfinden.

Es ist, wie es uns scheint, eine interessante Aufgabe, die mathematischen Gesetze zu suchen, welche diese beiden Theorien unter einander verbinden können, so dass die von der einen angegebenen Verfahrungsarten dazu dienen, vermöge dieser Gesetze allein die entsprechenden Verfahrungsarten der andern erkennen zu lassen.

Diese Aufgabe, bei welcher wir zuerst bedeutende Schwierigkeiten fürchteten, hat uns zu einem höchst einfachen Gesetz der Dualität geführt, welches besonders eine Theorie der Drehbank für den Drechsler liefert und ein Mittel angiebt, mit diesem Instrument alle Curven zu beschreiben, welche man sonst gewöhnlich mit einem beweglichen Stift beschreibt. Das Princip, auf dem diese Beschreibungsart beruhen wird, ist folgendes:

Wenn eine ebene Figur in ihrer Ebene in Bewegung ist, so beschreibt einer ihrer Punkte eine Curve. Die Bewegung dieser Figur ist durch constante Relationen bestimmt, welche zwischen ihr und festen Punkten oder Linien in ihrer Ebene stattfinden sollen. Diese Punkte und Linien bilden durch ihr Nebeneinandersein eine zweite Figur, welche während der Bewegung der ersten fest bleibt;

Nun betrachte man die erste Figur in einer ihrer Lagen und nehme sie als fest an; darauf lasse man die zweite Figur sich so bewegen, dass sie sich immer unter

denselben Bedingungen der Lage in Bezug auf die erste Figur befindet;

Dann wird ein fester Stift, der in dem beschreibenden Punkt der ersten Figur angebracht ist, auf der beweglichen Ebene der zweiten Figur eine mit dieser Ebene bewegliche Curve beschreiben, welche identisch dieselbe (mit Ausnahme der Lage) sein wird, als die, welche der beschreibende Punkt der ersten erzeugt hätte, wenn diese in Bewegung gewesen wäre.

Dieses ist das einzige Princip, welches die beiden Beschreibungsarten der ebenen Curven, vermittelst eines beweglichen und vermittelst eines festen Stifts, mit einander verbindet.

Um eine Anwendung hiervon zu machen, wählen wir die Beschreibung einer Ellipse vermittelst eines Punkts, der im Scheitel eines Dreiecks von constanter Gestalt liegt, dessen beide andre Scheitel sich auf zwei festen Geraden bewegen.

Die bewegliche Figur ist hier das Dreieck und die beiden Geraden bilden die feste Figur. Man muss also, nach unserm Princip, die beiden Geraden sich so bewegen lassen, dass sie beständig durch die beiden Scheitel des Dreiecks gehen, welche auf diesen Geraden hingleiten. Hieraus schliesst man auf folgendes Theorem;

Wenn die Schenkel eines Winkels von unveränderlicher Grösse durch zwei feste Punkte gleiten, so wird ein fester Stift, der sich in irgend einem Punkte befindet, in der beweglichen Ebene des bewegten Winkels eine Ellipse beschreiben.

Man sieht in der That, dass der Mechanismus der Drehbank für die Ovale den Zweck hat, einer ebenen Fläche die Bewegung eines Winkels zu geben, dessen beide Schenkel durch zwei feste Punkte gleiten. Dieses ist also der geometrische Grund dieses Mechanismus, welches die Erfindung des berühmten Malers Leonardo da Vinci ist.

Unser Princip erklärt mit eben solcher Leichtigkeit den Mechanismus der Drehbank für die Epicycloide. Denn es liefert folgendes Theorem, auf welchem uns dieser Mechanismus zu beruhen scheint.

Wenn eine Curve in einer Ebene auf einer andern Curve rollt, so beschreibt einer seiner Punkte eine Epicycloide, welche man auf eine andre Art erzeugen kann, indem man die erste Curve auf der zweiten rollen lässt und indem man einen festen Stift in dem beschreibenden Punkt der ersten Curve anbringt, welcher in der beweglichen Ebene eine Curve beschreiben wird, die genau dieselbe Epicycloide sein wird.

Die Ellipse und die Epicycloide sind, wie ich glaube, die einzigen Curven, welche man auf der Drehbank durch einen für jede eigenthümlichen Mechanismus beschreibt. Man wird vermittelst der neuen Beschreibungsart der Curven unendlich viele andre Curven auf ähnliche Art beschreiben können.

Für die Conchoide des Nicomedes z. B. ist man zu dieser Beschreibung geführt:

Man denke sich einen Winkel von unveränderlicher Grösse, dessen einer Schenkel beständig durch einen festen Punkt geht, während der Endpunkt des andern Schenkels auf einer geraden Linie läuft, welche durch diesen festen Punkt gezogen ist; dann wird ein fester Stift, welcher in einem Punkt dieser geraden Linie angebracht ist, auf der Ebene des beweglichen Winkels eine Curve beschreiben, welche eine Conchoide des Nicomedes sein wird.

Wenn die gerade Linie, auf welcher der Endpunkt des einen Schenkels hingleitet, nicht durch den festen Punkt gezogen ist, durch den der andre Schenkel des Winkels geht, so wird, wenn der feste Stift passend angebracht ist, die Cissoide des Diocles beschrieben werden; eine andre Stellung des Stifts würde die *focale à noeud* des Quetelet geben und im Allgemeinen wird bei dieser Bewegung ein fester Stift eine von den Curven geben, *welche die Orte der Fusspunkte der Perpendikel sind, die man von einem Punkte aus auf die Tangenten einer Parabel fällt.*

Wir haben unser Princip zur Construction vieler andern Curven angewandt, selbst indem wir sie als die Enveloppe ihrer Tangenten und nicht mehr als eine Aufeinanderfolge unendlich vieler Punkte betrachteten. Dann ist es nicht mehr ein Stift, welcher seinen Weg auf einer beweglichen Ebene verzeichnet, sondern ein schneidendes Werkzeug, welches die Oberfläche der beweglichen Ebene wegschneidet und die Curve, die man beschreiben will, erhaben zurücklässt.

Dieselben Theorien lassen sich auf Figuren dreier Dimensionen anwenden.

Man sieht auf diese Weise eine *Dualität* der Doctrinen, bezüglich auf die doppelte mechanische Erzeugung der Körper, welche, so wie die der Eigenschaften der Ausdehnung, auf einem einzigen Theorem beruht.

§. 4. Wir entnehmen unser zweites Beispiel der Dualität aus dem Weltsystem und aus den Gesetzen der Mechanik.

Alle Himmelskörper haben zwei Bewegungen, eine der Translation und eine der Rotation um eine Axe. Diese dop-

pelte Bewegung findet sich in der elementaren Bewegung eines festen Körpers wieder, d. h. in jeder unendlich kleinen Bewegung dieses Körpers.

Dieses Nebeneinanderbestehen der beiden Bewegungen ist eine Sache, die nichts Wunderbares enthält, wenigstens gegenwärtig, wo die mathematischen Theorien die Erklärung davon geben und dasselbe entdeckt haben würden, wenn die Kenntniss davon nicht schon das Resultat der astronomischen Beobachtungen gewesen wäre.

Wenn aber auch die Rotationsbewegung für die Augen des Beobachters eine Eigenschaft der Himmelskörper ist, eben so klar, als die Bewegung der Translation und auch Allem innewohnend, was der Wirkung der Kräfte des Universums unterworfen ist, so haben doch die Geometer diese beiden Arten von Bewegung nicht mit gleicher Unparteilichkeit behandelt. Sie haben es so angesehen, als wäre die Bewegung der Translation die naturgemässe und elementare Bewegung der Körper. In dem Sinne dieser Grundidee, welche sich vom dem Ursprung der Wissenschaft datirt[86]), sagt D'Alembert in den Vorbemerkungen zu seinem *Traité de Dynamique*: „Alles, was wir ganz deutlich bei der Bewegung eines Körpers sehen, ist das, dass er einen gewissen Raum durchläuft und dass eine gewisse Zeit zu diesem Durchlaufen gebraucht. Diese ist also auch die einzige Idee, aus der man alle Principien der Mechanik herleiten muss" u. s. w. Von dieser Art des Philosophirens kann es scheinen, dass sie eine Folge der Gewohnheit gewesen ist, beständig den *Punkt* als Element der Ausdehnung zu betrachten und nicht die *Ebene*, welche man im Gegentheil immer als eine Vereinigung von *Punkten* ansah. Die Substitution der *Kräfte* für die *Be-*

86) Obgleich die alten Philosophen die drehende Bewegung um sich selbst gekannt und sie als zur Natur der Körper gehörig betrachtet haben, so sahen sie nichts desto weniger die Bewegung der Translation als die ursprüngliche und früher existirende an. Man sieht dies bei Plato, welcher sagt, dass Gott den Gestirnen die Bewegung mitgetheilt habe, welche ihnen die eigenthümlichste ist, d. h. die geradlinige, welche sie nach dem Mittelpunkt des Universums treibt und dass er hernach durch eine einzige Wendung die Bewegung jedes Körpers in eine rotirende Bewegung um sich selbst und in eine Kreisbewegung im Raum umgewandelt habe. *Motum enim dedit coelo, eum qui corpori sit aptissimus (i. e. directum)* .... *Itaque una conversione atque eadem, ipse circum se torquetur et vertitur.* (Man hat diese Stelle des Plato verschieden interpretirt; wir haben hier aber den Sinn angenommen, welchen ihr der grosse Philosoph Galiläi gegeben hat, in seinen *Discorsi e dimostrationi matematiche*, p. 254.)

wegungen, welche Varignon in die rationelle Mechanik eingeführt hat und welche in andern Beziehungen so glücklich zu nennen, scheint uns wesentlich dazu beigetragen zu haben, die Lehren der gegenwärtigen Mechanik zu begründen, die auf der ursprünglichen Idee des *Punktes*, als Element der Ausdehnung betrachtet, beruht.

Kann man aber nicht jetzt annehmen, dass die beiden unzertrennlichen Bewegungen der Körper des Universums zu mathematischen Theorien Gelegenheit geben mussten, in denen diese beiden Bewegungen identisch dieselbe Rolle spielen? Und dann könnte das Princip, welches diese beiden Theorien vereinigte und zum Uebergang von der einen zur andern dienen würde, so wie das Theorem, auf das wir die geometrische *Dualität* der Ausdehnung in der Ruhe gegründet haben und das uns gedient hat, die beiden mechanischen Beschreibungsarten der Körper mit einander zu verbinden, dann, sag' ich, könnte dieses Princip ein bedeutendes Licht auf die Principien der Naturphilosophie werfen.

Kann man selbst vorhersehen, wo die Folgen eines solchen Princips der *Dualität* aufhören würden? Nachdem zu je zwei alle Phänomene der Natur und die mathematischen Gesetze, welche sie beherrschen, verbunden wären, würde dieses Princip nicht selbst bis zu den Ursachen dieser Phänomene zurückgehen? Und könnte man alsdann sagen, dass dem Gesetze der Gravitation nicht ein andres Gesetz entspräche, welches dieselbe Rolle als das des Newton spielt und wie dieses zur Erklärung der Phänomene des Himmels dient? Und wenn im Gegentheil dieses Gesetz der Gravitation selbst das correlative desselben in der einen oder andern Doctrin wäre, so wie es ein Satz der Geometrie in der Dualität der begrenzten Ausdehnung sein kann, so wäre es dann ein grosser Beweis, dass es in Wahrheit das höchste und einzige Gesetz des Universums ist.

Eilen wir diese Ideen zu rechtfertigen (gegen welche wir uns keineswegs die Einwürfe verhehlen, welche von der Centrifugalkraft hergenommen werden, die in der Praxis einen radicalen Unterschied zwischen der Translation und der Rotation der Körper bildet, von der wir aber abstrahiren, weil wir nur von unendlich kleinen Bewegungen sprechen), eilen wir, sag' ich, diese Ideen durch einige Betrachtungen über das zu rechtfertigen, was uns schon geschehen zu sein scheint und fortgesetzt werden kann in dem Sinne dieser Correlation, von der wir annehmen, dass sie zwischen den Theorien, bezüglich auf die Bewegung der Translation, und denen, bezüglich auf die Bewegung der Rotation, stattfinden müsse.

§. 4. Euler hat zuerst gezeigt, dass, wenn ein Körper durch einen festen Punkt zurückgehalten wird, so ist jede unendlich kleine Bewegung des Körpers nichts andres, als eine Rotationsbewegung um eine gewisse Gerade, die durch den festen Punkt geht.

Lagrange hat uns in der ersten Ausgabe seiner *Mecanique analytique* (1788) die Formeln gegeben, welche dazu dienen, diese Rotationsbewegung in drei andre um drei durch den festen Punkt gehende rechtwinklige Axen zu zerlegen. Diese Formeln haben eine merkwürdige Aehnlichkeit mit denen, welche zur Zerlegung der geradlinigen Bewegung eines Punkts in drei andre geradlinige Bewegungen dienen.

Später hat Lagrange diese Analogie weiter geführt, indem er in der zweiten Ausgabe seiner *Mécanique analytique* (1811) die geometrische Construction der drei Rotationen gab, welche eine einzige Rotation ersetzen können. Diese Construction führt sich darauf zurück, auf den Rotationsaxen Linien aufzutragen, welche den Bewegungen der Rotation proportional sind und diese Linien zusammenzusetzen und zu zerlegen, als wenn sie geradlinige Bewegungen darstellten.

Sobald man wusste, dass jede Bewegung eines Körpers, der durch einen festen Punkt zurückgehalten wird, eine Rotationsbewegung um eine Gerade sei, so erkannte man auch, dass die Bewegung eines vollkommen freien Körpers sich in jedem Augenblick in zwei andre zerlegen lasse, von denen die eine die translative ist, welche allen seinen Punkten gemeinschaftlich ist, und die andre die rotirende um eine Axe, die durch den einen seiner Punkte gezogen ist. Was darauf zurückkommt, zu sagen: wenn ein vollkommen freier Körper eine unendlich kleine Bewegung erhält, so kann man durch jeden seiner Punkte eine Gerade ziehen, welche während der Bewegung parallel mit sich selbst bleibt.

Es ist leicht zu erkennen, dass alle diese Geraden unter einander parallel sein werden und das *die eine von ihnen sich in ihrer eigenen Richtung bewegen wird*, woraus hervorgeht, dass die Bewegung des Körpers identisch dieselbe sein wird, als die einer Schraube in ihrer Schraubenmutter. [87])

---

87) Ich habe dieses Theorem schon, nebst mehren andern, die sich auf die Ortsveränderung eines freien Körpers im Raum beziehen, ausgesprochen. S. das *Bulleten universel des sciences*, T. XIV, p. 321, J. 1830, und *Correspondance* von Quetelet, T. VII, p. 352.

Dieses ist das, wie ich glaube, was man in Bezug auf die Theorie der Rotationsbewegungen gethan hat. Dabei wird es vielleicht wunderbar erscheinen, dass, nachdem man bei der Bewegung eines freien festen Körpers die Drehung um eine durch irgend einen seiner Punkte gezogene Linie zu betrachten gehabt hatte, dass man nicht darauf geführt ist, anzunehmen, dass ein Körper mehren Rotationen um verschiedene Axen unterworfen ist, wie in dem Fall, wo er durch einen festen Punkt zurückgehalten wird, um diese verschiedenen Rotationen unter einander zusammenzusetzen.

Diese Aufgabe wird durchaus nothwendig um die ersten Schritte in den von uns aufgefassten neuen Theorien zu thun. Sie hat uns dazu geführt, zu erkennen: *wenn ein Körper mehren Rotationsbewegungen um verschiedene Axen, die irgendwie im Raume liegen, unterworfen ist, so kann man auf unendlich viele Arten dieses System von Rotationen durch zwei einzige Rotationen um zwei verschiedene Axen ersetzen.*

Die eine dieser Axen kann in der Unendlichkeit liegen, woraus man sieht, dass die wirkliche Bewegung des Körpers eine Rotation um die andre Axe ist, während diese sich in ihrer eigenen Richtung bewegt. Ein Resultat, das mit dem übereinstimmt, welches wir oben durch die Betrachtung der geradlinigen Bewegungen der Punkte eines Körpers erhalten haben.

Die Zusammensetzung eines Systems von Rotationen um mehre beliebige Axen ist sehr einfach und bewahrt die Analogie, welche Lagrange zwischen der Zusammensetzung der Rotationen um verschiedene Axen, die durch einen festen Punkt gehen, und der Zusammensetzung der geradlinigen Bewegungen eines Punktes gegeben hat.

Man wird auf jeder Rotationsaxe eine Linie, proportional der rotirenden Bewegung um diese Axe, auftragen und alle diese Linien als ein System von Kräften betrachten, wodurch ein fester Körper sollicitirt wird. Man wird alle diese Kräfte in zwei einzige Kräfte zusammensetzen und ihre Richtungen als die Axen zweier Rotationen betrachten, welche das vorgegebene System von Rotationen ersetzen können. Die Bewegungen der Rotation werden ihrer Grösse nach durch die beiden Kräfte dargestellt.

Jetzt wollen wir annehmen, dass die Rotationen eines Körpers um verschiedene Axen Ebenen angehören, die durch diese Axen gelegt sind, so wie man die einem Körper mitgetheilten geradlinigen Bewegungen oder die Kräfte, welche einen Körper sollicitiren, als in einem derjenigen Punkte eines

Körpers angebracht betrachtet, welche sich auf den Richtungen dieser Bewegungen oder dieser Kräfte befinden.

Jede dieser Ebenen wird während der wirklichen Bewegung des Körpers sich in sich selbst um eine Gerade drehen, die in dieser Ebene liegt (diese Gerade wird während der Bewegung des Körpers nicht aus der primitiven Lage der Ebene herausgehen, in der sie sich um einen festen Punkt dreht). Wir wollen diese Rotations-Bewegung der Ebene in sich selbst ihre *wirkliche Rotation* (*rotation effective*) und die partielle Rotation des Körpers um die Axe, welche in dieser Ebene liegt, die der Ebene *mitgetheilte Rotation* (*rotation imprimée*) nennen. So wird also die *wirkliche* Rotation einer Ebene das Resultat der Combination ihrer *mitgetheilten* Rotation und der andern Rotationen sein, welche den übrigen Ebenen des Körpers mitgetheilt sind.

Unter Annahme dieser Benennungen kommt man zu folgendem Theorem:

Wenn ein Körper mehren gleichzeitigen Rotationen um verschiedene Axen unterworfen ist, und wenn man durch diese Axen Ebenen im Körper gelegt denkt, so werden diese Ebenen wirkliche Bewegungen in sich selbst erfahren;

Wenn man das Produkt der wirklichen Rotation jeder Ebene durch ihre mitgetheilte Rotation und durch den Cosinus des Winkels bildet, den die Axen dieser beiden Rotationen mit einander machen, so wird die Summe dieser Produkte eine constante Quantität sein, welche auch die Ebenen sein mögen, die durch diese Rotationsaxen gelegt wurden;

Diese Quantität wird gleich sein der Summe der Quadrate der mitgetheilten Rotationen, dazu addirt die doppelte Summe der Produkte aus je zwei dieser Rotationen, multiplicirt in den Cosinus dieses Winkels, den ihre Axen mit einander bilden.

Wenn ein Körper, der mehren Rotationen unterworfen ist, sich im Gleichgewicht befindet, und man lässt ihn eine unendlich kleine Störung erleiden, so erleiden die durch die Rotationsaxen gelegten Ebenen *wirkliche* Rotationen in sich selbst: wir wollen diese Rotationen die *virtuellen* Rotationen der Ebenen nennen.

Die Bedingung des Gleichgewichts des Körpers wird sich durch eine Gleichung ausdrücken lassen, welche uns ein *Princip der virtuellen Rotationen* liefert, das dem Princip der *virtuellen Geschwindigkeiten* analog ist. Folgendes ist dieses Princip:

Wenn verschiedene Ebenen eines festen Körpers Rotationen um verschiedene, in diesen Ebenen enthaltene Axen unterworfen sind, und wenn diese Rotationen sich das Gleichgewicht halten sollen, so ist es nöthig, dass, wenn man dem Körper eine unendlich kleine Bewegung mittheilt, und wenn man für jede Ebene das Produkt aus seiner mitgetheilten Rotation in seine wirkliche Rotation und in den Cosinus des Winkels, den die Axen dieser beiden Rotationen mit einander machen, bildet, so ist es nöthig, sag' ich, und hinreichend, dass die Summe aller dieser Produkte gleich Null ist.

Das Bisherige wird hinreichen, um es deutlich zu machen, inwiefern wir meinten, dass es möglich wäre, neue Doctrinen in der rationellen Mechanik zu erschaffen, indem man in den gegenwärtigen Theorien, in sofern es die allgemeine Bewegung eines Körpers betrifft, Rotations-Bewegungen für die geradlinigen Bewegungen und in Bezug auf die Körper selbst, als Theile der Ausdehnung betrachtet, *Ebenen* für die *Punkte* substituirt, wie man es in der reinen und in der analytischen Geometrie thun kann. 88)

§. 6. Ohne zu untersuchen, ob diese neuen Lehren einige Vortheile in ihrer Anwendung auf Fragen der praktischen und der physischen Astronomie darbieten können, was man vielleicht *a priori* bestreiten könnte, weil es wahrscheinlich erscheint, dass die gebräuchlichen analytischen Methoden, die sich auf die Coordinatentheorie von Descartes gründen, besser zu den vorhandenen Theorien, als zu den neuen passen, so glauben wir doch wenigstens, dass ihre Einführung in die rationelle Mechanik geeignet sei, ein neues Licht auf deren weites Gebiet im Ganzen zu werfen, so wie auch auf mehre besondre Untersuchungen, welche uns noch nicht vollständig durchgeführt zu sein scheinen. Wir führen als Beispiel die wunderbare Analogie an, welche zwischen den Kräften und ihren Momenten in Bezug auf einen festen Punkt stattfindet; eine Analogie, die sich sehr einleuchtend durch die sinnreiche Theorie der Koppeln in der Statik erklärt. Diese Uebereinstimmung findet sich in der Dynamik

---

88) Diese Theorie der *Rotations-Bewegungen* wird nothwendig einen Theil desjenigen Zweiges der Mechanik ausmachen müssen, welchen Ampère in seiner Classification der menschlichen Kenntnisse unter dem Namen *Cinématique* (Wissenschaft der Bewegung) begreift, welche der Statik vorhergehen und mit ihr den vollständigen Gegenstand der Elementar-Mechanik ausmachen soll (S. *Essai sur la Philosophie des sciences* von Ampère, in 8., 1834.)

zwischen den geradlinigen Bewegungen und ihren Momenten in Bezug auf einen Punkt wieder; man erkennt sie in den beiden Principien von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts und der Winkelflächen; Binet hat sie auch an dem Princip der lebendigen Kräfte bewiesen. Sie dehnt sich gewiss noch weiter aus, und ihre bis jetzt noch unbekannte erste Ursache ist eine Frage vom höchsten Interesse.

Die eben erwähnte Theorie der Koppeln scheint uns eine Lehre zu sein, die vollkommen mit den von uns entwickelten Ideen der Correlation übereinstimmt. Es ist die Statik, so zu sagen, auf unparteiische Weise behandelt in Bezug auf die doppelten Lehren der Dynamik, welche wir angedeutet haben. In der That spielen die Koppeln durchaus dieselbe Rolle, als die einfachen Kräfte; diese scheinen für die Bewegung der Translation bestimmt zu sein und die Koppeln für die Rotations-Bewegung; die einen und die andern sind denselben mathematischen Gesetzen der Zusammensetzung und der Zerlegung unterworfen. Wir können also diese elegante Theorie der Koppeln als eine äusserst glückliche Erfindung betrachten, die unumgänglich nothwendig sein dürfte, als Einleitung zu einer vollständigen Theorie der doppelten Dynamik, von der wir sprachen.

§. 7. Nachdem ich darauf geführt worden war, die Rotations-Bewegungen eben so wie geradlinige Bewegungen zu betrachten, und, so wie ich's gethan habe, diese Frage an die *Dualität* der in Ruhe befindlichen begrenzten Ausdehnung anzuknüpfen, las ich die ausgezeichneten Betrachtungen, welche mein alter Genosse der polytechnischen Schule, Aug. Comte, über die Theorie der Koppeln des Poinsot angestellt hat, in den vier Vorlesungen seines *Cours de philosophie positive*, worin er von der Mechanik handelt. Ich war ausserordentlich erfreut, meine Ideen über diesen Gegenstand durch die Art bestärkt zu sehen, auf welche dieser tiefe Denker die allgemeine Frage von der Bewegung der Körper auffasst und den Nutzen der Theorie der Koppeln bei Untersuchungen, die sich darauf beziehen.

Ich will diese Note mit den eigenen Worten von Aug. Comte beschliessen, welche die Aufmerksamkeit der Geometer auf die neuen Lehren, welche man in die Dynamik einführen kann, lenken werden.

„Welches auch in der Wirklichkeit die fundamentalen Eigenschaften der Auffassung des Poinsot in Bezug auf die Statik sein mögen, so muss man nichts desto weniger, wie es mir scheint, anerkennen, dass sie durch ihre Natur wesentlich zur Vervollkommnung besonders der Dynamik be-

stimmt ist, und ich glaube in dieser Hinsicht mit Bestimmtheit aussprechen zu können, dass diese Erfindung ihren hauptsächlichsten Einfluss noch nicht ausgeübt hat. Man muss sie in der That als direct geeignet ansehen, unter einem sehr wichtigen Gesichtspunkt selbst die Elemente der allgemeinen Dynamik zu vervollkommnen, *indem sie den Begriff der Rotations-Bewegung eben so natürlich, eben so geläufig und beinahe ebenso einfach macht, als den der translativen Bewegung; denn die Koppel kann als das natürliche Element der rotirenden Bewegung angesehen werden, so wie die Kraft es für die Bewegung der Translation ist.*

Nachdem diese Note schon geschrieben war, erschien das Werk von Poinsot über eine *neue Theorie der Rotation der Körper.* Diese Schrift realisirt die Ideen, welche wir von der Möglichkeit und Nützlichkeit hatten, in die Dynamik die directe Betrachtung der Rotations-Bewegungen gleich der der Bewegungen der Translation einzuführen. Durch diese mit wunderbarem Scharfsinn dargestellte Methode findet sich vermöge eines einfachen Raisonnements eine zusammengesetzte und schwierige Aufgabe aufgelöst, die bisher der höchsten Analysis angehörte, und es finden sich darin schöne Theoreme bewiesen, welche dieser Analysis entgangen waren und welche ein klares Bild von allen Umständen bei der Rotation eines Körpers liefern.

Note XII.

(Zweite Epoche, §. 2.)

Ueber die Geometrie der Inder, der Araber, der Lateiner und der Abendländer im Mittelalter.

Die Grenzen, in welche wir uns haben einschliessen müssen, erlaubten uns nur von den hauptsächlichsten Entdeckungen in der Geometrie zu sprechen, besonders von denen, welche zu irgend einer Theorie oder einer Methode Gelegenheit gegeben hatten, die sich auf die moderne Geometrie bezieht. Deshalb haben wir den Anfang unsrer zweiten Epoche auf die Arbeiten des Vieta gesetzt. Aber schon seit

mehr als einem Jahrhundert war die Geometrie eifrig cultivirt worden, und wenn sie auch nicht durch Methoden von besondrer Wichtigkeit bereichert ist, wie die Analysis, welche in diesem Jahrhundert ihre Entdeckungen bis zur Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grad brachte, so haben doch die Arbeiten der Schriftsteller, die sich mit ihr beschäftigten, nichts desto weniger die grossen Arbeiten der Geometer des 17ten Jahrhunderts vorbereitet, hauptsächlich durch die Einführung eines neuen Elements in diese Wissenschaft, welches der Keim zu ihren ferneren Fortschritten war. Dieses Element war der *algebraische Calcul*, welcher den Griechen nicht bekannt war, oder den sie verwarfen, in Folge ihrer scharfen Unterscheidung zwischen Arithmetik und Geometrie. So beweisen sie z. B. an Figuren und durch rein geometrische Betrachtungen die zwölf ersten Sätze des zweiten Buchs im Euclid, welche im Grunde nur Rechnungsregeln sind. Dieses Element aber bildet den speciellen Charakter der Geometrie des Vieta, Fermat und Descartes; wir müssen daher, um bis zur Quelle einer so grossen und so nützlichen Neuerung zurückzugehen und um sie in ihrer Entwickelung zu verfolgen, einen Blick auf die ersten Arbeiten der Geometer beim Wiederaufblühen der Wissenschaften werfen.

Für diesen Zweck hatten wir die Note bestimmt. Nachdem sie aber schon geschrieben war, erschien der erste Band der *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, worin Libri, in einer beredten Vorrede, den Gang der Wissenschaften bei den verschiedenen Völkern der Erde auseinandersetzt, ausgehend von dem frühesten Alterthum. Dieses Werk, von dem jede Seite den Stempel der tiefsten und die höchste Bewunderung erregenden Gelehrsamkeit trägt, theilt den Arabern und Indern einen grössern Antheil an der Entwickelung der Wissenschaften zu, als man bisher angenommen hat.

Wir haben daher geglaubt, in Eile einen Blick auf den geometrischen Theil der indischen und arabischen Werke werfen zu müssen, von denen uns in den letzten Jahren gelehrte englische Orientalisten Uebersetzungen geliefert haben. Und nun diesen Abriss der verschiedenen Elemente, welche bei dem Wiederaufleben der Wissenschaften in Europa concurrirten, haben wir auf die Geometrie der Lateiner und des Mittelalters ausgedehnt.

„Der menschliche Geist scheint einen so nothwendigen Weg zu gehen, jeder Fortschritt scheint so sehr voraus bestimmt zu sein, dass man vergebens versuchen würde, die Geschichte eines Volks oder einer Wissenschaft zu schreiben, indem man von irgend einer Epoche ausginge, ohne einen

Blick auf die vorhergehenden Zeiten und Ereignisse zu werfen." 89) Dieses gerechte Urtheil wird uns zur Entschuldigung für die Länge dieser Note dienen.

Geometrie der Inder.

Da wir von den Arabern, durch unsre vielfältigen Verbindungen mit diesem Volke, unser Zahlensystem erhalten haben, so haben wir anfänglich ihnen die Ehre dieser geistreichen und fruchtbaren Idee zugeschrieben, welche den Wissenschaften und besonders der Astronomie so bedeutende Dienste geleistet hat. Aber man hat seitdem aus verschiedenen Documenten, die von den Arabern selbst ausgingen, erkannt, dass die Ehre den Indern gebührt. Eine so schöne und so nützliche Erfindung, welche mit nur neun Zeichen, die ihren Werth von ihrer Stellung nach einem gewissen Gesetz erhielhielten, jede denkbare Zahl auszudrücken lehrte und die bei den Lateinern so unbequemen Rechnungen abkürzte, war geeignet, ihren Urhebern die Achtung von Europa zu erwerben, welches sie allgemein angenommen hatte, und zu der Vermuthung zu führen, dass die Hindus auch andre Fortschritte in den mathematischen Wissenschaften zu machen im Stande gewesen wären.

In der That fand man bald einige Andeutungen, aus denen hervorzugehen schien, dass dieses Volk auch die höhere Arithmetik cultivirt habe, aus der sich die ableitet, welche uns von den Arabern durch Fibonacci überliefert ist, unter dem Titel *Algebra et Almucabala* und welche heutigen Tages unsre Algebra bildet.

Die Geschichte der Wissenschaft war lebhaft für die Aufklärung dieser ersten Andeutungen interessirt. Seit 20 Jahren haben sie ihre volle Bestätigung erhalten.

Im Anfange dieses Jahrhunderts machten uns Taylor, Strachey und Colebrooke 90) mit den mathematischen Werken zweier indischen Autoren bekannt, welche für die berühmtesten ihrer Nation gelten, Brahmegupta und Bhascara Acha-

---

89) *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, von Libri, Vorrede p. 3.

90) *Bija Ganita, or the Algebra of the Hindus, by Ed. Strachey.* London 1813, in 4. — *Lilavati or a treatise on Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya, translated from the original sancrit by J. Taylor.* Bombay 1816, in 4. — *Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara, translated by H. T. Colebrooke.* London 1817, in 4.

rya; der erste aus dem 6ten und der zweite aus dem 12ten Jahrhundert der gewöhnlichen Zeitrechnung. Diese Werke handeln von der *Arithmetik*, der *Algebra* und der *Geometrie*. Die Arithmetik und die Algebra machen davon den beträchtlichsten Theil aus und bestätigen vollständig die zu Gunsten der Inder ausgesprochene Meinung, dass sie die Erfinder dieser beiden Zweige des Calculs wären, so wie wir sie von den Arabern empfangen haben, und selbst noch in einem Zustande grösserer Vollkommenheit.

In der That schreiben die Commentare verschiedener indischen Autoren, welche den Text dieser beiden Werke begleiten, einem andern Autor, der noch älter als Brahmegupta ist und den sie Aryabhatta nennen, die Auflösung einer Gleichung des ersten Grades mit zwei unbekannten Grössen in ganzen Zahlen zu, und zwar nach der Methode des Bachet de Meziriac, welche in Europa zuerst erschien. „Die Werke des Brahmegupta und Bhascara enthalten Untersuchungen einer viel höhern Ordnung. Ausser der Auflösung einer Gleichung mit Einer unbekannten Grösse vom zweiten Grade und der einiger Gleichungen von höhern Graden findet man darin die Manier, aus einer einzigen Lösung einer Unbestimmten Gleichung des zweiten Grades mit zwei unbekannten alle andern ganzzahligen Lösungen abzuleiten; und diese Auflösung, welche wir Euler verdanken, war den Indern seit mehr als sechs Jahrhunderten bekannt. Eine Rechnung, welche Aehnlichkeit mit den Logarithmen hat, besondere sinnreiche Bezeichnungen und besonders die grosse Allgemeinheit in der Ausprache der Probleme bezeugen die Fortschritte der indischen Analysis. Diese Wissenschaft, welche die Inder auf die Geometrie und Astronomie anwandten, war für sie ein wichtiges Hülfsmittel der Untersuchung, und man muss lobend mehre geometrische Probleme erwähnen, für welche sie elegante Lösungen gefunden haben."

Wir begnügen uns mit dieser gedrängten Angabe der analytischen Arbeiten der Hindus, die wir aus der *Histoire des sciences des mathématiques* von Libri entlehnt haben. Wir müssen aber in eine genauere Entwickelung eingehen, um ihre Geometrie darzustellen, welche in ihr unser besondrer Gegenstand ist.

Man hat sich in den Auszügen und den Analysen, die man dovon gegeben hat, damit begnügt, einige Sätze anzugeben, z. B. das Quadrat der Hypotenuse; die Proportionalität der Seiten in gleichwinkligen Dreiecken; die Segmente, welche durch das Perpendikel auf der Basis eines Dreiecks bilden; die Fläche dieser Figur als Function der drei Seiten; ein angenähertes Verhältniss der Peripherie zum Durch-

messer; die Werthe der Seiten der sieben ersten regelmässigen Polygone, die einem Kreise eingeschrieben sind; eine Relation zwischen der Sehne eines Bogens, seinem Sinus-versus und dem Durchmesser; und endlich einige Sätze über die Berechnung der Distanzen durch den Schatten des Gnomons.[91])

Man hat allgemein geglaubt, in diesen verschiedenen Sätzen und folglich in dem geometrischen Theil der Werke des Brahmegupta und Bhascara nur *Elemente der Geometrie* zu sehen, oder wenigstens die elementaren und ersten Sätze, auf denen die ganze Wissenschaft der Hindus beruht. So hat man ihre geometrischen Kenntnisse als unendlich weit unter ihren Kenntnissen in der Algebra betrachtet.[92]) Indem wir uns aber davon Rechenschaft abzulegen suchten, durch eine genaue Untersuchung des geometrischen Theils der indischen Werke, der Bedeutung mehrer Sätze, von denen man noch nicht gesprochen hatte, und der Rolle, welche diese verschiedenen Wahrheiten, die zuerst ohne Verbindung und wie ganz zufällig durch einander geworfen erscheinen, in diesem Werke spielen, sind wir zu der Erkenntniss gekommen, dass einer Seits die bisher nicht erwähnten Sätze gerade die sind, welche den meisten Werth haben, und dann, dass besonders das Werk des Brahmegupta, weit davon entfernt, uns *Elemente der Geometrie* oder eine Zusammenstellung der bei den Hindus gebräuchlichsten Sätze zu liefern, ganz einfach von einer einzigen geometrischen Theorie handelt.

Diese Theorie ist die des Vierecks, welches einem Kreise eingeschrieben ist. Brahmegupta löst folgende bemerkenswerthe Aufgabe: *Ein einbeschreibbares Viereck zu construiren, dessen Fläche, Diagonalen, Perpendikel und verschiedene andre Linien, so wie auch der Durchmesser des Kreises, durch rationale Zahlen ausgedrückt sind.*

---

91) *Correspondance polytechnique*, Tom. III, Januar 1816; ein Artikel übertragen von Terquem aus dem Werke von Hutton, *Tracts on Mathematical* etc., III Vol. in 8., London 1812. Hutton hatte diese neuen und kostbaren Documente über die Algebra und Geometrie der Inder von Strachey erhalten, nachdem die Bekanntmachungen dieses gelehrten Orientalisten erschienen waren. — *Edinbourg Review*, 1817, Nr. LVII. — Delambre *Histoire de l'Astronomie ancienne*, T. I; und *Histoire de l'Astronomie du moyen âge*, Discours preliminaire. — *Journal des Savans*, Sept. 1817.

92) *They (the hindus) cultivated Algebra much more, and with greater success, than Geometry; as is evident from the comparatively low state of their Knowledge in the one, and the high pitch of their atteinments in the other.* Colebrooke: *Brahmegupta and Bhascara, Algebra*, Dissertation p. XV.

Dieses ist der Zweck des Werks von Brahmegupta, wenn wir uns nicht in der Interpretation der meisten seiner Sätze täuschen, deren Sinn man wegen der ausserordentlichen Concision ihrer Aussprache errathen muss, da in ihnen der grösste Theil der Bedingungen fehlt, die darin eingehen sollten.

Man wird ohne Zweifel erstaunt sein zu sehen, dass das, was man vor einer aufmerksamen Lectüre als die *Elemente der Geometrie* hat betrachten können, sich auf solche Untersuchungen reducirt. Diese Untersuchungen zeigen, wenn nicht von einem sehr ausgedehnten Wissen, so doch wenigstens von einer gewissen Gewandtheit in der Geometrie und von einer Fertigkeit im Calcul. In dieser Hinsicht sind sie in dem algebraischen Geist der Hindus. Sie zeigen, dass es uns noch gänzlich übrig bleibt, ihre Elemente der Geometrie kennen zu lernen, und erregen in uns den Wunsch, dass man noch andre ähnliche Fragmente aus der Zeit des Brahmegupta oder aus früherer Zeit auffinden möge; denn sie beweisen, dass damals die Geometrie mit Erfolg cultivirt worden ist.

Das Werk des Bhascara ist nur eine sehr unvollkommene Nachahmung von dem des Brahmegupta, welches commentirt und entstellt ist. Man findet darin noch einige neue Untersuchungen über das rechtwinklige Dreieck (welche der von Brahmegupta behandelten Untersuchung fremd waren); einen merkwürdigen Näherungswerth für die Fläche des Kreises als Function des Durchmessers; den Werth der Seiten der sieben regelmässigen eingeschriebenen Polygone als Function des Radius; und eine Formel für die näherungsweise Berechnung der Sehne als Function des Radius und umgekehrt. Aber die wichtigsten Sätze des Brahmegupta, die sich auf das einem Kreise einbeschreibbare Viereck beziehen, sind darin ausgelassen oder als *ungenaue* aufgeführt. Dies zeigt, dass Bhascara sie nicht verstanden hat.

Dieser Umstand und die Commentare der verschiedenen Scholiasten scheinen uns zu beweisen, dass seit Brahmegupta die Wissenschaften in Indien in Verfall gerathen sind und dass das Werk dieses Geometers aufgehört hat verstanden zu werden. Man weiss übrigens, dass in gegenwärtiger Zeit die indischen Gelehrten in der Mathematik vollkommen unwissend sind. 93)

---

93) Zu Poona, welches man als das Haupt-Etablissement der Braminen betrachten kann, giebt es höchstens 10 oder 12 Personen, die den Lilavati oder Bija-Ganita verstehen; und obgleich es mehre Astronomen von Profession in Bombay giebt, so hat doch Taylor nicht einen einzigen gefunden, der eine Seite in Lilavati verstanden hätte. (Delambre, *Histoire de l'Astronomie ancienne*, T. I, p. 545.)

Wir wollen jetzt eine gedrängte Uebersicht der Werke des Brahmegupta geben. Darauf wollen wir ebenso das des Bhascara durchgehen und die bemerkenswerthen Unterschiede andeuten, welche wir in diesen beiden Werken, die in einem Intervall von sechs Jahrhunderten geschrieben sind, gefunden haben.

Ueber die Geometrie des Brahmegupta.

Die Werke des Brahmegupta, wofür Europa dem berühmten Colebrooke verpflichtet ist, sind Auszüge aus einem Werke über Astronomie, in dem sie das 12te und 18te Kapitel bilden. Das 12te ist eine Behandlung der Arithmetik (betitelt *Ganita*) und das 18te eine Behandlung der Algebra (betitelt *Cuttaca*). Die Geometrie bildet einen Theil in der Abhandlung über Arithmetik und nimmt die Sectionen V, VI .... IX ein, welche im englischen Text die Titel führen: ***Plane figure, Excavations, Stacks, Saw, Mounds of Grain, Measure by shadow.***

Die vierte Section, welche den Titel führt: ***Plane Figure; Triangle and Quadrilateral,*** besteht aus 23 Sätzen, die in den §. 21—43 enthalten sind.

Alle Sätze reduciren sich auf elliptische und sehr concise Aussprüche und sind von keinem Beweise begleitet. Sie sind ganz allgemein dargestellt ohne Hülfe irgend einer Figur und ohne dass im Texte selbst irgend eine Zahlenanwendung gemacht wäre. Aber die Noten eines indischen Autors, mit Namen Chaturveda, enthalten darauf bezügliche Figuren und Anwendungen.

Einige von den Sätzen, aber nur in geringer Anzahl, sind verständlich und ihre Aussprache enthält alle Theile, welche zu einem vollständigen Satze gehören. Die andern jedoch sind sehr unvollständig ausgesprochen und erwähnen gar nicht bemerkenswerthe Bedingungen der Aufgaben, deren Kenntniss nothwendig ist. Wenn es sich z. B. um ein Viereck handelt, so reducirt sich der Satz auf den Ausdruck der Längen seiner vier Seiten und lässt die andern zur Construction des Vierecks nothwendigen Bedingungen unbekannt, eben so wie die Eigenschaften dieser Figur, welche der Autor in diesem Satze auszusprechen beabsichtigte. Alle diese Sätze des Brahmegupta müssen also erst errathen werden.

Der Sinn, welchen wir ihnen gegeben haben, hat uns zu der Ansicht geführt, dass der Zweck dieses Werkes die Auflösung folgender vier, aufs Dreieck und Viereck bezüglichen Aufgaben gewesen sei:

1) *Als Function der drei Seiten eines Dreiecks, seine Fläche und den Radius des umgeschriebenen Kreises zu finden;*

2) *Ein Dreieck zu construiren, in welchem diese Fläche und dieser Radius durch rationale Zahlen ausgedrückt sind, indem die Seiten selbst rationale Zahlen sind;*

3) *Wenn ein Viereck einem Kreise eingeschrieben ist, als Functionen seiner Seiten folgende Stücke zu bestimmen: seine Fläche, seine Diagonalen, seine Perpendikulären, die Segmente, welche diese Linien durch ihren gegenseitigen Durchschnitt auf einander bilden, und den Durchmesser des Kreises;*

4) *Endlich ein Viereck zu construiren, das einem Kreise eingeschrieben werden kann und in dem alle diese Stücke, seine Fläche, seine Diagonalen, seine Perpendikulären, ihre Segmente und der Durchmesser des Kreises in rationalen Zahlen ausgedrückt sind.*

Wenigstens finden sich diese vier Aufgaben vollständig aufgelöst in den 18 ersten Sätzen des Werks von Brahmegupta, welche zu ihrer Lösung hinreichen und von denen keine etwas Fremdartiges enthält; so dass man sagen kann, diese Abhandlung ist mit Einsicht und Präcision geschrieben. Einige Sätze, die darauf folgen, betreffen andre Materien.

Auch kann man das Werk des Brahmegupta in der Weise betrachten, als habe es nur eine einzige der vier angeführten Fragen zu seinem Zweck gehabt, welches die letzte sein würde, die sich aufs eingeschriebene Viereck bezieht. Die drei andern wären dann nur Prämissen, die zur Lösung dieser nothwendig waren; und in der That alle Sätze, aus denen sie zusammengesetzt sind, finden ihre Anwendung bei der vollständigen Lösung der Aufgabe über das Viereck.

Bevor wir zu der Analyse des Werks von Brahmegupta übergehen, müssen wir noch einige Ausdrücke der mathematischen Nomenclatur der Hindus anführen, von denen sie einen sehr glücklichen Gebrauch machen, um die Theoreme kurz und ohne Hülfe der Figur auszusprechen; wodurch sie einen Charakter von Allgemeinheit erhalten, der häufig der Geometrie der Griechen fehlt. Wir werden uns im Folgenden derselben Ausdrücke bedienen, da sie die Auseinandersetzung erleichtern und uns bisweilen gestatten werden, den Stil der indischen Geometer beizubehalten.

In einem Dreieck wird eine Seite *Basis* genannt, die beiden andern: *Seiten* oder *Schenkel*; *Perpendikel* ist die Linie, welche von dem Durchschnittspunkt der beiden Schen-

kel senkrecht auf die Basis gezogen wird; *Segmente* sind die Stücke, welche zwischen dem Fusspunkt des Perpendikels und den beiden Endpunkten der Basis liegen.

Im rechtwinkligen Dreieck wird der eine Schenkel des rechten Winkels die *Seite*, der andre die *Aufrechtstehende* (*upright*), und die dritte Seite *Hypotenuse* genannt. Statt des Worts die *Aufrechstehende* wollen wir *Kathete* substituiren, welches von den Griechen und Lateinern gebraucht wurde.

Das Polygon von vier Seiten wird *Tetragon* (ausgenommen im Titel des Werks: *Triangle and Quadrilateral*) genannt; die eine der Seiten ist die *Basis*, ihre gegenüberliegende der *Scheitel* (*summit*) und die beiden andern die *Flanken* (*flanks*). Da wir uns nicht des Ausdrucks *Scheitel* bedienen können, weil sich derselbe in unsrer Sprache stets nur auf einen Punkt und niemals auf eine Linie bezieht, so wollen wir dafür *Corauste* (etwa *Scheitellinie*) substituiren, indem wir das Wort den Lateinern nachbilden, welche auch einen besondern Namen für die der Basis gegenüberliegende Seite im Viereck wählten und dieselbe *coraustus* nannten. Dieses Wort findet sich in einigen alten Manuscripten und ist 1486 in der *Margarita philosophica* wieder gebraucht.

Die *Perpendikulären* des Vierecks sind diejenigen, welche von den Endpunkten der beiden Flanken auf die Basis gefällt werden, so dass sie respective den beiden Flanken correspondiren. Jede von ihnen bildet auf der Basis zwei Segmente. Das eine liegt zwischen der Perpendikuläre und der correspondirenden Flanke und wird *Segment* genannt, das andre sein *Complement*. Des Ausdrucks *Diagonale* bedienen sich die Inder in demselben Sinne, als wir.

Beim Rechteck sind die Benennungen diese: das Rechteck wird *Oblong* genannt; zwei an einander stossende Seiten heissen *Seite* und *Aufrechtstehende*, wir wollen sie *Seite* und *Kathete* nennen.

Das Wort *Trapez* wird mehrmals gebraucht, ohne definirt zu werden. Aus einer Note von Colebrooke, die zu Anfang des geometrischen Theils von Bhascara steht und aus dem Scholiasten Ganesa entnommen ist, sieht man, dass dieses Wort, welches der Sanskrit-Benennung *vishama-chaturbhuja* entspricht, auf ein Viereck angewandt wird, dessen vier Seiten unter einander ungleich sind. Es ist dieses die Bedeutung, welche es bei den Griechen hatte (s. die Definition 34 im 1sten Buch des Euclid) und welche bis jetzt von

den englischen Geometern beibehalten ist. 94) Es ist auch die Bedeutung, welche wir ihm in den Sätzen des Brahmegupta geben werden. Damit aber diese Sätze einen Sinn haben, müssen wir nothwendig annehmen, dass die Diagonalen des *Trapezes* sich unter rechtem Winkel schneiden. Nur in zwei Sätzen ist diese Einschränkung nicht erforderlich; man

---

94) Gegenwärtig gebraucht man in Frankreich dieses Wort ausschliesslich nur für ein Viereck, in welchem zwei Seiten unter einander parallel sind, während die beiden andern es nicht sind. Erst gegen die Mitte des letzten Jahrhunderts hat es diese Bedeutung angenommen, während es bis dahin die des Euclid hatte. Jedoch hatte es schon zu verschiedenen Zeiten, selbst in sehr frühen, diese besondere Bedeutung erhalten; denn in dem 174sten Satz des 7ten Buchs der mathematischen Sammlungen von Pappus muss dieses Wort nothwendig auf ein Viereck angewandt werden, in dem zwei Seiten parallel, die beiden andern aber irgend welche sind, und in dem Commentar des Eutocius zum 49sten Satz im 1sten Buch der Kegelschnitte von Apollonius hat es dieselbe Bedeutung. In neuerer Zeit finden wir es förmlich ausgedrückt in einem Werke von Peucer: *Elementa doctrinae de circulis coelestibus*, in 8., 1569, wo wir lesen: *Quae vero non παραλληλόγραμμα sunt, aut duas habent lineas aequabiliter distantes, ut τραπέζια, mensulae; aut nullas prorsus parallelas lineas habent, ut τραπεζοειδῆς.*

Die Lateiner nannten *mensa* oder *mensula* das Viereck, welches zwei parallele Seiten hat. Stevin nannte es *hache*, weil, wie er sagt, es mehr einem Beil als einem Tisch ähnlich ist. (*Oeuvres mathématiques* von Stevin, p. 373.)

Uebrigens haben alle Benennungen, die sich auf die verschiedenen Formen der Vierecke beziehen, sehr variirt.

Das Rechteck, welches von den Griechen ἑτερομήκης genannt wurde, erhielt von den Lateinern den Namen *tetragonus parte altera longior* (s. Boethius, Cassiodorus). Im Mittelalter gaben ihm Campanus und Vincent de Beauvais den eines *tetragone long*; welcher in den Werken von Zamberti, Tartalea u. s. w. beibehalten ist. Später haben es Einige *Oblong* genannt (s. Alstedius, *Encyclopaedia universa*, lib. XV). Endlich nahm es in Frankreich den Namen *Rectangel* an (Mersenne, *De la vérité des sciences*, p. 815), den es auch behalten hat. In England heisst es noch immer Oblong.

Vincent de Beauvais, ein Schriftsteller des 13ten Jahrhunderts, Verfasser einer Encyclopädie unter dem Titel: *Speculum mundi*, worin sich eine Menge von kostbaren Documenten für die Geschichte mit einer immensen Gelehrsamkeit zusammengestellt finden, nannte *climia* den Rhombus der Griechen, was bei den Franzosen *losange* heisst; *simile climia* das Rhomboid oder Parallelogramm, und *climinaria* alle unregelmässigen Vierecke d. h. die Trapeze der Griechen.

Campanus, ein Schriftsteller aus derselben Zeit, welchem man in Europa die erste Uebersetzung des Euclid, und zwar aus einem arabischen Texte, verdankt, hat den Rhombus *helmuayn* genannt, das Parallelogramm *similis helmuayn*, und das Trapez des Euclid *helmuariphe.* Diese Namen wurden beim Wiederaufleben der Wissenschaften gebraucht, man findet sie in der Geometrie von Bradwardin und in den Werken des Lucas de Borgo und des Tartalea.

hat inzwischen Grund zu glauben, dass Brahmegupta sie im Sinne gehabt habe. Diese erste Bedingung bei der Construction des Trapezes ist nicht die einzige, welche der indische Autor hätte bemerken müssen. Wir haben unter Anderm bemerkt, dass dieses Trapez sich müsse *in einen Kreis einschreiben lassen.* Keine dieser beiden Bedingungen findet sich angegeben, weder im Text des Brahmegupta, noch in den Noten des Scholiasten Chaturveda. Das Wort Trapez wird von Bhascara nur zweimal gebraucht, und wir sehen, dass der Autor es in beiden Fällen auf ein Viereck anwendet, das auf besondre Art construirt ist und in dem die Diagonalen auf einander senkrecht stehen.

Wir wollen, aus Mangel eines andern Worts, uns des Wortes Trapez in diesem Sinne bedienen, da wir einen abkürzenden Ausdruck beibehalten wollen, der dazu beitragen wird, den eigenthümlichen Charakter der Sätze des indischen Autors hervortreten zu lassen.

Die Bedeutung, welche wir eben dem Worte Trapez zuertheilt haben, und die Bedingung, dass diese Figur einem Kreise eingeschrieben werden könne, reichen schon hin, um mehren dieser Sätze einen Sinn zu geben, aber noch nicht allen; und in mehren andern, obgleich sie nicht ein Trapez betreffen, muss man doch eben so annehmen, dass es sich noch um ein Viereck handle, das einem Kreise eingeschrieben werden könne. In diesen hat das Viereck zwei gegenüberliegende gleiche Seiten oder auch drei gleiche Seiten.

Diese ersten Annahmen reichen hin, um die Construction der Figuren, auf welche sich die Sätze des Brahmegupta beziehen, auszuführen; aber dies ist noch nicht genug; man muss auch noch stillschweigend den Autor suppliren, und entdecken, welches die Eigenschaften sind, deren sich die so construirten Figuren erfreuen, Eigenschaften, die den wahren Gegenstand des Werkes ausmachen. Diese Aufgabe wird sich gleichfalls bei den andern Sätzen herausstellen, die sich aufs Dreieck beziehen, wo die besondern Bedingungen der Construction dieser Figur zwar angegeben sind, wo aber Nichts von den Eigenschaften, die sie besitzt, gesagt ist.

Hiernach geben wir nun eine Zusammenstellung der Sätze, welche wir in dem Werk des Brahmegupta finden. Für diejenigen, deren Aussprache unvollständig oder unverständlich war, geben wir den Sinn und die Interpretation, wovon wir gesprochen haben. Wir wollen sie in Gruppen vertheilen, ohne die Ordnung zu beobachten, welche sie im Original haben; aber vermittelst der beigefügten Nummern ihrer Paragraphen kann man diese Ordnung wiederherstellen.

1. Vier Sätze über das Dreieck:

Erster: Das Quadrat der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck; §. 24.

Zweiter: Die Art, das Perpendikel der Function der Seiten zu berechnen; §. 22.

Dritter: Die Fläche des Dreiecks als Function der drei Seiten; §. 21.

Vierter: Ausdruck für den Durchmesser eines Kreises, der einem Dreieck umgeschrieben ist; §. 27.

Diese Sätze, wenigstens die beiden ersten, müssen als Lehnsätze betrachtet werden, welche für das Folgende von Nutzen sind.

2. Drei Sätze, die zum Gegenstand haben die Construction eines Dreiecks, dessen Seiten und Perpendikel und folglich auch Fläche und Radius des umgeschriebenen Kreises, rationale Zahlen sind:

Erster: Das rechtwinklige Dreieck; §. 35.

Zweiter: Das gleichschenklige Dreieck; §. 33.

Dritter: Das ungleichseitige Dreieck; §. 34.

3. Neun Sätze über das Viereck, welches einem Kreise eingeschrieben werden kann:

Erster: Die Fläche des Vierecks als Function der vier Seiten; §. 21.

Zweiter: Der Ausdruck seiner Diagonalen; §. 28.

Dritter: Die Art, den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises als Function der Seiten zu berechnen; und ein besondrer Ausdruck dieses Durchmessers für das *Trapez* (ein Viereck, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen); §. 26.

Vierter: Ein besondrer Ausdruck der Diagonale und des Perpendikels in einem eingeschriebenen Viereck, dessen Flanken gleich sind; §. 23.

Fünfter: Die Art, die Segmente zu berechnen, welche die Diagonalen und die Perpendikel auf einander bilden, in einem eingeschriebenen Viereck, dessen Flanken gleich sind; §. 25.

Sechster: Die Art, die Perpendikel und die hierdurch auf der Basis gebildeten Segmente in einem eingeschriebenen Trapez zu berechnen; §. 29.

Siebenter: Die Art, die Segmente zu berechnen, welche auf den Diagonalen durch ihren Durchschnittspunkt gebildet werden, in demselben Viereck; §. 30—31.

Achter: Die Art, das Perpendikel zu berechnen, welches von dem Durchschnittspunkt der Diagonalen auf eine Seite gefällt wird, und die Verlängerung

dieses Perpendikels bis zur gegenüberstehenden Seite; §. 30—31.

Neunter: Die Art, die Segmente zu berechnen, welche die Perpendikel auf den Diagonalen und den Seiten bilden, und die, welche die gegenüberliegenden Seiten auf einander bilden; §. 32.

4. Vier Sätze über die Constructionsart eines Vierecks, welches einem Kreise eingeschrieben werden kann und in dem die Seiten, die Diagonalen, die Perpendikel, die Segmente, welche diese Linien auf einander bilden, die Fläche des Vierecks und der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises, rationale Zahlen sind.

Erster: Construction eines Rechtecks; §. 35.

Zweiter: Construction eines Vierecks, dessen gegenüberstehende Seiten gleich sind; §. 36.

Dritter: Construction eines Vierecks mit drei gleichen Seiten; §. 37.

Vierter: Construction eines Vierecks mit vier ungleichen Seiten; §. 38. Dieses so construirte Viereck ist ein Trapez, d. h. von der Art, dass die Diagonalen senkrecht auf einander stehen.

Dieses sind nach der Bedeutung, die wir geglaubt haben, ihnen geben zu können, die Sätze, welche in den 18 ersten Paragraphen des Werks von Brahmegupta enthalten sind, und von denen es uns scheint, dass sie sich auf die Theorie eines dem Kreise einschreibbaren Vierecks beziehen, und dass sie die Aufgabe lösen, ein solches Viereck zu construiren, unter der Bedingung, dass alle Theile rational sind.

Das Wort *Kreis* wird nur in zwei Sätzen (§. 26 u. 27) ausgesprochen, in denen es sich darum handelt, den Radius eines Kreises zu finden, der einem Dreieck oder einem Viereck umgeschrieben ist; und das Wort *rational* wird niemals ausgesprochen. Ein Viereck wird nur durch die Längen seiner Seiten bestimmt, ohne dass weder von den andern Bedingungen der Construction, wozu, wie wir angenommen haben, die Fähigkeit gehört, dass es einem Kreise eingeschrieben werden könne, noch von den Eigenschaften des Vierecks, die darin bestehen, dass alle seine Theile durch rationale Zahlen ausgedrückt werden, irgend Etwas gesagt wird.

5. Fünf Sätze, welche nach den 18 ersten Paragraphen folgen, sind der Untersuchung über das einschreibbare Viereck fremd.

Der erste Satz betrifft das rechtwinklige Dreieck. Er reducirt sich, vollkommen anders ausgedrückt, auf diesen: *Auf der Verlängerung jedes Schenkels des rechten Win-*

kels eines Dreiecks über die Hypotenuse hinaus einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den beiden Endpunkten der Hypotenuse dieselbe Summe geben, als die beiden Schenkel des rechten Winkels; §. 39.

Die vier folgenden Sätze beziehen sich auf den Kreis:

Erster: Ausdruck für die Peripherie und für die Fläche des Kreises als Function des Durchmessers. — Es sei D der Durchmesser und R der Radius.

Für die Praxis nimmt man die Peripherie $= 3D$, und die Fläche $= 3R^2$.

„Um die wahren Werthe (*the neat values*) zu haben, nimmt man die Peripherie $= \sqrt{10 . D^2}$, und die Oberfläche $= \sqrt{10 . R^4}$"; §. 40.

Zweiter: „In einem Kreise ist 1) die halbe Sehne gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Segmente des senkrechten Durchmessers; 2) ist das Quadrat der Sehne, dividirt durch das Vierfache des einen Segments, *plus* diesem Segment, gleich dem Durchmesser"; §. 41.

Brahmegupta nennt das kleinere Segment *Pfeil* (*arrow*). — Wenn zwei Kreise sich schneiden, so haben sie eine gemeinschaftliche Sehne. Die Gerade, welche aus den beiden Pfeilen besteht, die dieser Sehne in beiden Kreisen entsprechen, heisst *erosion*.

Dritter: Der Pfeil ist gleich der Hälfte der Differenz zwischen dem Durchmesser und der Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate des Durchmessers und der Sehne.

„Wenn die Erosion von beiden Durchmessern abgezogen wird, so geben die Reste, durch die Erosion multiplicirt und durch die Summe dieser Reste dividirt, die beiden Pfeile"; §. 42.

Vierter: §. 43. Dieser Satz ist derselbe, als der zweite Theil des §. 41.

Diese sind die 23 Sätze, welche die IVte Section bilden.

Die Vte Section ist betitelt *Excavations*. Sie giebt das Maass eines Prisma und einer Pyramide und eine Methode, für das Praktische einen Körper näherungsweise auszumessen.

In den Sectionen VI, VII und VIII, die betitelt sind: *Stacks, Saw, Mounds of grain*, giebt der Verfasser Regeln an, um *Haufen Steine, Stücke Holz* und *Haufen Getreide* näherungsweise zu messen.

Die Section IX ist betitelt *Measure by shadow*. Der Verfasser nimmt ein Licht an, welches auf einem verticalen Fusse steht, und einen *gnomon*, welcher ein ebenfalls senkrechter Stab ist; und löst diese beiden Aufgaben:

1) *Wenn man die Höhe des Lichts und die des Gnomons und die Entfernung zwischen dem Fusspunkt des Lichts und dem des Gnomons kennt, den Schatten zu finden, der durch den Gnomon geworfen wird*; §. 53.

2) *Die Höhe des Lichts zu finden, wenn man die Schatten kennt, welche ein Gnomon wirft, nachdem dieser an zwei verschiedenen Stellen aufgerichtet ist*; §. 54.

Diese sind die Sätze, welche den geometrischen Theil des Werkes von Brahmegupta ausmachen. Bevor wir jedoch zur Prüfung des Werks von Bhascara übergehen, wollen wir noch einige Betrachtungen über mehre dieser Sätze anstellen.

Die Regel für die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks in rationalen Zahlen drückt sich algebraisch so aus:

Es sei a *die eine Kathete des Dreiecks und* b *irgend eine Quantität, so wird die zweite Kathete* $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)$ *und die Hypotenuse* $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)$ *sein.*

Diese Regel beruht auf der Identität:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2+a^2.$$

Brahmegupta spricht bei diesem Satz das Wort *rational* nicht aus; aber man findet dieselbe Regel im §. 38 seiner Algebra, wo sie betitelt ist: *Regel für die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seiten.*

Bhascara giebt denselben Satz im geometrischen Theil des Lilavati, §. 140, und fügt hinzu, dass die Seiten *rational* sein werden.

Diese Regel für die Construction des Dreiecks ist, wie man sieht, eine Verallgemeinerung der beiden Regeln, welche Proclus, in seinem Commentar zu dem 47sten Satz des ersten Buchs des Euclid, dem Pythagoras und Plato zuschreibt, für die Bildung eines rechtwinkligen Dreiecks in ganzen Zahlen, wenn eine Seite durch eine ungerade oder gerade Zahl gegeben ist.

Diese beiden Regeln der griechischen Geometer werden durch folgende beide Formeln ausgedrückt:

$$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 + a^2,$$

$$\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right\}^2 = \left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right\}^2 + a^2,$$ [95)]

welche man erhält, wenn man in der des Brahmegupta nach einander $b=1$ und $b=2$ setzt.

Die Formel des Brahmegupta kann auch diese Form annehmen:

$$(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2.$$

Diese Formel ist bei den neuern Geometern eine sehr gebräuchliche, bei denen es das Fundament zu ihren Methoden für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades ist. Brahmegupta bedient sich derselben zur Construction des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Seiten und Perpendikel rationale Zahlen sind. Seine Regel ist diese:

Es seien a und b zwei beliebige Zahlen, dann wird (a^2+b^2) der Ausdruck der beiden gleichen Seiten und $2(a^2-b^2)$ die Basis des Dreiecks sein; das Perpendikel wird $2ab$; §. 33.

Um ein ungleichseitiges Dreieck zu bilden, dessen Seiten und Perperdikel rationale Zahlen sind, sieht man aus der algebraischen Regel des Brahmegupta, §. 34, dass er zwei rechtwinklige Dreiecke in rationalen Zahlen construirt, welche eine Seite gemein haben. Diese Seite ist das Perpendikel des ungleichseitigen Dreiecks, welches aus den andern Seiten gebildet wird.

Mehre neuere Geometer haben auf diese Art dieselbe Aufgabe aufgelöst (s. die Commentare von Bachet de Meziriac zum IVten Buch der *Quaestiones arithmeticae* von Diophantus und die *Sectiones triginta miscellaneae* von Schooten, p. 429).

Wir haben erkannt, dass die beiden Sätze über das gleichschenklige und ungleichseitige Dreieck zu der Construction dienlich sind, welche Brahmegupta in den §§. 36 und 37 für ein Viereck giebt, das einem Kreise eingeschrieben werden kann und zwei oder drei gleiche Seiten hat.

Die Formel $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2$, welche Brahmegupta gebraucht hat, um ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn eine Seite gegeben ist, kann auch in

95) Boëthius hat in dem 2ten Buch seiner Geometrie auch diese beiden Formeln, und schreibt die zweite dem Archytas zu.

dem Falle angewandt werden, wenn die Hypotenuse gegeben ist; denn es sei c die Hypotenuse, so mache man $b = 1$ in der Formel und multiplicire beide Theile der Gleichung durch $\frac{c^2}{(a^2+1)^2}$, so wird sie:

$$c^2 = \frac{4a^2c^2}{(a^2+1)^2} + \frac{c^2(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2};$$

woraus sich ergiebt, dass die beiden Katheten des Dreiecks die Formen

$$\frac{2ac}{a^2+1} \text{ und } \frac{c(a^2-1)}{a^2+1}$$

erhalten werden, worin a eine willkührliche Zahl ist.

Diese Formel hat Bhascara gegeben. Sie findet sich nicht in dem Werke von Brahmegupta, weil sie zur Lösung der Aufgabe vom eingeschriebenen Viereck, worauf sich alle seine Sätze beziehen, unnütz ist.

Die §§. 26 und 27 sind die einzigen, in denen Brahmegupta des der Figur umgeschriebenen Kreises Erwähnung thut. In keinem der andern Sätze, von denen es uns scheint, dass sie sich auf das einem Kreise einschreibbare Viereck beziehen, wird irgend eine ähnliche Bedingung angeführt.

Der §. 27 enthält die Art, wie man den Durchmesser eines Kreises findet, welcher einem Dreieck umgeschrieben ist, und giebt die bekannte Formel: „das Product zweier Seiten eines Dreiecks, dividirt durch das Perpendikel auf der dritten Seite, ist der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises."

Die Art, wie man den Durchmesser eines Kreises berechnet, welcher einem Viereck umgeschrieben ist, ist dieselbe: man betrachtet das Dreieck als gebildet aus zwei an einander stossenden Seiten und einer Diagonale. Der Ausdruck für die Diagonalen findet sich im §. 28.

Bei einem Viereck, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen, ist *der Durchmesser gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beiden gegenüberliegenden Seiten.*

Dieser Satz beruht auf der bekannten Eigenschaft der Sehnen eines Kreises, die sich unter rechtem Winkel schneiden, nämlich: *die Summe der Quadrate der vier Segmente, welche auf diesen Sehnen durch ihren Durchschnittspunkt gebildet werden, ist gleich dem Quadrate des Durchmessers des Kreises.* Diese Eigenschaft ist der XIte Satz in dem Werke von Archimedes, welches den Titel der *Lemmata* führt.

Der §. 21, welcher die Fläche des Dreiecks und Vierecks als Function der Seiten giebt, scheint uns besondre Beachtung zu verdienen, besonders von denen, welche gern die historischen Documente aufsuchen mögen, die sich in den Annalen der Wissenschaft darbieten.

Dieser Paragraph besteht aus zwei Theilen, von denen der erste einer doppelten Auslegung fähig zu sein scheint. Wenn wir wörtlich seinen Ausspruch verfolgen, so drückt er gewisser Maassen einen negativen Satz aus, indem er sagt, dass eine solche Regel für die Berechnung der Fläche eines Dreiecks und Vierecks falsch sei. Wenn wir dagegen eine leichte Veränderung im Texte machen, so ziehen wir daraus eine genaue Regel für die Berechnung des *Trapezes*, welches die Hauptrolle im Werke des Brahmegupta spielt.

Erste Auslegung.

1. *Das Produkt der halben Summen der gegenüberliegenden Seiten giebt eine ungenaue Fläche des Dreiecks nnd Vierecks*;

2. *Die halbe Summe der Seiten wird viermal geschrieben, davon werden successive die Seiten abgezogen und aus den Resten das Produkt gebildet: dann ist die Quadratwurzel aus diesem Produkt die genaue Fläche der Figur.*[96])

Obgleich die Bedingung für das Viereck, dass es einem Kreise eingeschrieben werden könne, durchaus nicht erwähnt wird, so kann man doch nicht zweifeln, dass es sich im zweiten Theil des Satzes um eine solche Figur handle; denn man erkennt darin die elegante Regel, welche zur Berechnung der Fläche eines eingeschriebenen Vierecks vermittelst der vier Seiten dient. Diese Regel enthält zugleich die des Dreiecks in sich, wenn man nur eine Seite des Vierecks gleich Null setzt. Dieses ist dasselbe, was Chaturveda meint, welcher in einer sehr kurzen Note sagt, dass man, für den Fall des Dreiecks, die drei Seiten respective von dreien der vier hingeschriebenen halben Summen abzieht, während man die vierte so lässt, wie sie ist.

Diese Formel für die Fläche eines Dreicks, als Function der Seiten, ist in dem Werke des Brahmegupta von den Geo-

96) Man sehe den Text des Colebrooke, den man vor Augen haben muss, um die doppelte Auslegung, die er uns zuzulassen scheint, auffassen zu können: *The product of half the sides and countersides is the gross area of a triangle and tetragone. Half the sum of the sides set down four times, and severally lessened by the sides, being multiplied together, the square-root of the product is the exact area.*

metern, welche darüber Rechenschaft gegeben haben, angemerkt und als der wichtigste Satz desselben betrachtet worden; niemals aber, wie ich glaube, hat man die Formel für die Fläche des Vierecks angeführt. Diese jedoch verdient in jeder Hinsicht den Vorzug; denn ausserdem, dass sie allgemeiner ist, dass sie schwieriger zu beweisen ist, dass sie eine weiter vorgerückte Geometrie voraussetzt und, mit einem Wort, dass sie einen grössern wissenschaftlichen Werth hat, so scheint sie auch bis jetzt dem indischen Verfasser eigenthümlich anzugehören; denn man findet sie in keinem Werke der Griechen, was nicht eben so mit der Formel für das Dreieck der Fall ist, wie wir weiterhin sagen werden.

Wir gehen zu dem ersten Theil des Satzes über, der uns beschäftigt und der als ungenau eine Regel ausspricht, welche es in der That für ein beliebiges Dreieck und Viereck ist.

In einer Note macht Chaturveda von dieser Regel acht Anwendungen in Zahlen, auf drei Dreiecke, auf das gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige, und auf das Quadrat, auf das Rechteck, auf das Viereck, dessen Bases unter einander parallel und dessen Flanken gleich sind, auf das Viereck, dessen Bases parallel und in den drei Seiten gleich sind, und endlich auf das Trapez.

In Bezug auf das Dreieck bildet er die halbe Summe zweier Seiten und multiplicirt sie durch die halbe Basis. Er findet immer eine ungenaue Fläche, was auch nothwendig sein muss, da die halbe Summe der beiden Seiten niemals dem Perpendikel gleich sein kann.

Beim Viereck multiplicirt er die halbe Summe der beiden Bases mit der halben Summe der beiden Flanken. Er sagt, das Produkt giebt die Fläche für das Quadrat und das Rechteck genau, in drei andern Fällen aber ungenau.

Diese Weise, die Fläche des Vierecks zu berechnen, ist von den römischen Feldmessern als genau angewandt. Man findet sie in der Sammlung: *Rei agrariae auctores legesque variae* [97]), und selbst in der Geometrie von Boëthius (Lib. II, *de rhomboide rubrica*).

Die Regel für das Dreieck, wenigstens für das gleichseitige, findet sich auch bei den *Grammatici Romani*. Beide wurden noch bei uns, im Mittelalter, als brauchbar angewandt. Denn wir finden sie in den Werken von Beda unter den Aufgaben aus der Arithmetik *ad acuendos juve-*

---

97) *Cura Wilelmi Goësii*, Amst. 1674, in 4., v. p. 313.

nes [98]), welche man als den Keim zu den so bekannten *Récréations mathématiques* [99]) betrachtet und welche der Abbé von St. Emeran dem berühmten Alcuin, dem Lehrer und Freund von Carl dem Grossen, zugeschrieben hat.

Diese beiden Regeln, welche beweisen, dass wir unsere Zeiten der Unwissenheit gehabt haben, wurden sie in Indien ergründet, wo Geometer, die in Wahrheit dieses Namens würdig waren, sie als falsch anerkannt haben? und der Satz des Brahmegupta, war er bestimmt, eine wirklich genaue und geometrische Regel dafür zu substituiren?

Es scheint, wenigstens nach ihrer Identität, dass diese Regeln der Abendländer und die, welche der indische Autor als falsch anführt, einen und denselben Ursprung gehabt haben. Denn mit einem Fehler verhält es sich anders, als mit einer Wahrheit. Eine Wahrheit in der Geometrie ist ein allgemeines Gesetz, sie ist nur eine einzige, sie gehört allen Zeiten und allen Verstandeskräften an, die sie zu begreifen vermögen, und ihr Vorhandensein an mehren Orten und bei mehren Völkern ist noch kein Beweis für Communicationen unter denselben. Was dagegen einen Fehler betrifft, so haben dessen Formen kein Gesetz, sie sind verschieden, in unendlicher Anzahl; und die Gleichförmigkeit in diesem Fall bezeichnet einen gemeinsamen Ursprung.

Dieser Umstand kann vielleicht einiges Interesse darbieten, als ein historisches Factum, welches wissenschaftliche Communicationen in entfernter Zeit anzeigt und die bedeutende Superiorität der damaligen Hindus über die abendländischen Zeitgenossen beweist.

---

98) *Venerabilis Bedae opera*, 4 Tom. in fol., Coloniae 1612, Tom. I, 104 et 109. *De campo quadrangulo.* In einem Viereck ist die Basis 34, die gegenüberliegende Seite 32, und die beiden Flanken 30 und 33 ist dann die Fläche desselben:

$$\left(\frac{34+32}{2}\right)\times\left(\frac{30+32}{2}\right)=31\times 33=1023.$$

De campo triangulo; wenn in einem Dreieck die Flanken 30 und die Basis 18 sind, so ist seine Fläche

$$\left(\frac{30+30}{2}\right)\times\frac{18}{2}=30\times 9=270.$$

Diese falschen Regeln sind noch in den *Quaestiones*, betitelt: *De civitate quadrangula*; *De civitate triangula*, angewandt.

99) Montucla: *Histoire des mathématiques*, T. I, p. 496.

Zweite Auslegung des Satzes.

Bei unsrer zweiten Art, den Satz zu interpretiren, ändern wir einige Worte im Text und sprechen ihn so aus:

1) *Im Trapez ist die Fläche gleich der halben Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten.*

2) *Für das Dreieck und Viereck schreibe man die halbe Summe der Seiten viermal hin, ziehe einzeln die Seiten davon ab, bilde das Produkt der Reste, dann ist die Quadratwurzel aus diesem Produkt die Fläche der Figur.*[100])

Es ist immer, wohl verstanden, die Rede von einem Trapez und von einem Viereck, welche einem Kreise eingeschrieben werden können.

Um diesen Ausspruch zu erhalten, ist es hinreichend, das Wort *ungenau* (*gross*) zu unterdrücken, *tetragon* durch *trapezium* zu ersetzen, und das Wort *triangle* in den zweiten Satz überzutragen, indem man *tetragon* hinzufügt. Dieser zweite Satz behält seine primitive Bedeutung, und der erste nimmt einen klaren Sinn an und wird ein sehr hübscher Satz, welcher vielleicht noch nicht bemerkt ist. Der Beweis desselben ist leicht; denn da die beiden Diagonalen sich unter rechtem Winkel schneiden, so ist es klar, dass die Fläche des Trapezes gleich der Hälfte des Produkts aus diesen beiden ist. Dieses Produkt aber ist nach dem Theorem des Ptolemäus über das eingeschriebene Viereck, dessen sich Brahmegupta in dem Satze des §. 28[101]) offenbar bedient hat, gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten. Die Hälfte dieser Summe ist also die Fläche des Trapezes.

Man hat bisher aus dem §. 21 nur den Theil citirt, welcher sich auf die Formel für die Fläche eines Dreiecks, als Function der drei Seiten, bezieht; und man hat keine Aufmerksamkeit auf die Formel für die Fläche eines Vierecks,

---

100) Folgendes könnte die Ausdrucksweise sein, welche dieser Auslegung entspricht, wobei nur geringe Veränderungen im engl. Texte nöthig sind: *Half the sum of the products of the sides and countersides is the area of a trapezium. In a triangle and tetragone half the sum of the sides set down four times, and severally lessened by the sides, being multiplied together, the square-root of the product is the area.*

101) Wir wollen nicht gerade sagen, dass Brahmegupta dieses Theorem aus dem Almagestus des Ptolemäus entlehnt habe, sondern nur, dass er es gekannt und sich desselben bedient habe, um zu dem Ausdruck für die Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks zu gelangen, welche er im §. 28 giebt.

das einem Kreise eingeschrieben ist, gewandt, welche in jeder Hinsicht den Vorzug vor der erstern verdient hätte, auch hat man nicht auf den Satz geachtet, welcher als *ungenau* die Regeln anführt, welche identisch mit denen sind, die von den Lateinern und später von uns im Mittelalter angewandt sind.

Die Formel für die Fläche des Dreiecks im Werke des Brahmegupta hat um so mehr Aufsehen erregt, da man im Allgemeinen gar nicht wusste, dass sie im Alterthum, besonders bei den Griechen, bekannt gewesen wäre. Montucla, der sie zuerst dem Tartalea zugeschrieben hatte, führt hernach ihren Ursprung bis auf den jüngeren Hero, einen Schriftsteller des 7ten Jahrhunderts, zurück. Auch Delambre, der in seinem *Discours* vor seiner *Histoire de l'astronomie au moyen âge* von dem Werke des Brahmegupta handelt, findet keinen andern Vorwurf, im Interesse der Griechen, gegen diese Formel des indischen Geometers zu machen, als dass *dieses sehr hübsche Theorem nur von sehr mässigem Nutzen in der Astronomie sei.* Wir müssen aber einräumen, dass dieses Theorem, welches in der Geschichte der Schule von Alexandrien unbeachtet geblieben ist, dort bekannt gewesen sei. Man findet es bewiesen in einem Werke über Geodäsie von dem älteren Hero (zwei Jahrhunderte vor der christlichen Zeitrechnung), betitelt *Dioptrica*, welches Venturi von Bologna, vor etwa 20 Jahren, unter dem Titel *il Traguardo* in seiner Geschichte der Optik [102]) übersetzt hat. Venturi hat dieses Theorem auch noch, obwohl ohne Beweis, in dem Fragment einer Geometrie von einem lateinischen Autor gefunden, der ihm älter als Boëthius zu sein scheint. Wir haben es auch in einem Manuscript aus dem 11ten Jahrhundert gesehen, welches die Bibliothek von Chartres besitzt. Es bildet einen Theil von einem Werk über die Ausmessung der Figuren, welches, wie wir glauben, dieselbe Schrift ist, die Venturi citirt, und welches wir dem Frontinus zuschreiben möchten. Die Priorität also, in sofern sie die Formel für die Fläche des Dreiecks betrifft, kann man nicht dem Brahmegupta zuerkennen. Aber dieser Geometer kann hierin nachstehen, ohne die Achtung zu verlieren, welche dadurch sein Werk erhalten hat, weil wir darin die viel wichtigere Formel für die Fläche des eingeschriebenen Vierecks, als Function seiner Seiten, finden, welche ihm unbestreitbar angehört, da wir sie in keinem frühern Werke finden.

---

102) *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica*, Bologna 1814, in 4., p. 77—147.

Diese schien bisher den Neuern anzugehören. Snellius spricht sie als sein Eigenthum aus, in seinem Commentar über den ersten Satz des Werks *De problematibus miscellaneis* von Ludolph van Ceulen.[103] Wir haben aber einigen Grund, zu glauben, dass sie schon früher gefunden war.[104] Der geometrische Beweis war nicht ohne Schwierigkeit, wie selbst Euler sagt, der dafür einen in den Petersburger Memoiren[105] gegeben hat, indem er die beiden, welche Philipp Naude vorher in den Berliner Memoiren[106] gegeben hatte, sehr verwirrt fand. Es findet sich dieser Satz in wenigen Werken, obgleich man sich im 16ten Jahrhundert und später vielfältig mit dem eingeschriebenen Viereck beschäftigt hat, wie wir noch späterhin sagen werden.

Die Formel für die Fläche des Dreiecks findet man durchgängig bei allen Völkern und zu allen Zeiten. Die Araber haben sie gekannt und von ihnen ist uns der erste Beweis derselben zugekommen, den wir in Europa gehabt haben. Man findet ihn in einem Werke über Geometrie von den drei Söhnen des Musa ben Schaker, aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt, unter dem Titel: *Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti, Hameti, Hasen.*[107] Die Formel ist auf geometrischem Wege bewiesen, der aber

---

103) Nachdem Snellius gesagt hat, dass man zuerst abgesondert die Flächen der beiden Triangel, aus denen das Viereck besteht, berechnet, fügt er hinzu: *Quanto operosior est haec vulgata ad investigandam aream via, tanto gratius novum hoc nostrum theoremation benevolo lectori futurum speramus.*

104) In einem Werke über das einem Kreise eingeschriebene Viereck, welches die Jahrzahl 1598 führt und von dem wir späterhin sprechen werden, sagt Prätorius, dass man schon den Durchmesser eines Kreises, der einem Viereck umgeschrieben ist, als Function der Seiten, so wie auch die *Fläche* des Vierecks gesucht habe.

105) *Novi commentarii*, T. I, 1747 und 1748. *Variae demonstrationes geometriae.* „Der analytische Beweis dieser Formel ist nicht schwer; aber diejenigen, welche einen geometrischen Beweis zu geben versuchten, haben bedeutende Schwierigkeiten gefunden." — Die *Nova Acta* von Petersburg, T. X, 1792, enthalten einen andern Beweis von Fuss.

106) *Miscellanea Berolinensia*, T. III, 1723.

107) Dieses Werk ist nur im Manuscript vorhanden. Die königliche Bibliothek zu Paris besitzt ein Exemplar, welches mit vielen andern, aus dem Arabischen übersetzten, interessanten wissenschaftlichen Pièces, unter dem Titel *Mathematica* vereinigt ist (*Supplément latin*, Nr. 49, in fol. S. *Histoire des sciences mathématiques en Italie* von Libri, T. I, p. 266). — Die Bibliothek von Basel besitzt auch ein Manuscript, unter dem Titel *Liber trium fratrum de Geometria.*

verschieden ist von dem des Hero von Alexandrien; was uns annehmen lässt, dass die Araber sie von den Indern empfangen haben, um so mehr, da die drei Söhne des Musa ben Schaker in ihrem Werke sagen, dass diese Formel von vielen Schriftstellern, ohne Beweis, angewandt werde, und da man ausserdem weiss, dass diese drei berühmten Geometer einen Theil ihrer mathematischen Kenntnisse aus indischen Werken geschöpft haben.[108]) Libri hat die in Rede stehende Formel in einem geometrischen Werke des Juden Savosarda bemerkt, welches um das 12te Jahrhundert geschrieben ist.[109]) Sie findet sich ferner in der *Praxis der Geometrie* des Leonhard von Pisa, wie sie nach der Art der drei arabischen Brüder bewiesen ist. Auch scheint es, dass man sie mit demselben Beweise in einer Schrift des Jordan Nemorarius, der einige Jahre nach Leonhard von Pisa lebte, gefunden hat. Beim Wiederaufleben der Wissenschaften erschien diese Formel beinahe in allen Werken über Geometrie. Reisch gab sie in der *Margarita philosophica*, 1486. Er hat sie, wie wir zu glauben Veranlassung haben, aus dem oben erwähnten lateinischen Schriftsteller entlehnt. Sodann findet man sie, mit dem Beweise des Leonhard von Pisa, in dem geometrischen Theil der *Summa Arithmetica, Geometria*, etc. von Lucas del Borgo (*Distinctio prima, capitulum octavum*, f. 12), und in dem dritten Theil des Werks *De numeris et mensuris* von Tartalea. Cardan hat sie ohne Beweis in seiner *Practica arithmetica* [110]), und Orontius Finäus in seiner Geometrie, Lib. II, Cap. 4. Ramus führt in seinen *Scholae mathematicae* den Beweis des Jordan und Tartalea an, indem er ihre Art, die Formel auszusprechen, tadelt und ihnen vorwirft, dass sie sagen, die Fläche des Dreiecks sei die Quadratwurzel aus einem Produkt von vier Linien; eine in der Geometrie der Griechen nicht gebräuchliche Redeweise, bei denen das Produkt von zwei oder drei Linien eine geometrische Bedeutung hat, aber nicht das Produkt von vier Linien. Snellius, der diese Kritik des Ramus reproducirt, hat in seinen Bemerkungen über die Werke des Ludolph van Ceulen [111]) die Regel in der Weise der Griechen ausgesprochen,

---

108) Casiri, *Bibliotheca Arabico-Hispana* Escurialensis, etc. *Mohammed ben Musa Indorum in praeclarissimis inventis ingenium et acumen ostendit* (T. I, p. 427). Man liest auch noch in dem Verzeichniss des Werks: *Librum artis logisticae a Khata Indo editum exornavit.* (*Mohammed ben Musa.*)

109) *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, p. 160.

110) Cap. 63. *De mensuris superficierum*, art. 4.

111) *De figurarum transmutatione et sectione*, Probl. 35, p. 73.

indem er sagt, dass die Fläche des Dreiecks gleich ist dem eines Rechtecks, dessen eine Seite die mittlere Proportionale zwischen zwei der vier Factoren, die in dem algebraischen Ausdruck enthalten sind, ist und dessen zweite Seite die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern Factoren ist. Millet Dechales stimmt auch in diesen streng geometrischen Stil der Griechen ein. [112])

Die Formel findet sich in unendlich vielen andern Werken, welche anzuführen unnütz sein dürfte. Beinahe alle bedienen sich des Beweises von Luca del Borgo, welcher der der Araber ist, den uns Fibonacci überliefert hat. Einige jedoch sind davon verschieden, wie die von Newton [113]), Euler [114]), Boscovich [115]). Diese verdanken den Grad der Einfachheit, der sie auszeichnet, der Kenntniss *a priori* von der Formel, für welche eine geometrische Bedeutung zu finden war. Die des Hero und der Araber haben das Verdienst, natürlich zu sein und den Stempel der Erfindung an sich zu tragen. Aber wahrscheinlich ist der algebraische Weg, der von dem Ausdruck des Perpendikels Gebrauch macht, derjenige, welcher ursprünglich die Entdeckung dieser Formel bewirkt hat; zumal bei den Indern; denn diese Art des Beweises ist vollkommen in dem Sinn ihrer mathematischen Speculationen, welche auf der Verbindung der Algebra mit der Geometrie beruhen.

Wir beschliessen unsre Betrachtungen über diese Formel mit einer Bemerkung über die drei Zahlen 13, 14, 15, welche die Inder in ihrer numerischen Anwendung dieser Formel gewählt haben. Diese Zahlen scheinen in sofern sehr merkwürdig zu sein, weil sie von dieser Formel untrennbar zu sein scheinen. Sie sind nicht allein die der Inder, während eines Zeitraums mehrer Jahrhunderte, sondern auch die des Hero von Alexandrien, des jüngern Hero [116]), der drei arabischen

112) *Cursus mathematicus*, 1690, in fol., T. I. *Trigonometriae liber tertius*, Prop. X.

113) *Arithmetica universalis*, T. I, Probl. XI.

114) *Novi Commentarii Petrop.*, T. I, 1747 et 1748.

115) *Opera*, etc., T. V, Opus 14.

116) S. seine *Geodaesie*, Manuscript in der königlichen Bibliothek, unter Nummer 2013. — Barocci hat von der Geodäsie des jüngern Hero und von seinem Buch über die Kriegsmaschinen eine Uebersetzung nebst Commentar gegeben, unter dem Titel: *Heronis mechanici liber de Machinis bellicis necnon liber de Geodaesia*, in 4., Venetiis 1572. Aber das Manuscript, dessen er sich bediente, war unvollständig, und die Formel für die Fläche des Dreiecks findet sich nicht darin.

Brüder, Mohammed, Hamet und Hasen, die des Leonhard von Pisa, des Jordan, Luca del Borgo, Georg Valla [117]), Tartalea, und beinahe aller Schriftsteller, welche diese Formel angeführt haben. Das abgerissene Stück der lateinischen Geometrie, welches wir erwähnt haben, und die *Margarita philosophica* sind vielleicht die einzigen, welche sich nicht derselben bedient haben, indem sie für die numerische Anwendung der Formel ein rechtwinkliges Dreieck nahmen; diese Werke wenden aber dieselben Zahlen an andern Stellen an, um die Fläche eines Dreiecks zu berechnen, indem sie den Werth des Perpendikels suchen. Für dieselbe Aufgabe findet man in der Algebra des Mohammed ben Musa (eines der oben erwähnten drei arabischen Brüder) ebenfalls diese drei Zahlen. [118])

Es ist in den Augen des Historikers ein sehr interessanter Umstand, dass sich der Gebrauch dieser Formel und besonders der drei Zahlen 13, 14 und 15 in den ältesten Werken und bei allen Völkern wiederfindet: bei den Griechen, beinahe im Anfang so wie beim Verfall der Alexandrinischen Schule; bei den Indern, den Lateinern, den Arabern; und bei dem Wiederaufleben der Wissenschaften, in allen Theilen Europa's, wo die Wissenschaften cultivirt wurden.

Der allgemeine Gebrauch dieser drei Zahlen scheint anzudeuten, dass sie einen gemeinschaftlichen Ursprung gehabt haben. Dieses war auch im Anfang unsre Meinung und wir sahen diese drei Zahlen als einen glücklichen Umstand an, der einiges Licht auf die Natur und die Ausdehnung der wissenschaftlichen Communication werfen könnte, welche in früher Zeit zwischen Indien und Griechenland stattgefunden habe. Aber wir erkannten sehr bald, dass diese Zahlen nicht die historische Hülfe leisten können, welche wir anfänglich von ihnen erwarteten. Man wird in der That zur numerischen Anwendung des Ausdrucks für die Fläche eines Dreiecks, sei es nun nach der in Rede stehenden Formel, sei es vermittelst Berechnung des Perpendikels, natürlich drei solche Zahlen gesucht haben, für welche diese Fläche und folglich auch das Perpendikel in rationalen Zahlen ausgedrückt werden.

Die Auflösung dieser Aufgabe bietet keine Schwierigkeit dar. Sie reducirt sich auf die Construction zweier rechtwink-

---

117) *Georgii Vallae Placentini viri Clariss. De expetendis et fugiendis rebus opus*, etc., 2 Vol. in fol., Venet. 1501, Lib. XIV, et *Geometriae* V; Cap. VII, *Dimensio universalis in omni triangulo.*

118) *The Algebra of Mohammed ben Musa, edited and translated by F. Rosen.* London 1831, in 8., p. 82 des englischen Textes und p. 61 des arabischen.

ligen Dreiecke in rationalen Zahlen, welche eine Seite gleich haben. Dieses hat Brahmegupta gethan, wie wir bei Gelegenheit des §. 34 gesagt haben. Und es ist zu bemerken, dass die Art, ein rechtwinkliges Dreieck in rationalen, ganzen Zahlen zu construiren, den Griechen und Lateinern bekannt war, welche dazu zwei Formeln anwandten, deren eine von Pythagoras, die andre von Archytas oder Plato ausgedacht waren.

Unter allen Systemen nun von zwei rechtwinkligen Dreiecken, welche in rationalen Zahlen ausgedrückt sind und eine gemeinschaftliche Seite haben, hat man das gewählt, in dem diese Zahlen die kleinsten sind; wodurch man als die Seiten des ersten Dreiecks 5, 12, 13 und des zweiten 9, 12, 15 erhielt.

Wenn man diese beiden Dreiecke so zusammensetzt, dass ihre beiden gleichen Seiten zusammenfallen und dass die andern Schenkel der rechten Winkel die gegenseitigen Verlängerungen von einander sind, so bildet man ein ungleichseitiges Dreieck, dessen Basis 14 und die beiden andern Seiten 13 und 15 sind. Auf diese Weise können die verschiedenen Geometer, jeder für sich, zu dem Dreieck geführt sein, dessen drei Seiten durch die Zahlen 13, 14 und 15 ausgedrückt sind. Jedoch müssen wir sagen, dass man aus den beiden rechwinkligen Dreiecken, deren wir uns zur Bildung dieses bedient haben, noch ein andres einfacheres bilden könne. Wenn man nämlich ihre beiden Seiten 9 und 5 auf einander legt, so entsteht ein Dreieck, dessen Basis 4 und dessen Seiten 13 und 15 sind, während die Höhe, wie bei den erstern, 12 ist. Aber dieses Dreieck ist stumpfwinklig, das Perpendikel trifft die Basis ausserhalb, und obwohl dieser Fall eben so oft als der eines spitzwinkligen Dreiecks vorkommt, so betrachtet man ihn doch im Allgemeinen als weniger geeignet zum Beispiel zu dienen. Daher hat man natürlich das Dreieck gewählt, dessen Seiten 13, 14 und 15 sind.

Diese Betrachtungen zeigen, dass man nicht daraus, dass die Inder dieselben Zahlen 13, 14 und 15 bei ihren Anwendungen der Formel für die Fläche des Dreiecks, als der ältere Hero gebrauchten, schliessen darf, sie hätten diese Formel von dem Alexandrinischen Geometer erhalten. Aber selbst hätten sie sie entlehnt, so würde dies den Rechten Brahmegupta's auf den Namen eines gewandten Geometers keinen Eintrag thun, weil sein Werk eine viel wichtigere Formel und schwierigere Aufgaben enthält, von denen wir bei den Griechen keine Spur finden.

Der §. 28 bei Brahmagupta giebt die Ausdrücke für die Diagonalen eines Vierecks, das einem Kreise eingeschrieben

ist, als Function der Seiten. Diese Formeln sind bekannt; sie lösen das Problem, in dem es sich darum handelt, *aus vier gegebenen Seiten ein Viereck zu construiren, das einem Kreise eingeschrieben werden kann*; so dass der indische Geometer die Lösung dieses Problems gekannt hat. Dieser Umstand ist nicht gleichgültig. Denn dieses, von den Neuern behandelte Problem, hat während einer Zeit einige Berühmtheit gehabt, und nicht alle sind darin glücklich gewesen.

Wir wollen eine kurze Notiz von den Geometern, die sich damit beschäftigt haben, in unsern Bemerkungen über den §. 38 geben, welcher eine Folge dieses ersten Problems ist.

Um diese Note nicht zu sehr auszudehnen, wollen wir die Bemerkungen, zu denen die §§. 23, 25, 29, 30—31 und 32 Anlass geben könnten, fortlassen. Wir wollen nur anführen, dass der zweite Theil des §. 30—31 einen sehr merkwürdigen Satz ausspricht. Brahmegupta zeigt, wie man das Perpendikel berechnet, welches von dem Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen eines Trapezes auf die Basis gefällt wird, und giebt (ohne das Mittel der Rechnung anzuführen) den Ausdruck für die Verländerung dieses Perpendikels bis zur obern Basis. Aus diesem Ausdruck schliessen wir unmittelbar, dass *dieses Perpendikel durch die Mitte der obern Basis geht.* Ein Satz, der leicht zu beweisen ist, der aber in dem Werke des Brahmegupta angeführt zu werden verdient. Er zeigt, dass die Rede von einem Viereck ist, welches den beiden Bedingungen genügt, dass es einem Viereck eingeschrieben werden kann und seine beiden Diagonalen einen rechten Winkel mit einander bilden.

Wir wollen die Aussprüche der vier Sätze anführen, welche in den §§. 35, 36, 37 und 38 enthalten sind und welche uns die Aufgabe zu lösen scheinen, ein Viereck zu construiren, das einem Kreise eingeschrieben werden kann und in dem alle Theile rational sind.

§. 35. *Die Seite wird willkührlich angenommen; ihr Quadrat wird durch irgend eine Quantität dividirt; von dem Quotienten zieht man diese Quantität ab; die Hälfte des Restes ist die Kathete des Oblongs; und wenn man diese Quantität hinzu addirt, so hat man die Diagonale.*

Es sei also a die Seite des Oblongs und b die willkührlich angenommene Quantität, so wird

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right) \text{ die Kathete, und}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right) + b = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right) \text{ die Diagonale sein.}$$

Man hat in der That:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2+a^2.$$

Nach dem, was wir schon von dieser Formel, auf die Construction des rechtwinkligen Dreiecks angewandt, gesagt haben, ist es kein Zweifel, dass es sich hier um die Construction eines Oblongs handelt, dessen Diagonalen, so wie die Seiten, in rationalen Zahlen ausgedrückt sind.

Die Fläche des Oblongs wird auch rational sein, eben so wie der Durchmesser des Kreises, der dem Oblong umgeschrieben ist, weil dieser Durchmesser gleich den Diagonalen ist.

§. 36. *Die Diagonalen eines Oblong's seien die Flanken eines Tetragons; das Quadrat der Seite des Oblongs werde durch eine willkührlich angenommene Quantität dividirt und der Quotient von dieser Quantität subtrahirt; dann wird die Hälfte des Restes, vermehrt um die Kathete des Oblongs, die Basis, und verringert um die Kathete, die Scheitellinie (coraustus) sein.*

Es seien a und b die Seite und die Kathete des Oblongs und c eine willkührlich angenommene Quantität. Die beiden Flanken des Tetragons werden gleich den Diagonalen des Oblongs, seine Basis wird $\frac{1}{2}\left(c-\frac{a^2}{c}\right)+b$, und seine Scheitellinie $\frac{1}{2}\left(c-\frac{a^2}{c}\right)-b$.

§. 37. *Die drei gleichen Seiten eines Vierecks, welches drei gleiche Seiten hat, haben zum Werth das Quadrat eines Oblongs. Die vierte Seite findet man, indem man das Quadrat der Kathete von dem dreifachen Quadrat der Seite des Oblongs abzieht.*

Wenn diese vierte Seite die grösste ist, so wird sie die Basis des Tetragons; wenn sie die kleinste ist, so wird sie die Scheitellinie.

Es sei a die Seite des Oblongs und b seine Kathete, dann wird a^2+b^2 das Quadrat seiner Diagonale sein. Wir setzen voraus, dass es nach der Regel des §. 35 gebildet ist, so dass seine Diagonale $\sqrt{a^2+b^2}$ eine rationale Zahl sein wird. Alsdann wird man (a^2+b^2) zum Werth der drei gleichen Seiten des Tetragons annehmen und $(3a^2-b^2)$ wird der Ausdruck für die vierte Seite.

§. 38. *Die Seiten und die Katheten zweier rechtwinkligen Dreiecke, reciprok mit den Hypotenusen mul-*

tiplicirt, sind die vier ungleichen Seiten eines Trapezes. Die grösste ist die Basis, die kleinste die Scheitellinie, und die beiden andern die Flanken.

Es seien a, b, c die Seite, die Kathete und die Hypotenuse des ersten Dreiecks, und a^1, b^1, c^1 die Seite, die Kathete und die Hypotenuse des zweiten Dreiecks [119]); dann werden die vier Seiten des Trapezes sein: ac^1, bc^1, a^1c, b^1c.

Die Ordnung, in welcher diese Seiten zu stellen sind, wird vom Verfasser so angegeben, dass die beiden ersten die beiden Bases und die beiden letztern die Flanken bedeuten.

Die in diesen vier Paragraphen enthaltenen Sätze sind offenbar unvollständig, weil jeder sich darauf reducirt, eine besondre Construction der vier Seiten eines Tetragons zu geben. Aber eines Theils reichen diese Seiten nicht zur Construction des Tetragons hin, ausgenommen im ersten Fall, wo es sich um ein Oblong handelt, und sodann, wenn das Tetragon construirt ist, so ist nichts von den Eigenschaften gesagt, welche es besitzt und welche den Gegenstand dieser Sätze ausmachen. Man muss daher glauben, dass die von Brahmegupta gegebene Construction der Seiten einer Aufgabe entspricht, die ursprünglich in dem Titel des Werks ausgesprochen war und welche in irgend einem der spätern Manuscripte verschwunden ist. Man müsste es wieder auffinden, welche diese Aufgabe gewesen ist; denn ohne diese dürfte man das Werk des Brahmegupta nicht verstehen können. Dem Scholiasten Chaturveda scheint in der Zahlenanwendung, die er von den vier Sätzen macht, ihre Bestimmung vollkommen unbekannt gewesen zu sein, so dass er uns nicht das geringste Licht über diesen Gegenstand giebt.

Da wir aber erkannt haben, dass in den meisten andern Sätzen, von denen wir schon gesprochen haben, von einem Viereck, das einem Kreise eingeschrieben ist, die Rede ist, so glaubten wir zuerst, dass dasselbe in diesen vier Sätzen der Fall wäre. Da aber hernach der erste dieser vier Sätze, algebraisch ausgedrückt, uns die Formel gab, welche zur Construction eines Rechtecks dient, dessen Seiten und Diagonalen rationale Zahlen sind, und da er ausserdem auf die beiden Sätze folgt, von denen es uns unzweifelhaft erschienen ist, dass sie zur Construction eines Dreiecks dienen, in welchem die Perpendikel und folglich auch die Fläche und der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises in rationalen

119) Wir werden weiterhin diese beiden Dreiecke mit dem Namen *erzeugende* Dreiecke bezeichnen.

Zahlen ausgedrückt werden, so wurden wir natürlich zu der Annahme geführt, dass es eine analoge Aufgabe war, welche Brahmegupta für das eingeschriebene Viereck aufgelöst hat.

In der That, indem wir mit den vier Seiten, deren Ausdruck durch jeden der vier Sätze gegeben ist, ein Viereck bildeten, das einem Kreise eingeschrieben werden kann, und indem wir auf diese Figur die verschiedenen Formeln anwandten, welche die andern Paragraphe des Werks zur Berechnung der Fläche des Vierecks, seiner Diagonalen, seiner Perpendikel, des Durchmessers des umgeschriebenen Kreises und der von den verschiedenen Linien auf einander gebildeten Segmente enthalten, so haben wir gefunden, dass alle diese Formeln rationale Ausdrücke geben. Und hieraus mussten wir folgern, dass dieses der Gegenstand der vier Sätze des Brahmegupta gewesen wäre.

Der Satz in §. 38 giebt zu mehren Bemerkungen Veranlassung.

Die vier Seiten des Vierecks haben zu ihren Ausdrücken ac^1, bc^1, a^1c und b^1c. Der Verfasser hat die Ordnung vorgeschrieben, in welcher sie stehen sollen: die beiden ersten sollen gegenüberliegende Seiten sein. Nach dieser Regel erkennt man leicht, dass sie aus der Multiplication der beiden Seiten eines und desselben Dreiecks durch die Hypotenuse des andern entstehen; und die beiden andern aus der Multiplication der beiden Seiten dieses durch die Hypotenuse des erstern. Denn die Summe der Quadrate der beiden Seiten ac^1, bc^1 ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten a^1c, b^1c; indem diese Summe $c^2c^{1^2}$ ist. Woraus folgt, dass, wenn ac^1 die grösste Seite ist, bc^1 die kleinste sein wird, folglich liegen die beiden Seiten ac^1 und bc^1, welche durch die Multiplication der Seiten eines Dreiecks durch die Hypotenuse des andern entstehen, bei der Construction des Vierecks einander gegenüber.

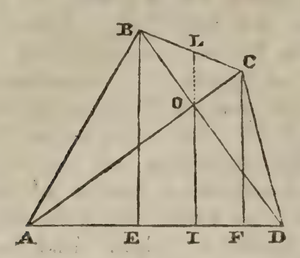
Wir schliessen hieraus, dass die Summe der Quadrate der beiden gegenüberliegenden Seiten gleich ist der Summe der Quadrate der beiden andern, und da das Viereck als ein solches angenommen ist, welches einem Kreise eingeschrieben werden kann, so folgt aus dieser Gleichheit der Summen der gegenüberliegenden Seiten, dass *die beiden Diagonalen des Vierecks sich unter rechtem Winkel schneiden.* Es ist also geometrisch nachgewiesen, dass im §. 38 das Wort *Trapez* ausschliesslich auf ein Viereck anzuwenden ist, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen.

Es sei *ABCD* das Trapez, so hat man:

$$AB = ac^1,\ BC = a^1c,\ CD = bc^1,\ AD = b^1c.$$

Die Formel §. 28 giebt für seine Diagonalen:

$$AC = ab^1 + ba^1,\ BD = aa^1 + bb^1.$$



Die Fläche des Trapezes kann man nach der Formel des §. 21 berechnen; einfacher aber ist es, wenn man bemerkt, da die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, dass diese Fläche dem halben Produkt dieser beiden Linien gleich ist. Der Ausdruck dafür ist also:

$$\frac{1}{2}(ab^1 + ba^1)(aa^1 + bb^1).$$

Der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist, nach dem zweiten Theil des §. 26, der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beiden gegenüberliegenden Seiten gleich, d. i.

$$\sqrt{a^2c^{1^2} + b^2c^{1^2}} = c^1 . \sqrt{a^2 + b^2} = cc^1.$$

Die Perpendikel *BE* und *CF*, die von den beiden Scheiteln *B* und *C* auf die Basis *AD* gefällt werden, nach der Regel des §. 22 aus den beiden Dreiecken *ABD*, *ACD* berechnet, so wie es Brahmegupta in §. 29 angiebt, werden:

$$BE = \frac{a}{c}(aa^1 + bb^1),\quad CF = \frac{b}{c}(ab^1 + ba^1).$$

Die Segmente, welche diese Perpendikel auf der Basis *AD* bilden, sind:

$$AE = \frac{a}{c}(ab^1 - ba^1),\quad DE = \frac{a}{c}(aa^1 + bb^1).$$

$$DF = \frac{b}{c}(bb^1 - aa^1),\quad AF = \frac{a}{b}(ab^1 + ba^1).$$

Die Segmente, welche auf den beiden Diagonalen durch ihren Durchschnittspunkt gebildet werden, berechnet nach der Regel §. 30—31, sind:

$$AO = ab^1,\ CO = a^1b,\ BO = aa^1,\ DO = bb^1.$$

Das Perpendikel OJ in dem Dreieck AOD, berechnet nach der Vorschrift des §. 30—31 (oder nach einem Satz, der aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke EBD und JOD folgt), ist $OJ = \frac{abb^1}{c}$; und seine Verlängerung OL, bis zur obern Basis, ist, nach der Vorschrift derselben Paragraphe, gleich der halben Summe der beiden Perpendikel BE und CF, weniger OJ, daher $OL = \frac{1}{2} a^1 c$.

Endlich haben wir nicht nöthig, die Ausdrühke für die Segmente zu geben, welche auf den Diagonalen und den Perpendikeln durch ihren gegenseitigen Durchschnitt gebildet werden, eben so wenig als für die auf den gegenüberliegenden Seiten, weil alle diese Segmente, in einem beliebigen Viereck, rational als Function der Seiten, der Diagonalen und der Perpendikel, ausgedrückt werden können.

Ebenso sind alle andern Theile der Figur rational.

Wir können also den §. 38 so ansehen, als habe er zum Gegenstand gehabt, ein Viereck mit vier ungleichen Seiten zu bilden, das einem Kreise eingeschrieben werden kann und in dem alle Ausdrücke, deren Berechnung Brahmegupta in seinen andern Sätzen gelehrt hat, rational sind.

Diese Ausdrücke sind in dem indischen Werke nicht berechnet; worüber man sich aber nicht wundern darf, da Brahmegupta sich immer auf den einfachen und möglichst gedrängten Ausspruch seiner Sätze beschränkt, ohne irgend einen Beweis oder eine Verification *a posteriori* zu geben.

Wir fügen diese Bemerkung hinzu, weil Bhascara, indem er einen neuen Satz bildet, den er sich zuschreibt, die Ausdrücke für die Diagonalen AC, BD giebt, und die Schriftsteller, die ihm vorhergingen, besonders Brahmegupta tadelt, dass sie diese Regel ausgelassen hätten, die, wie er sagt, viel kürzer wäre, als die Formel des §. 28, welche sie gegeben hätten.

Die nach dem Ausspruch des Satzes §. 38 angegebenen Werthe für die Seiten des Vierecks und die, welche wir für die Segmente OA, OB, OC, OD gefunden haben, zeigen, dass die Seiten jeder der vier Dreiecke AOB, BOC, COD, DOA, welche bei O rechtwinklig sind und aus denen das Viereck zusammengesetzt ist, respective aus der Multiplication der drei Seiten jedes *erzeugenden* Dreiecks durch eine Seite des andern Dreiecks entstehen. So sind die drei Seiten des Dreiecks AOB, ac^1, ab^1, aa^1; sie entstehen aus der Multiplication der drei Seiten c^1, b^1, a^1 des zweiten durch die Seite a des ersten.

Man kann also nicht allein die vier Seiten des Vierecks vermittelst der beiden erzeugenden Dreiecke bestimmen, sondern auch dadurch die Construction des Vierecks bewirken. Denn es genügt, gemäss dem Gesagten, die vier rechtwinkligen Dreiecke *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* zu bilden und diese zusammenzusetzen. Dieses ist auch das, was die Scholiasten, besonders Ganesa, in ihren Noten zu dem Werke des Bhascara unter der Construction des Vierecks verstanden haben. Auf diese Weise haben sie der Bedingung genügt, dass das Viereck einem Kreise eingeschrieben werden könne, was wir dem Brahmegupta als Absicht untergelegt haben. Hiernach sehen wir auch, wie Chaturveda die numerischen Anwendungen der Regeln des Brahmegupta hat machen können, während er diese Bedingung der Inscriptibilität nicht kannte.

Aus den vier Seiten eines Vierecks, das einem Kreise eingeschrieben ist, kann man noch zwei andre Vierecke bilden, die demselben Kreise eingeschrieben sind. Wenn α, β, γ, δ in dieser Ordnung die vier Seiten eines Vierecks sind, so kann man sie auch in die Ordnung α, β, δ, γ oder in α, γ, β, δ setzen. Von diesen drei Vierecken haben je zwei eine gemeinschaftliche Diagonale, so dass ihre sechs Diagonalen nur drei unter einander verschiedene sind; die drei andern sind respective den drei ersten gleich.[120])

Wenn man diese Bemerkung auf die Figur des Brahmegupta anwendet, so werden die beiden neuen Vierecke nicht mehr *Trapeze* sein, d. h. ihre Diagonalen werden nicht mehr senkrecht auf einander stehen. Aber diese Linien werden noch rational sein, so wie alle andern Theile des Vierecks, welche wir für das Trapez berechnet haben. Es genügen also diese beiden neuen Vierecke der allgemeinen Aufgabe, von der wir angenommen haben, dass der indische Autor sie sich vorgesetzt habe. Er kann auch vielleicht diese beiden Vierecke in seiner Auflösung mitbegriffen haben.

Dass diese beiden neuen Vierecke vorhanden sind, war dem Bhascara bekannt, denn er gab den Ausdruck für die dritte Diagonale; er hat aber nicht erkannt, welches der

---

120) Diese drei Vierecke haben dieselbe Fläche. Ihre drei verschiedenen Diagonalen ~~haben mit der Fläche~~ und dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises eine Relation, welche darin besteht, dass *das Produkt der drei Diagonalen, dividirt durch den doppelten Durchmesser des umgeschriebenen Kreises, gleich der Fläche des ~~einen der~~ Vierecke ist.*

Dieser Satz scheint dem Albert Girard anzugehören, welcher ihn in seiner *Trigonometrie* ausgesprochen hat. Wir finden nicht, dass er seitdem irgendwo wieder angeführt wäre.

Zweck in dem Satze des Brahmegupta war, weder in Bezug darauf, dass die Figur einem Kreise eingeschrieben werden könne, noch in Bezug auf die Rationalität der verschiedenen Theile der Figur.

Diese dritte Diagonale ist gleich cc^1. Sie ist gleich dem Durchmesser des um das Viereck beschriebenen Kreises; woraus man sieht, dass das Viereck zwei rechte Winkel hat, die einander gegenüber liegen. Diese besondre Form des Vierecks, welche bemerkt zu werden verdient, ist nicht von Bhascara angegeben. [121])

Wir nehmen die Ausdrücke für das Perpendikel *CF* und für das Segment *FD* wieder auf. Man hat:

$$CF = \frac{b}{c}(ab^1 + ba^1), \quad FD = \frac{b}{c}(bb^1 - aa^1).$$

Die beiden Linien *CF*, *FD* sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $CD = bc^1$ ist. Diese Ausdrücke enthalten nicht ausdrücklich die Quantität c^1, ausser vermittelst der Seite *CD*, sondern nur die Quantitäten a^1, b^1, deren Quadratsumme gleich dem Quadrat von c^1 ist, oder $CO = a^1b$ und $DO = b^1b$, deren Quadratsumme gleich dem Quadrat von *CD* ist. Diese Ausdrücke würden also noch rational sein, selbst wenn c^1 oder die Seite *CD* es nicht wären. Folglich geben die Seiten *CF*, *FD* eine geometrische Lösung dieses Problems: *Eine gegebene Zahl (Quadrat oder nicht) in zwei Quadratzahlen zu zerlegen, wenn man ein erste Lösung dieser Aufgabe kennt.*

---

121) Diese Eigenschaft des Vierecks, dass es zwei rechte Winkel enthält, zeigt, dass die Aufgabe, ein Viereck zu construiren, das einem Kreise eingeschrieben werden könne und dessen Seiten, Fläche, Diagonalen, Perpendikel, so wie auch der Durchmesser des Kreises in rationalen Zahlen ausgedrückt werden, einer sehr einfachen Auflösung fähig ist, welche darin besteht, zum Durchmesser des Kreises irgend eine rationale Zahl anzunehmen und das Quadrat dieser Zahl auf zwei verschiedene Arten in zwei andre Quadrate zu zerlegen. Die Wurzeln dieser Quadratzahlen werden die Seiten des Vierecks. Man bildet auf diese Weise dieselben Vierecke, welche man nach der Methode des Brahmegupta erhält.

Es ist leicht zu sehen, dass man auch auf folgende Weise verfahren kann: Man nimmt irgend ein ungleichseitiges Dreieck *ABC* von der Art, dass seine Seiten und seine Perpendikel rationale Zahlen sind; in seinen beiden Scheiteln *B* und *C* errichtet man Perpendikel respective auf *AB* und *AC*. Diese Linien werden sich in einem Punkt *D* schneiden und das Viereck *ABDC* wird der Aufgabe genügen. Indem man die Ordnung der Seiten vertauscht, bildet man das *Trapez* des Brahmegupta.

Wir wollen c^{12} durch A ersetzen; dann kann man diese Aufgabe und ihre Lösung algebraisch so ausdrücken:

Um die Aufgabe $x^2 + y^2 = A$ in rationalen Zahlen aufzulösen, wenn man ein erstes System von Wurzeln dieser Gleichung x^1, y^1 kennt, wird man willkührlich drei Quadratzahlen a, b, c so annehmen, dass $a^2 + b^2 = c^2$ ist; dann werden die gesuchten Wurzeln sein:

$$x = \frac{ay^1 + bx^1}{c}, \quad y = \frac{by^1 - ax^1}{c}.$$

Diese Formeln, zu welchen die geometrische Aufgabe des Brahmegupta ganz einfach führt, enthalten wesentlich die allgemeinen Formeln für die Auflösung der Gleichung $Cx^2 \pm A = y^2$ [122]), welche man zum grössten Erstaunen der euro-

---

122) In der That, in der aufzulösenden Gleichung $x^2 + y^2 = A$ und in den beiden Bedingungsgleichungen $x^{1^2} + y^{1^2} = A$ und $a^2 + b^2 = c^2$ ersetze man x durch $x\sqrt{C}$, x^1 durch $x^1\sqrt{C}$, a durch $a\sqrt{C}$, so werden sie:

$$Cx^2 + y^2 = A$$
$$Cx^{1^2} + y^{1^2} = A$$
$$Ca^2 + b^2 = c^2;$$

die Ausdrücke der Wurzeln x und y werden durch diese Substitutionen diese:

$$x = \frac{ay^1 + bx^1}{c}$$
$$y = \frac{Cax^1 - by^1}{c},$$

welches die Wurzeln der Gleichung $Cx^2 + y^2 = A$ sind.

Nun bemerken wir, dass diese Wurzeln dieser Gleichung genügen, welche auch die Werthe der beiden Zahlen C und A sein mögen, die also auch negativ angenommen werden können. Die Gleichung kann also die Form annehmen:

$$Cx^2 \pm A = y^2;$$

die Wurzeln werden:

$$(1) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{ay^1 + bx^1}{c} \\ y = \dfrac{Cax^1 + by^1}{c}. \end{array} \right.$$

Wir wollen dem y das positive Zeichen geben; denn da diese Variable nur zum Quadrat erhoben in die Gleichung eingeht, so ist das Zeichen ohne Einfluss.

päischen Geometer in der Algebra dieses indischen Autors gefunden hat und welche, im letzten Jahrhundert, dem grossen Euler zur besondern Ehre angerechnet wurde, der unter den Neuern zuerst auf sie gekommen war.

Die Inder gebrauchten bei ihren mathematischen Speculationen untermischt Algebra und Geometrie: die Algebra wandten sie zur Abkürzung und Erleichterung des Beweises ihrer geometrischen Sätze an, und die Geometrie zum Beweis ihrer Regeln der Algebra und zur Versinnlichung der Resultate der Algebra durch Figuren. Wir finden Beispiele von dieser Operationsart an mehren Stellen bei Bhascara und in den Werken der Araber, welche diese Verschmelzung der Algebra mit der Geometrie von den Indern angenommen haben. Es erscheint also als möglich, dass die Inder zu ihrer Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades durch geometrische Betrachtungen, die sie aus dem Satze des §. 38 schöpften, gelangt sind, und dass auch hierin der ursprüngliche Grund liegt, weshalb ein Stück der Geometrie in die Behandlung der Arithmetik und Algebra von Brahmegupta eingeschaltet ist. Zur Unterstützung dieser Conjectur kommt, dass es scheint, die Araber hätten sich auch mit den unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades beschäftigt und sie durch geometrische Betrachtungen aufgelöst, worin sie wahrscheinlich die Nachahmer der Inder waren. Dieses scheint aus einer Stelle bei Luca del Borgo hervorzugehen, welcher in seiner *Summa de Arithmetica*, *Geometria* etc. (*distinctio prima*, *tractatus quartus*) von einem Werk von Leonhard von Pisa über die Quadratzahlen spricht, worin sich die Gleichung $x^2+y^2=A$ durch geometrische Betrachtungen und Figuren aufgelöst findet. Die Formeln des Leonhard von

---

Die Bedingungsgleichungen zwischen x^1 und y^1 einer Seits und a, b, c andrer Seits sind:

$$Cx^{1^2} \pm A = y^{1^2}$$
$$Ca^2 + c^2 = b^2;$$

d. h. x^1 und y^1 sind ein System von Wurzeln der vorgegebenen Gleichung und $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ sind ein System von Wurzeln der Gleichung $Cx^2+1=y^2$.

Die Formeln (1) sind genau dieselben, welche man in der Algebra des Brahmegupta findet (Sectio VII, p. 364 und Art. 68 in der Uebersetzung des Colebrooke.)

Diese allgemeinen Formeln können sich auf diese Weise leicht aus der einfachen Aufgabe der Geometrie ableiten, welche von dem indischen Geometer behandelt ist.

Pisa, welche Luca del Borgo anführt [123]), sind dieselben als die, welche wir aus der geometrischen Aufgabe des Brahmegupta abgeleitet haben. Aber Leonhard von Pisa bezog seine mathematischen Kenntnisse aus Arabien; wir müssen also seine Formeln für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades den Arabern zuschreiben und annehmen, dass diese sie von den Indern erhalten hatten.

Nachdem wir uns unsre Ansicht über die Aufgaben, welche in den §§. 21 bis 38 im Werke des Brahmegupta gebildet hatten, waren wir bemüht zu erfahren, ob unter den Neuern und zu welcher Zeit dieselben Aufgaben behandelt wurden und ob man eine Art von Vergleichung zwischen den Arbeiten der indischen Geometer und den der europäischen aufstellen könne.

Das, was wir in dieser Hinsicht gefunden haben, ist Folgendes:

Jo. Bapt. Benedictus hat die Aufgabe gelöst, *aus vier gegebenen Seiten ein Viereck zu construiren, das einem Kreise eingeschrieben werden kann* (s. *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*, Taurini 1585, in fol.) Dieses Problem war ihm von dem Prinzen Carl Emanuel von Savoyen gegeben worden.

Im Jahr 1594 gab der berühmte Joseph Scaliger in seinen *Cyclometrica elementa duo* (Leyden, in fol.) eine ungenaue Lösung. Es seien a, b, c, d die vier gegebenen Seiten, so würde man aus dieser Lösung schliessen, dass der Durchmesser des Kreises, in welchem das aus diesen vier Seiten gebildete Viereck eingeschrieben ist, zu seinem Ausdruck $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$ hätte. Hieraus würde folgen,

---

123) Cardan sagt auch, dass er dieselben Formeln von Leonhard von Pisa entlehnt habe, welcher sie ohne Beweis in seiner *Practica Arithmetica* (Cap. 66, Quaest. 44) gegeben hat. Vieta ist der erste, welcher sie im IVten Buch seiner *Ζητητικά* bewiesen hat. Sein Beweis ist analytisch. Bald darauf hat sich auch Alexander Anderson mit dieser Aufgabe aus der unbestimmten Analysis beschäftigt und durch geometrische Betrachtungen die Formeln des Diophantus bewiesen, welche von denen des Leonhard von Pisa verschieden sind (*Exercitationum mathematicarum*, Decas prima, Paris 1619, in 4.).

In den historischen Notizen über die unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades, setzt man den Ursprung der Arbeiten der neuern Geometer nicht früher als Fermat. Man müsste aber vor Fermat noch Leonhard von Pisa, Luca del Borgo, Cardan und Vieta nennen, da sie sich derselben Formeln bedienen, auf welchen die allgemeine Auflösung von Fermat beruht oder aus denen sie sich ableiten lässt.

dass dieses Problem noch zwei andre Lösungen zuliesse, für welche die Durchmesser $\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}$ und $\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}$ wären. Auf diese Weise würde Scaliger, in der That, nur mit Hülfe der geraden Linie und des Kreises eine Aufgabe gelöst haben, welche in der Analysis von einer Gleichung des dritten Grades abhängt. Wenn er aber auch diese Bemerkung gemacht hätte, so würde sie ihn doch nicht gehindert haben; denn man weiss, dass er, da sein bedeutender literarischer Ruf ihn um den ersten Rang unter den Mathematikern geizen liess, nicht allein das Problem über die Quadratur des Zirkels, welches der Gegenstand seiner *Cyclometrica elementa* war, gelöst haben wollte, sondern auch das, in den Kreis jedes regelmässige Polygon von ungerader Seitenzahl einzuschreiben. 124)

Dieses Werk wurde sogleich nach seinem Erscheinen widerlegt von Errard de Bar le-Duc, königlichem Ingenieur 125), darauf von Vieta 126), Adrianus Romanus 127) und Clavius. 128)

Vieta löst die Aufgabe in Bezug aufs Viereck und weist die Fehlschlüsse nach, welche Scaliger verleitet haben. Seine Lösung erschien 1596 in seinem *Pseudo-Mesolabum.*

Wir finden noch Prätorius, welcher dieser Aufgabe ein Werk gewidmet hat, unter dem Titel: *Problema, quod jubet ex quatuor lineis rectis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicutum, a Johanne Praetorio Joachimico.* Norinbergae 1598, in 4. (36 Seiten).

Dieses Werk ist in mehren Hinsichten von Werth: zuerst wegen einiger Andeutungen, die es über die Geschichte des

---

124) *Elementum prius*, Prop. XV.

125) *Réfutation de quelques propositions du livre de M. De l'Escale, de la quadrature du cercle, par lui intitulé: Cyclometrica elementa duo.* Brief an den König, Paris, Septbr. 1594.

Wenige Worte genügen Errard, um die Falschheit der Sätze 5 und 6 von Scaliger nachzuweisen, welche aussagen: 1) *Der Umfang des Zwölfecks, das einem Kreise eingeschrieben ist, ist grösser als der Umfang des Kreises;* 2) *das Quadrat des Umfangs des Kreises ist das Zehnfache vom Quadrat des Durchmessers.*

126) Diese Widerlegung ist der Gegenstand des *Pseudo-Mesolabum et alia quaedam adjuncta capitula*, 1596.

127) *Apologia pro Archimede, ad clariss. virum Josephum Scaligerum. Exercitationes cyclicae contra J. Scaligerum, Orontium Finaeum, et Raymarum Ursum, in decem dialogos distinctae.* Wurceburgi 1597.

128) S. *Geometriam practicam.*

Problems enthält, und sodann, weil es uns, indem es dieselbe Aufgabe als Brahmegupta löst, die sich auf die Bedingungen der Rationalität einzelner Theile der Figur bezieht, einen Vergleichungspunkt zwischen den Indern und uns darbietet, bei einer Aufgabe, die eigenthümlich und original bei dem indischen Autor, so wie bei dem europäischen ist.

Prätorius berichtet uns, dass dieses Problem vor Alters behandelt sei und dass man den Durchmesser des Kreises, der dem Viereck umgeschrieben ist, und die Fläche dieser Figur, gesucht; dass darauf auch Regiomontanus diese Aufgaben vorgelegt habe; sodann dass Simon Jacob die Diagonalen des Vierecks und den Durchmesser des Kreises berechnet habe. Endlich führt er die Lösung des Vieta an und fügt hinzu, dass noch neuere Lösungen gegeben wären, welche er aber nicht kenne.

Nach diesem historischen Eingange löst Prätorius das Problem, indem er die Ausdrücke für die Diagonalen sucht, und zeigt, wie man den Durchmesser berechnen würde. Sodann setzt er sich vor, vier Zahlen zu bestimmen, welche als Seiten des Vierecks angenommen, für die Diagonalen so wie für den Durchmesser des Kreises rationale Werthe geben. Er löst diese Aufgaben auf verschiedene Arten. Bei der einen findet er als Seiten des Vierecks dieselben vier Zahlen 60, 52, 25 und 39, welche Brahmegupta anwendet. Er stellt sie aber nicht in dieselbe Ordnung und bildet daher ein Viereck, das von dem des indischen Geometers verschieden ist. 129) In dem folgenden Beispiel bemerkt er, dass zwei Seiten ihre Stelle vertauschen können, und bildet mit andern Zahlen, nämlich mit 52, 56, 39 und 33, ein andres ein-

129) Prätorius nimmt irgend ein Dreieck ABC, dessen Seiten rational und so beschaffen sind, dass das Perpendikel auch rational ist. Er construirt es mit Hülfe zweier rechtwinkligen Dreiecke, wie wir es bei Gelegenheit des §. 34 von Brahmegupta gesagt haben. Zwei Seiten dieses Dreiecks AB, AC werden als zwei auf einander folgende Seiten des gesuchten Vierecks angenommen und die dritte BC als die darunter liegende Diagonale. Es bleibt noch übrig, die beiden andern Seiten des Vierecks zu construiren, deren Längen Prätorius dadurch bestimmt, dass er irgend welche Linien zieht und zwei Proportionen bildet.

Diese Auflösung kann ausserordentlich abgekürzt werden; denn wir haben erkannt, dass es hinreichend ist, wenn man durch die beiden Punkte B und C zwei Senkrechte auf den Seiten AB und AC errichtet. Diese Geraden sind dann die beiden gesuchten Seiten.

Diese Construction zeigt, dass das Viereck des Prätorius zwei rechte Winkel hat und dass die zweite Diagonale desselbsn der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist; was dieser Geometer vielleicht nicht bemerkt hat.

schreibbares Viereck. Wir haben erkannt, dass in diesem Viereck die Diagonalen senkrecht auf einander stehen, wie in dem des Brahmegupta, was Prätorius nicht beachtet hat. Dieser Geometer hat ebenso wenig angemerkt, dass die verschiedenen Theile des Vierecks, welche Brahmegupta berechnet hat, ebenfalls in rationalen Zahlen ausgedrückt werden, gleich wie die Diagonalen und der Durchmesser des Kreises. Man kann daher sagen, dass Brahmegupta diese Aufgabe gründlicher und vollständiger gelöst habe, als die Neuern.

In seiner letzten Lösung nimmt Prätorius zu den auf einander folgenden Seiten des Vierecks die Zahlen 33, 25, 16 und 60 an und sagt, „diese sind dieselben Zahlen, welche Simon Jacob gegeben hat, ohne den Weg anzudeuten, auf welchem er zu dieser Lösung geführt ist." Dieses lässt uns annehmen, dass Simon Jacob ausser der Aufgabe, aus vier gegebenen Seiten ein Viereck zu construiren, das einem Kreise eingeschrieben werden könne, auch die gelöst habe, in rationalen Zahlen vier Seiten zu finden, für welche die Diagonalen des Vierecks und der Durchmesser des Kreises rational werden.[130])

Wir kennen nur das Werk von Prätorius, in welchem seit Simon Jacob diese zweite Aufgabe behandelt ist, während die Aufgabe, aus vier gegebenen Seiten ein einschreibbares Viereck zu construiren, noch fortfuhr, einige Geometer zu beschäftigen. Ludolph van Ceulen hat sie in seinen *Pro-*

---

130) Simon Jacob wird von keinem mathematischen Historiker citirt und scheint heut zu Tage vollkommen unbekannt zu sein; jedoch finden wir im ersten Theil der *mathematischen Bibliothek* von Murhard, dass er der Verfasser von zwei deutschen Werken war, welche vielfach aufgelegt sind. Das erste, unter dem Titel: *Rechnung auf der Linie*, Frankfurt, in 8., erschien 1557 und wurde wieder gedruckt 1589, 1590, 1599, 1607, 1608, 1610 und 1613. Das zweite: *Ein neu und wohlgegründet Rechenbuch auf der Linie und Ziffern, samt der Welschen Practic*, etc., in 4., erschien 1560, wurde neu aufgelegt 1565, 1600 und 1612.

Wir finden auch noch in der *mathematischen Bibliothek* von Murhard, dass Simon Jacob, Professor der Mathematik zu Frankfurt a. M., ein Werk von Peter Apian (1500—1552) über kaufmännische Rechnungen, im Jahr 1564 wieder durchgesehen und herausgegeben habe.

Schooten citirt Simon Jacob an zwei Stellen seiner *Sectiones miscellaneae* und nennt ihn *celebris arithmeticus* (s. *Exercitationes mathematicae*, p 404 u. 410). Man sieht daraus, dass dieser Geometer mehre solche Progressionen ausgedacht hatte, dass jedes ihrer Glieder durch einen Bruch ausgedrückt wurde, dessen Zähler und Nenner die Katheten eines rechtswinkligen Dreiecks waren, in welchem die Hypotenuse rational ist.

blemata miscellanea aufgelöst, so wie Snellius in den Anmerkungen, mit denen er seine Uebersetzung dieses Werks von Ludolph aus dem Holländischen ins Lateinische bereicherte. Obgleich Snellius darin das Werk des Prätorius citirt, so erwähnt er doch nicht der neuen Aufgaben, welche dieser aufgelöst hatte.

Endlich führen wir noch J. de Billy (1602—1679) an, einen Geometer von grossem Verdienst, der sich aber bei der Construction eines einschreibbaren Vierecks aus vier Seiten geirrt hat, indem er glaubte, dass das Problem unbestimmt wäre und dass man noch eine Bedingung mehr annehmen könne, so wie etwa eine Relation zwischen den beiden Diagonalen. Er glaubte dasselbe zu lösen, wenn er das Verhältniss der Diagonalen, oder ihre Summe, oder endlich ihre Differenz als gegeben annahm. [131])

Wir haben bei dem §. 21 die Geometer genannt, welche sich besonders mit der eleganten Formel für die Fläche des Vierecks beschäftigt haben.

Die Theorie des eingeschriebenen Vierecks bietet gegenwärtig keine Schwierigkeit dar, sie ist in die Elementarwerke übergegangen, wo man das Theorem des Ptolemäus über das Produkt der beiden Diagonalen und noch ein zweites Theorem über das Verhältniss dieser Linien giebt, und aus diesen beiden Sätzen die Werthe der Diagonalen ableitet. Legendre hat diese Theorie vervollständigt, indem er in den Noten zu seinen *Elémens de Géométrie* den analytischen Beweis der Formeln für die Fläche des Vierecks und für den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises gab. Aber ich weiss nicht, dass man seit Prätorius die Aufgabe gelöst hat, ein einschreibbares Viereck zu construiren, dessen Theile rational

---

131) *Diophantus geometra, sive opus contextum ex arithmetica et geometria simul* etc. Paris 1660, in 4., p. 188 et 189.

Jac. de Billy, welchen Heilbronner und Montucla kaum citiren, war ein sehr gelehrter Algebraist, geschätzt von den berühmtesten Mathematikern seiner Zeit, besonders von Fermat und Bachet de Meziriac. Man findet in den *Mémoires de Nicéron*, t. 40, das Verzeichniss der zahlreichen Werke, welche er herausgegeben hat, und derer, in noch grösserer Zahl, welche Manuscript geblieben sind; diese letztern machten einen Theil der Jesuiten-Bibliothek zu Dijon aus; es scheint aber, dass sie nicht in die der Stadt übergegangen sind, da wir Nichts davon in den Katalogen von Hänel finden.

Wenn sie noch vorhanden sind, so wäre es wohl sehr zu wünschen, dass man wenigstens eine Analyse oder ein Verzeichniss der in diesen Manuscripten behandelten Materien bekannt machte. Die Zahl der Manuscripte war 20.

werden; auch nicht, dass man seine Aufmerksamkeit auf das Werk dieses Geometers gelenkt hätte. Das Erscheinen dieser Aufgabe in dem Werke des Brahmegupta scheint dem des Prätorius ein neues Verdienst zu verleihen.[132])

Wir wollen hier unsre Bemerkungen über die 18 ersten Paragraphe des geometrischen Theils von Brahmegupta beschliessen. Die andern Paragraphe bieten wenig Interesse dar. Wir wollen nur das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser bemerken, welches nach dem §. 40 gleich $\sqrt{10}$ ist. Nach dem englischen Text[133]) scheint es, dass Brahmegupta diesen Ausdruck als das *genaue* Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser betrachtet habe. Chaturveda, in seinen Noten, scheint es auch zu glauben. Dieses wundert uns nicht von diesem Scholiasten; aber es ist schwer zu glauben, dass ein Geometer, der fähig war, über die Theorie des Vierecks zu schreiben, das einem Kreise eingeschrieben ist, und die Aufgaben zu lösen, welche wir in dem Werke des Brahmegupta finden, dass ein solcher Geometer, sag' ich, diesen Fehler begangen habe. Freilich ist es wahr, dass die Quadratur des Kreises auch für sehr viele neuere Geometer eine Klippe gewesen ist, durch die sie zu ähnlichen Fehlern verlockt sind, obgleich mehre unter ihnen Beweise von reellen und gründlichen Kenntnissen der Mathematik gegeben haben. Es genügt Orontius Finaeus und Gregoire von St. Vincent zu nennen.

---

132) J. Prätorius (1557—1616) wird im Allgemeinen nur als Erfinder eines geodätischen Instruments, *planchette* (*Messtisch*) genannt, citirt, welches lange Zeit hindurch den Namen der *Tabula Praetoriana* führte; aber er war ein sehr gewandter und in seiner Zeit sehr geachteter Geometer. Indem Snellius sein Werk über das Viereck anführt, drückt er sich so aus: *Clarissimus J. Praetorius harum artium scientia nulli secundus, de quatuor lineis in circulo integrum librum publicavit, in quo multis modis ingeniose sane et acute hoc idem problema effici posse demonstravit.*

Der berühmte Professor der Mathematik Doppelmaier hat ihm eine Notiz in seiner *Nachricht von den Nürnberger Mathematicis und Künstlern* (1730, in fol.) gewidmet, woraus man sieht, dass Prätorius wenige Werke hat drucken lassen, dass aber mehre seiner Manuscripte zu Altorf aufbewahrt werden, wo er 40 Jahre hindurch in der grössten Achtung gelebt hat.

Man findet einen Auszug dieser Notiz in dem Werke über praktische Geodäsie von J. J. Marinoni, betitelt: *De re ichnographica, cujus hodierna praxis exponitur* etc. Viennae Austriae 1751, in 4.

133) *The diameter and the square of the semidiameter, being severally multiplied by three, are the practical circumference and area. The square-roots extracted from ten times the squares of the same are the neat values.*

Der Ausdruck $\sqrt{10}$ ist genau das Verhältniss, von dem J. Scaliger sagt, dass er es zuerst gefunden habe und das er geometrisch bewiesen zu haben glaubte; man kannte aber seit langer Zeit in Europa diesen Ausdruck und wusste von ihm, dass er nur ein Näherungswerth sei. Man schrieb ihn den Arabern oder den Indern zu und nahm an, dass diese Völker ihn als den genauen Werth betrachtet hätten.

In der That, Purbach (1425—1461) in seinem Werke, *Tractatus Georgii Peurbachii super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis*, drückt sich so aus: *Indi vero dicunt, si quis sciret radices numerorum recta radice carentium invenire, ille faciliter inveniret, quanta esset diameter respectu circumferentiae. Et secundum eos, si diameter fuerit unitas, erit circumferentia radix de decem: si duo, erit radix de quadraginta: si tria, erit radix de nonaginta: et sic de aliis*, etc. Regiomontanus (1436—1476) dagegen schreibt das Verhältniss $\sqrt{10}$ den Arabern zu. Seine Worte sind: *Arabes olim circulum quadrare polliciti ubi circumferentiae suae aequalem rectam descripsissent, hanc pronuntiavere sententiam: si circuli diameter fuerit ut unum, circumferentia ejus erit ut radix de decem. Quae sententia cum sit erronea ....* Buteon (1492 — 1572) giebt in dem zweiten Buch seines Werks: *De quadratura circuli, libri duo* (Lyon 1559, in 8.), die Geschichte dieses Problems und widerlegt die Fehlschlüsse, zu denen es Gelegenheit gegeben hat, und spricht darauf mit diesen Worten dieselbe Meinung als Regiomontanus aus: *Tetragonismus secundum Arabes. Omnis circuli perimetros ad diametrum decupla est potentiâ .... Patet igitur hujusmodi tetragonismum secundum Arabes esse falsum, et extra limites Archimedis.*

Ueber die Geometrie des Bhascara Acharya.

Die Werke des Bhascara sind, so wie die des Brahmegupta, eine Abhandlung über Arithmetik, die er *Lilavati* nennt, und eine über Algebra unter dem Namen *Bija-Ganita.* Die Geometrie bildet in dem Buche Lilavati die Kapitel VI, VII, VIII, IX, X und XI unter den §§. 133—247.

Das Kapitel VI ist das bemerkenswertheste: es behandelt die ebenen Figuren; die andern sind von geringerer Wichtigkeit und führen dieselben Titel: *excavations, stacks*, etc., als bei Brahmegupta.

Die Bija-Ganita enthält auch einige Fragen aus der Geometrie, welche sich als Anwendungen der algebraischen Regeln finden und welche durch Rechnung gelöst sind. Man bemerkt auch noch in diesem Werke einige algebraische Sätze, die durch geometrische Betrachtungen bewiesen sind. Wir werden diese isolirt stehenden Sätze anführen, nachdem wir den eigentlich geometrischen Theil geprüft haben werden.

Wir theilen diesen in fünf Theile: die drei ersten beziehen sich auf das Dreieck im Allgemeinen, auf das rechtwinklige Dreieck und auf das Viereck; der vierte enthält einige Sätze über den Kreis und in dem fünften sind die Regeln für die Ausmessung der Volumina und das Kapitel über die Anwendung des Gnomons.

Erster Theil: *Sätze über das Dreieck.*

1. Theorem vom Quadrat der Hypotenuse; §. 134.
2. Ausdruck der Segmente, welche auf der Basis eines Dreiecks durch das Perpendikel gebildet werden, und Ausdruck für das Perpendikel; §§. 163—164, 165, 166.
3. Die Fläche eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produkts aus Grundlinie und Höhe; §. 164. [134])
4. Formel, welche die Fläche des Dreiecks als Function der Seiten giebt; §. 167. — Wir werden sie unten bei Gelegenheit des Vierecks aussprechen.

Zweiter Theil: *Ueber das rechtwinklige Dreieck.*

1. Regeln zur Bildung eines rechtwinkligen Dreiecks in rationalen Zahlen:
   Wenn eine Kathete gegeben ist; §§. 139, 140, 141, 143, 145;
   Wenn die Hypotenuse gegeben ist; §§. 142, 144, 146.

---

134) Der Commentator Ganesa beweist anders, als wir es nach Euclid zu thun gewöhnt sind, dass die Fläche des Dreiecks gleich der Hälfte des Produkts aus Grundlinie und Höhe ist.

Er bildet ein Rectangel, welches mit dem Dreieck einerlei Grundlinie hat und zur Höhe die Hälfte des Perpendikels. Die obere Basis des Rechtecks schneidet vom Dreieck ein kleines Dreieck ab, welches durch das Perpendikel in zwei rechtwinklige Dreiecke getheilt ist. Diese sind respective den beiden Dreiecken gleich, welche man zu dem untern Theil des Dreiecks hinzufügen muss, um das Rechteck zu completiren. Hieraus schliesst er, dass die Fläche des Dreiecks gleich der des Rechtecks ist und folglich gleich dem Produkt aus Basis und Hälfte des Perpendikels.

Dieser Beweis ist sehr einfach und einleuchtend sowohl fürs Auge, als für den Verstand. Er ist derselbe, den die Araber anwandten und der beim Wiederaufleben der Wissenschaften besonders von Luca del Borgo und Tartalea angenommen wurde.

2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, von dem man eine Kathete kennt und die Summe oder Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete; §§. 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153.
3. Regel zur Bestimmung eines Punkts auf einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, für welchen die Summe der Entfernungen von den beiden Endpunkten der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Katheten ist; §§. 154, 155.
4. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, von dem man die Hypotenuse und die Summe oder Differenz der beiden Katheten kennt; §§. 156, 157, 158.

Dritter Theil: *Sätze über das Viereck.*

1. Die halbe Summe der Seiten wird viermal geschrieben, einzeln zieht man davon die Seiten ab und bildet das Produkt aus den Resten. Die Quadratwurzel aus diesem Produkt ist die Fläche, *ungenau* beim Viereck, aber, wie bekannt, genau beim Dreieck; §§. 167, 168.

Dieses ist die Formel des Brahmegupta, welche Bhascara copirt hat, ohne sie verstanden zu haben und ohne zu bemerken, dass darin von einem Viereck, das einem Kreise eingeschrieben ist, die Rede ist. Deshalb sagt er auch, dass die Regel für das Viereck ungenau sei, und beweist späterhin, das es absurd ist, nach der Fläche eines Vierecks zu fragen, wenn man nur die Seiten kennt, weil man, setzt er hinzu, mit denselben Seiten mehre verschiedene Vierecke bilden kann [135]); §§. 169—170, 171, 172.

---

135) Der Scholiast Suryadasa, Verfasser zweier ausgezeichneten Commentare über Lilavati und Bija-Ganita (Coolebroke: *Brahmegupta and Bhascara*, p. XXVI), scheint nicht mehr als Bhascara in dem Verständniss des Satzes von Brahmegupta bewandert gewesen zu sein. Denn er giebt folgenden Grund an, um zu beweisen, dass die Fläche beim Dreieck genau und beim Viereck ungenau ist: „*If the three remainders be added together, their sum is equal to half the sum of all the sides. The product of the continual multiplication of the three remainders being taken into the sum of those remainders, the product so obtained is equal to the product of the square of the perpendicular taken into the square of half the base. It is a square quantity: for a square multiplied by a square, gives a square. The square-root being extracted, the product of the perpendicular by half the base is the result; and that ist the area of the triangle. Therefore the true area is thus found. In a quadrilateral, the product of the multiplication does not give a square quantity: but an irrational one. Its approximate root is the area of the figure; not, however, the true one: for, when divided by the perpendicular, is should give half the sum of the base and summit.*" (Lilavati, p. 72.)

2. In dem gleichseitigen Viereck (Rhombus) ist die Fläche gleich dem halben Produkt der beiden Diagonalen. Die Fläche des Rechtecks ist das Produkt aus Grundlinie und Höhe; §. 174.

3. In dem Viereck, dessen beide Perpendikel gleich sind, ist die Fläche gleich dem Produkt aus der halben Summe der beiden Bases in das Perpendikel; §§. 175, 177.

4. In dem Rhombus ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich dem vierfachen Quadrat der Seite; §§. 173—175.

5. Formeln für die Segmente, welche die Diagonalen eines Vierecks, dessen Flanken senkrecht auf der Basis stehen, auf einander abschneiden; und Ausdruck für das Perpendikel, welches von dem Durchschnittspunkt der Diagonalen auf die Basis gefällt wird; §§. 159, 160.

6. Wenn man die Seiten des Vierecks und die eine seiner Diagonalen kennt, die andre Diagonale, die Perpendikel des Vierecks und seine Fläche zu finden; §§. 178, ... 184.

   Die Fläche ist die Summe der Flächen der beiden Dreiecke, welche die bekannte Diagonale zur Basis haben; §. 184.

Die Sätze, in denen die verschiedenen Theile dieser Aufgabe aufgelöst werden, bieten keine Schwierigkeit dar. Sie beruhen auf dem Princip der Proportionalität der Seiten in gleichwinkligen Dreiecken.

7. Regel für die Bildung eines Vierecks aus vier gegebenen Seiten, in welchem die beiden Perpendikel gleich sind; §§. 185—186.

8. Regel für die Auffindung der Diagonalen eines Vierecks; §. 190.

Dieses ist die Regel, welche Brahmegupta §. 20 für ein Viereck giebt, das einem Kreise eingeschrieben ist. In dem Werke des Bhascara wird sie aber nicht auf irgend ein einschreibbares Viereck angewandt, weil dieser Geometer nie das Wort *Kreis* in irgend einem seiner Sätze ausspricht, die sich aufs Dreieck oder aufs Viereck beziehen; und weil er durchaus nicht gewusst hat, dass die Sätze des Brahmegupta sich auf das eingeschriebene Viereck beziehen.

Man sieht, dass die Regel des Bhascara, in dem Sinne dieses Geometers, nur das Viereck betrifft, dessen Diagonalen

senkrecht auf einander stehen und welches vermittelst zweier *erzeugenden* rechtwinkligen Dreiecke gebildet ist, wie wir es in unsern Bemerkungen über §. 38 des Brahmegupta gesagt haben. Dieses wird bestätigt durch die einfache und nur für diesen besondern Fall passende Regel, welche Bhascara für die allgemeine Regel substituirt hat in §. 191—192.

Eine andre Bemerkung von Bhascara beweist noch ganz deutlich, dass er nicht gewusst habe, dass bei Brahmegupta von einem Viereck, das einem Kreise eingeschrieben werden könne, die Rede gewesen sei: er wirft ihm nämlich vor, dass er eine allgemeine Regel für die Bestimmung der Diagonalen gegeben hat, während diese, wie er sagt, unbestimmt sind; die ganze Stelle bei Bhascara ist folgende:

„§. 187—189. Die Seiten sind 52 und 39 [136]), die Corauste 25 und die Basis 60. Diese Zahlen sind von den älteren Autoren als Beispiel gewählt für eine Figur, in welcher die Perpendikel ungleich sind; und die genauen Werthe der Diagonalen sind gefunden 56 und 63."

„Mit denselben vier Seiten ein andres Viereck zu construiren, welches andre Diagonalen hat und besonders dasjenige, in dem die Perpendikel gleich sind."

Bhascara löst diese Aufgabe und fügt sodann hinzu:

„Bei denselben Seiten kann man also verschiedene Diagonalen im Tetragon haben. — Obgleich nun die Diagonalen unbestimmt sind, so sind doch von Brahmegupta und Andern ganz bestimmte gefunden worden. Ihre Regel ist folgende:

„§. 190. ***Regel.*** Wenn die Summen der Produkte der Seiten, welche in den Endpunkten der Diagonalen zusammenkommen, durch einander dividirt und durch die Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten multiplicirt werden, so sind die Quadratwurzeln aus diesen Resultaten die Diagonalen des Trapezes."

„Der Einwurf, den man gegen dieses Mittel zur Auffindung der Diagonalen machen kann, ist der, dass es zu lang ist, wie ich es zeigen will, indem ich eine kürzere Methode anführe."

---

136) Wir wollen hier beiläufig bemerken, dass Bhascara, um 39 auszudrücken, die Subtraction anwendet, nach Art der Lateiner: er sagt 40 *weniger* 1 (*one less than forty*). Aber es scheint, dass diese Art von Zusammensetzung der Zahlen in Indien nicht allgemein war. Chaturveda befolgt sie nicht; er sagt immer 39 (*thirty-nine*). (S. seinen Commentar zu §. 21 und 32 des Brahmegupta.)

„§. 191—192. *Regel.* Die Senkrechten und die Seiten der beiden rechtwinkligen Dreiecke, reciprok multiplicirt mit den Hypotenusen, sind die Seiten; und auf diese Weise wird ein Trapez gebildet, in welchem die Diagonalen aus den beiden Dreiecken abgeleitet werden können."

„Das Produkt der Katheten, addirt zum Produkt der Seiten, ist eine Diagonale, die Summe der Produkte der Katheten und der Seiten, reciprok mit einander multiplicirt, ist die andre Diagonale."

„Da sich diese kurze Methode darbietet, so weiss ich nicht, weshalb man die mühsame Regel der frühern Schriftsteller anwenden soll."

Bhascara fügt noch hinzu: „Wenn die Coraüste und eine der Flanken ihre Stelle vertauschen, so wird die eine der Diagonalen gleich dem Produkt der Diagonalen der beiden rechtwinkligen Dreiecke."

Wir müssen aus dieser Stelle schliessen, dass Bhascara die Sätze des Brahmegupta, welche er wieder aufnimmt, nicht verstanden habe. Letzterer spricht, wie wir schon gesagt haben, die im §. 191—192 von Bhascara gegebenen Formeln nicht aus, weil sie, in seinem Sinne, nur eine einfache Verification der Rationalität der Diagonalen wären, und nicht der Gegenstand eines Satzes.

Bhascara bemerkt, dass, wenn man zwei an einander stossende Seiten des Vierecks vertauscht, man ein zweites bildet, worin die eine der Diagonalen eine andre ist und zum Ausdruck das Produkt der Hypotenusen der beiden erzeugenden Triangel hat. Dieses ist wahr; aber Bhascara sagt eben so wenig in Bezug auf das zweite Viereck, als in Bezug auf das erste, welches seine Eigenschaften wären, die gerade der Zweck in dem Werke des Brahmegupta sind. Er bemerkt eben so wenig, dass dieses neue Viereck zwei rechte Winkel hat.

9. Berechnung der Segmente, welche die Diagonalen, die Perpendikel und die verlängerten Seiten eines Vierecks auf einander bilden; §§. 193—194, 195—196, 197, 198—200.

Man setzt als bekannt voraus die Seiten, die Diagonalen und die Perpendikel.

Alle diese Rechnungen sind ohne Schwierigkeit; sie beruhen auf dem Princip der Proportionalität der Seiten in gleichwinkligen Dreiecken.

Dieses sind die Sätze über das Viereck. Sie bilden, in Verbindung mit den aufs Dreieck bezüglichen, denjenigen Theil

des Werks von Bhascara, welcher den ersten achtzehn Paragraphen bei Brahmegupta entspricht. Bevor wir zu den andern Sätzen des Bhascara übergehen, wollen wir auf die Unterschiede aufmerksam machen, welche zwischen den ersten und denen des Brahmegupta stattfinden, wovon sie nur eine Nachahmung sind.

Diese Unterschiede beruhen auf folgenden Punkten:

1) Alle Sätze des Bhascara sind dem Kreise durchaus fremd, von dem in dem Ausspruch der §§. 26 und 27 bei Brahmegupta förmlich die Rede ist und der in mehren andern Sätzen die Hauptrolle spielt.

2) Die von Brahmegupta gegebene Formel für die Fläche des Vierecks (das einem Kreise eingeschrieben ist) wird von Bhascara ungenau genannt.

3) Der von Brahmegupta gegebene allgemeine Ausdruck für die Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks wird von Bhascara für zu mühsam zu berechnen gehalten und von ihm so betrachtet, als liesse er sich nur auf ein Viereck von besondrer Construction anwenden.

4) Mehre Sätze des Brahmegupta finden sich nicht in dem Werke des Bhascara. Diese Sätze sind:

I. Der Ausdruck für den Durchmesser des Kreises, der einem Dreieck oder Viereck umgeschrieben ist.

II. Der besondre Ausdruck für den Durchmesser des Kreises, der einem Viereck umgeschrieben ist, in welchem die Diagonalen senkrecht auf einander stehen.

III. Die Eigenschaft dieses Vierecks, dass das Perpendikel, welches von dem Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen auf eine seiner Seiten gefällt wird, durch die Mitte der gegenüberliegenden Seite geht.

IV. Die Art, ein gleichschenkliges oder ein ungleichseitiges Dreieck zu bilden, in welchem die Seiten und das Perpendikel rationale Zahlen sind.

V. Die Art, ein Viereck mit zwei gegenüberliegenden oder auch drei gleichen Seiten zu bilden, das einem Kreise eingeschrieben werden kann und in dem alle Stücke, auch der Radius des Kreises, rational sind.

Das Fehlen der beiden letzten Sätze (IV und V) in dem Werke des Bhascara beweist, dass dieser Geometer nicht so wie Brahmegupta beabsichtigt habe, die Aufgabe über die Construction eines Vierecks zu lösen, welches einem Kreise eingeschrieben werden könne und in dem alle Theile rational sind.

Wir müssen endlich noch sagen, dass das Werk von Bhascara einige Sätze über das rechtwinklige Dreieck enthält, welche sich bei Brahmegupta nicht finden und die auch in der That dem Gegenstande dieses Werks fremd gewesen wären.

Kurz: das Werk des Brahmegupta löst vollständig und mit Präcision die Aufgabe von der Construction eines Vierecks, das einem Kreise eingeschrieben werden kann und dessen Theile alle rational sind. Kein Satz ist dieser Aufgabe fremd oder für die Aufgabe überflüssig. — Das des Bhascara behandelt nicht einen speciellen einzelnen Gegenstand. Mann kann es in drei Haupttheile theilen, die von einander unabhängig sind.

Im ersten wird der Ausdruck für das Perpendikel des Dreiecks gegeben und die Formel zur Berechnung dieser Figur, als Function der drei Seiten.

Im zweiten wird die Construction des rechtwinkligen Dreiecks in rationalen Zahlen behandelt und einige Sätze über das rechtwinklige Dreieck.

Im dritten berechnet der Verfasser verschiedene Linien in einem beliebigen Viereck, von dem man alle Seiten und eine Diagonale kennt.

Es giebt also zahlreiche Unterschiede zwischen beiden Werken. Ungeachtet dieser Verschiedenheit müssen wir doch anerkennen, dass der spätere eine Nachbildung oder eine Copie des ersten ist: eine unvollkommene und entstellte Copie, welche deutlich zeigt, dass Bhascara das Werk des Brahmegupta nicht verstanden hat.

Die Noten der verschiedenen Scholiasten, welche den Text des Lilavati begleiten, zeigen uns, dass diese Schriftsteller nicht glücklicher als Bhascara gewesen sind und dass sie eben so wenig die gehörige Einsicht in die Sätze des Brahmegupta gehabt haben.

Die übrigen Sätze aber, welche wir noch aus dem VIten Kapitel des Lilavati zu citiren haben, sind von bedeutend grösserm Werth, als die, welchen sie in der Behandlung des Brahmegupta entsprechen. Wir wollen die hauptsächlichsten anführen, unter denen man besonders einen sehr genäherten Werth für das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser und eine sehr einfache Formel zur approximativen Berechnung einer Sehne, als Function ihres Bogens, bemerken muss.

§. 201. „Wenn der Durchmesser des Kreises D ist, so ist der Ausdruck $D \cdot \frac{3927}{1250}$ beinahe die Peripherie; $D \cdot \frac{22}{7}$ ist die Annäherung, welche man in der Praxis anwendet."

Diese beiden Ausdrücke finden sich nicht in dem Werke des Brahmegupta. Das Verhältniss $\frac{22}{7}$ ist das des Archimedes. Das erste Verhältniss $\frac{3927}{1250}$ ist genauer, denn es ist $= 3{,}14160$, während man $\frac{22}{7} = 3{,}1428571\ldots$ hat. Um eine grössere Annäherung zu erhalten, muss man sich des Verhältnisses $3{,}1415926\ldots$ bedienen.

Die Annäherung der Inder [137]) ist besonders wegen der darin enthaltenen geringen Anzahl der Ziffern merkwürdig. Auf jeden Fall ist das Verhältniss des Adrian Metius $\frac{355}{113}$ $= 3{,}14159292\ldots$ vorzuziehen.

§. 203. „*Regel.* Der vierte Theil des Durchmessers, multiplicirt durch die Peripherie, giebt die Fläche des Kreises. Diese Fläche, multiplicirt durch 4, giebt die Oberfläche der Kugel. Diese Oberfläche, multiplicirt mit dem Durchmesser und dividirt durch 6, giebt den genauen Werth des Volumens der Kugel."

§. 205—206. „*Regel.* Es sei D der Durchmesser des Kreises, dann ist $D^2 \cdot \frac{3927}{5000}$ die Fläche des Kreises ziemlich genau; $D^2 \cdot \frac{11}{14}$ ist der weniger genaue Werth, wie er in der Praxis angewandt wird; $\frac{D^3}{2} + \frac{1}{21} \cdot \frac{D^3}{2}$ ist das Maass für das Volumen der Kugel."

---

137) Das Verhältniss $\frac{3927}{1250}$ darf man nicht dem Bhascara zuschreiben; es ist viel älter, als dieser Geometer. Man findet es unter der Form $\frac{62832}{20000}$ in der Algebra des Mohammed ben Musa, welcher, nachdem er die beiden Verhältnisse $\frac{22}{7}$ und $\sqrt{10}$ angegeben hat, sagt, dass sich die Astronomen noch eines dritten, $\frac{62832}{20000}$ bedienen. (S. Uebersetzung von Fr. Rosen, p. 71.)

Hiernach kann man nun fragen, ob dieses Verhältniss den Indern oder den Arabern zuzuschreiben sei. Rosen und Libri meinen, dass sein Ursprung indisch sei. (S. *Mohammed ben Musa*, *Algebra translated by Rosen*, p. 199, und *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, p. 128). Dieses Verhältniss ist in Europa seit langer Zeit bekannt. Purbach spricht davon in seinem Werk über die Construction der Sinus, und Stevin in seiner Geographie.

Diese beiden letzten Ausdrücke folgen aus dem Verhältniss des Archimedes; denn man hat

$$D^2 . \frac{11}{14} = \frac{D^2}{4} . \frac{22}{7} \text{ und } \frac{D^3}{2} + \frac{1}{21} . \frac{D^3}{2} = \frac{D^3}{6} . \frac{22}{7}.$$

§. 206—207. Dieses sind die Verhältnisse zwischen der Sehne, dem Pfeil und dem Durchmesser des Kreises, wie sie Brahmegupta §. 41 und 42 giebt.

§. 209—211 und 212. „In dem Kreise, dessen Durchmesser 2000 ist, sind die Seiten des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und der andern regulären Polygone folgende: für das Dreieck $1732\,^1/_{20}$, für das Viereck $1414\,^{13}/_{60}$, für das Fünfeck $1175\,^{17}/_{30}$, für das Sechseck 1000, für das Siebeneck $867\,^7/_{12}$, für das Achteck $765\,^{11}/_{30}$ und für das Neuneck $683\,^{17}/_{20}$."

Der Verfasser fügt hinzu: „Von andern verschiedenen Durchmessern wird man andre Seiten ableiten, wie wir unter dem Titel *Construction der Sinus* in der Abhandlung über die *sphaerica* zeigen werden."

„Die folgende Regel enthält eine Methode, um schnell eine rohe Annäherung für die Sehnen zu finden."

§. 213. Es sei c die Peripherie, a der Bogen, D der Durchmesser und C die Sehne, so hat man:

$$C = \frac{4D.a(c-a)}{^5/_4 c^2 - a(c-a)}.$$

Diese Formel ist sehr merkwürdig und es wäre sehr interessant zu wissen, wie die Inder dazu gekommen sind. Servois hat sie erhalten, indem er die Reihenentwickelung der Sinus als Function des Bogens nahm. (S. *Correspondance sur l'école polytechnique*, T. III, 3.)

§. 214. *Beispiel.* Wenn der Durchmesser 240 ist, so werden für die Bögen von 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160 und 180 Graden die zugehörigen Sehnen 42, 82, 120, 154, 184, 208, 226, 236 und 240.

§. 215. Die Formel, welche den Bogen a als Function der Sehne C, der Peripherie c und des Durchmessers D giebt:

$$a = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{^5/_4 c^2 . C}{4D + C}}.$$

Diese Formel leitet man aus der des §. 213 ab, indem man eine Buchstaben-Gleichung des zweiten Grades auflöst.

Die Kapitel VII, VIII, IX und X enthalten mehr als die, welchen sie im Werke des Brahmegupta correspondiren.

Das Kapitel XI hat die Berechnung der Entfernungen durch den Schatten des Gnomons zum Gegenstand. Man findet darin die von Brahmegupta behandelten Aufgaben und ausserdem diese: Wenn ein Gnomon durch zwei leuchtende Punkte erhellt ist und man kennt den Unterschied der Schatten und den Unterschied ihrer Hypotenusen, so kann man den Schatten bestimmen.

Dieses reducirt sich auf folgendes Problem:

Wenn man in einem Dreieck das Perpendikel, die Differenz der Segmente, welche durch dasselbe auf der Basis gebildet werden, und die Differenz der beiden andern Seiten kennt, das Dreieck zu construiren.

Es sei h die Höhe oder das Perpendikel des Dreiecks, δ die Differenz der Segmente und d die Differenz der Seiten, so werden die Segmente gleich

$$\frac{1}{2}\left(\delta \pm d.\sqrt{1+\frac{4h^2}{d^2-\delta^2}}\right).$$

Dieses ist die Formel des Bhascara.

Man findet in dem Vija-Ganita mehre Aufgaben aus der Geometrie durch den Calcul aufgelöst und mehre Regeln der Algebra durch die Geometrie bewiesen. Alle diese Aufgaben sind mit höchst merkwürdiger Präcision und Eleganz behandelt. Bei einigen, welche auf mehre verschiedene Arten gelöst werden können, ist die vom Autor gewählte Lösung die einfachste; man glaubt eine Stelle in der *Arithmetica universalis* zu lesen, worin Newton so vorzügliche Vorschriften über die Wahl der Unbekannten giebt.

So z. B.: wenn man die Basis eines ungleichseitigen Dreiecks zu suchen hat, dessen Seiten 13 und 5, und dessen Fläche 4 ist, so bemerkt Bhascara: „wenn man die gesuchte Basis zur Unbekannten wählt, so kommt man auf eine quadratische Gleichung; sucht man dagegen das Perpendikel, welches auf eine der gegebenen Seiten von dem gegenüberliegenden Scheitel gefällt wird, und die auf dieser Seite gebildeten Segmente, so erhält man durch eine einfache Ausziehung der Quadratwurzel die gesuchte Basis. Sie ist 4." (Vija-Ganita, §. 117.)

Bhascara giebt zwei Beweise für das Quadrat der Hypotenuse. Der erste besteht darin, dass er durch eine Proportion den Ausdruck der Segmente sucht, die auf der Hypotenuse durch das Perpendikel gebildet werden, und dass er diese zusammenfügt. Es ist dieses der von Wallis angewandte Beweis. (*De sectionibus angularibus*, Cap. VI.)

Der zweite ist durchaus indischen Ursprungs und äusserst merkwürdig. Ueber den Seiten eines Quadrats construirt Bhascara vier unter einander gleiche rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenusen diese Seiten sind und sagt *see* (*voyez*).*) In der That, der Anblick der Figur reicht hin, um zu beweisen, dass die Fläche des Quadrats gleich ist den Flächen der vier Dreiecke (oder dem Vierfachen der Fläche eines von ihnen), *plus* der Fläche eines kleinen Quadrats, dessen Seite der Unterschied der beiden Katheten eines der rechtwinkligen Dreiecke ist. Wenn man also c die Hypotenuse, und a und b die beiden Katheten eines dieser Dreiecke nennt, so ist

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + (a-b)^2 \text{ oder}$$
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

welches der zu beweisende Satz ist (Vija-Ganita, §. 146).

Die Formeln der Analysis:

$$2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2,$$
$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab,$$
$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2,$$

sind an Figuren bewiesen, die eben so dem Auge, wie dem Verstande genügen, ohne dass es einer Auseinandersetzung bedürfte (§. 147, 149 und 150).

Um die unbestimmte Gleichung des zweiten Grades:

$$ax + by + c = xy,$$

in rationalen Zahlen aufzulösen, zeigt Bhascara an einer Figur, welche dieser Gleichung eine geometrische Bedeutung giebt, dass sie sich in folgende transformiren lässt:

$$(x-b)(y-a) = ab + c.$$

Hieraus schliesst er, dass man als rationale Werthe für x und y

$$x = b + n, \quad y = a + \frac{ab+c}{n}$$

annehmen kann, worin n eine beliebige Zahl ist.

Bhascara nennt diesen Beweis einen *geometrischen*; später giebt er einen rein *algebraischen* (§. 212—214).

---

*) Möchte hier die Bedeutung des *see* nicht eine andre sein?
Anm. d. U.

Mehre Aufgaben der Geometrie sind in dem Vija-Ganita als Anwendungen algebraischer Regeln aufgelöst. Einige hängen von unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades ab; z. B. diese beiden: „Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks (in rationalen Zahlen) zu finden, dessen Fläche durch dieselbe Zahl, als die Hypotenuse ausgedrückt wird, oder auch gleich dem Produkt der drei Seiten ist." (§. 120.)

Im ersten Fall sind die Seiten des Dreiecks $\frac{20}{6}, \frac{15}{6}$ und $\frac{25}{6}$; und im zweiten $\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}$. Bhascara fügt hinzu, dass man noch andre Lösungen finden könne.[138])

Diese Einzelnheiten zeigen, dass die Inder, wenigstens seit den Zeiten des Bhascara, die Algebra auf die Geometrie und die Geometrie auf die Algebra anwandten. In dem Werke des Brahmegupta finden wir nicht dieselben Spuren einer so innigen Vereinigung dieser beiden Wissenschaften. Das liegt aber wahrscheinlich darin, dass letzteres viel gedrängter, als das des Bhascara geschrieben ist, dass es viel weniger Beispiele algebraischer Regeln enthält, und dass es niemals irgend eine Art von Beweis liefert. Wir müssen aber glauben, dass diese Anwendung der Algebra auf die Geometrie, welche den Werken des Bhascara einen besondern Charakter verleiht, sich aus einer Zeit herschreibt, die diesem Schriftsteller lange vorhergeht, um so mehr, da sie auch den Charakter der arabischen Werke, mehre Jahrhunderte vor Bhascara, ausmachte; z. B. zur Zeit des Mohammed ben Musa (im IXten Jahrh.). Die Araber haben diese Verfahrungsart in der Mathematik nur von den Indern lernen können, da sie von den Griechen nicht angewandt wurde.

Wir haben die Idee verworfen, dass die indischen Werke uns die Elemente der Geometrie liefern, so wie, dass sie uns Behandlungen der Arithmetik und Algebra geben. Wir glauben, in der That bewiesen zu haben, dass dergleichen nicht der Zweck des Werkes von Brahmegupta hat sein können, welches nur von einer einzigen Aufgabe der Geometrie handelt. Wir können aber nicht dasselbe von dem Werke des Bhascara sagen, und wir stimmen damit überein, in demselben ein Zusammenfassen der in damaliger Zeit bei den In-

138) Die beiden Aufgaben hängen respective von diesen beiden Gleichungen ab:

$$x^2 y^2 = 4(x^2 + y^2),$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

dern gewöhnlichen geometrischen Kenntnissen zu sehen. Die Art, wie der Verfasser das Werk des Brahmegupta entstellt hat, um es zu dem seinigen zu bilden, und die Noten der Scholiasten, von denen keiner ihn deshalb getadelt hat, beweisen uns, dass bei den Indern die Wissenschaft ausserordentlich in Verfall gerathen ist und dass sie nicht mehr ein ordentliches Werk über Geometrie haben.

Wir wüssten nicht, uns auf dieselbe Weise über den Zustand der Wissenschaft zur Zeit des Brahmegupta auszusprechen. Die Documente fehlen uns und wir können nicht sagen, ob die mathematische Intelligenz und das Genie dieses Schriftstellers und seiner Zeitgenossen für die Höhe so vollendeter und merkwürdiger Werke, die uns hinterlassen sind, geeignet waren; oder ob diese Werke nicht selbst, wie die der späteren Schriftsteller, einfache Fragmente eines reellen und sehr alten Wissens waren, die der Zerstörung der Zeit entgangen waren und die zur Zeit des Brahmegupta noch nicht ihre primitive Vollendung und Reinheit verloren hatten. Der berühmte Holländer Stevin, der ein *weises Jahrhundert*, „in dem die Menschen eine bewunderungswürdige Kenntniss der Wissenschaften gehabt haben", annahm, welches dem der Griechen vorherging und diesem nur einen geringen Theil seines alten Wissens überliefert hat [139]), Stevin, sagen wir, und unser berühmte Bailly [140]) würden nicht angestanden haben, über diese Frage sich entschieden auszusprechen, wenn sie die so Staunen erregenden Werke des Brahmegupta gesehen hätten.

Wir, die wir hier nicht eine so wichtige historische Frage behandeln wollen, wir begnügen uns, auf den geometrischen Theil der Werke des Brahmegupta und Bhascara, welche man bisher vernachlässigt hat, die Aufmerksamkeit der gelehrten Orientalisten und derjenigen Gebildeten, die sich mit der Geschichte Indiens und des Ganges der menschlichen Bildung beschäftigen, zu lenken. Dieser geometrische Theil wird ihnen einige Documente und einige nützliche Bemerkungen liefern.

---

139) *Oeuvres mathématiques de Simon Stevin*, in fol., Leyden 1634, *Géographie*, Def. VI, p. 106.

140) „*Ces méthodes savans, pratiquées par des ignorans, ces systèmes, ces idées philosophiques, dans têtes qui ne sont point philosophes, tout indique un peuple antérieur aux Indiens et aux Chaldéens: peuple qui eut des sciences perfectionnées, une philosphie sublime et sage, et qui, en disparaissant de dessus la terre, a laissé aux peuples qui lui ont succédé quelques vérités isolées, échappées à la destruction, et que le hasard nous a conservées.*" (*Histoire de l'astronomie ancienne*, Lib. III, §. XVIII.)

Ueber die Geometrie der Lateiner.

Wir würden, so zu sagen, denselben Gegenstand fortsetzen, wenn wir von der Geometrie der Inder zu der der Araber übergingen. Da aber das, was wir von dieser zu sagen haben, sich natürlicher noch an die ersten Arbeiten der europäischen Geometer beim Wiederaufleben der Wissenschaften anschliesst, wo wir das arabische Element nicht weniger verbreitet und nicht weniger einflussreich, als das griechische sehen werden, so wollen wir eine kurze Abschweifung machen, um einige Worte über die Geometrie bei den Lateinern zu sagen.

Die mathematischen Wissenschaften wurden von dem römischen Volk ausserordentlich vernachlässigt, da bei ihm die ausgezeichnetern Geister sich nur der Kriegskunst und der Beredsamkeit zuwandten. Die Geometrie, insbesondre, war zu Rom kaum gekannt. Die Astronomie stand mehr in Ehren, und man kann mehre berühmte Schriftsteller anführen, wie Varro, J. Cäsar, Cicero, Lucrez, Virgil, Horaz, Seneca, Plinius, welche eine Kenntniss von den Phänomenen am Himmel besassen. Niemand aber betrachtete sie als einen Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen und that keinen Schritt zur Wissenschaft. Man citirt selbst nur Sulpicius Gallus, der die praktische Astronomie cultivirt und Finsternisse vorausgesagt hat.

Die Geometrie scheint bei den Lateinern den einzigen Zweck gehabt zu haben, Länder zu vermessen und Grenzen zu bestimmen. Die Feldmesser, welche man *agrimensores* oder *gromatici* nannte, waren sehr geachtete Leute, welche man als die eigentlichen Bewahrer der Wissenschaft betrachtete. Einige auf uns gekommene Fragmente ihrer Schriften jedoch bewegen uns, ihnen den Titel als *Geometer* durchaus abzusprechen. Denn ausser dem, dass diese Schriften sich auf die elementarsten Aufgaben der praktischen Geometrie beziehen, so finden wir darin noch bedeutende Fehler. Die Fläche des Dreiecks und die Fläche des Vierecks werden darin ungenau berechnet. Ihre Regeln dafür haben wir bei Gelegenheit des §. 21 in dem geometrischen Theil des Brahmegupta angeführt.

Ungeachtet des Ansehens, welches die *Gromatici* zu Rom genossen, wegen der Dienste, welche sie in den verschiedenen Gegenden dieses ungeheuren Reiches leisteten, und obgleich die Namen der gewandtesten unter ihnen uns von Boëtius überliefert sind, so sind sie doch heut zu Tage in der Geschichte der Geometrie beinahe alle unbekannt.

Aber einige, unter anderm Titel wahrhaft berühmte Männer haben diese Wissenschaften an und für sich cultivirt. Varro, welcher für den gelehrtesten unter den Römern galt und den diese als einen zweiten Plato betrachteten, hat über Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Musik und Schifffahrtskunst geschrieben. Es ist sehr zu bedauern, dass keines von diesen Werken auf uns gekommen ist. Dieser Schriftsteller verdient besonders deshalb angeführt zu werden, weil er, wie eine Stelle im Cassiodorus bezeugt, die Abplattung der Erde vermuthet hat.

Das Werk über Architectur von Vitruvius beweist uns, dass er einer von denjenigen Männern seiner Zeit war, welche die meisten Kenntnisse in der Mathematik besassen.

Man kann noch Julius Sextus Frontinus anführen, der als ein gewandter Ingenieur über Wasserleitungen geschrieben hat. Sein Werk: ***De aquaeductibus urbis Romae***, ist bis auf uns gekommen. Auch hat man von ihm noch ein andres geschätztes Werk über die Kriegskunst.[141])

Wir vermuthen, dass Frontinus auch über die Geometrie geschrieben habe und dass ein Werk über die Ausmessung der Oberflächen, welches wir, nebst andern Fragmenten der römischen *Gromatici*, unter mehren Werken von Boëtius in einem Manuscript des 11ten Jahrhunderts gefunden haben, ihm zugeschrieben werden könne.[142])

---

141) *Stratagematum libri quatuor.*

142) Dieses Manuscript (gr. fol., auf Pergament) gehört der Bibliothek der Stadt Chartres. Dr. G. Hänel hat es in seine *Catalogi librorum manuscriptorum*, etc. (Lipsiae 1819, in 4.) unter folgendem Titel aufgenommen: *Aristotelis lib. elenchorum*; *Boëtii Logica*, *Rhetorica*, *Arithmetica*, *Musica*; *Julii Firmici mathematica*; *Materni Junioris geometria*; *canones*, *tabulae et diversa de astronomia.*

Dieser Titel ist von einer Bemerkung hergenommen, die auf der innern Seite des Deckels dieses Buches steht und die eben so alt als dieses selbst zu sein scheint; sie lautet so:

In hoc volumine continentur:
Liber elenchorum Aristotelis;
Logica, Rhetorica, Arithmetica, Musica Boecii;
Mathematica Julii Firmici, Materni Junioris;
Geometria;
Canones, tabulae et alia de Astronomia.

Den Worten *Mathematica Julii* etc. gerade gegenüber befindet sich eine Bemerkung, die ebenfalls sehr alt zu sein scheint und in der wir zu lesen scheinen: *Hanc suppositam credo.* Und in der That finden wir Nichts von Julius Firmicus Maternus. Aber es ist wahr, dass, unglücklicher Weise, 104 Blätter (140—243) in diesem Manuscript fehlen, nach dem 20sten Kapitel des zweiten Buchs über Musik von Boëtius. Wir vermuthen, dass der Schluss über die Musik ungefähr 64 Blätter eingenommen hat, so dass 40 Blätter andre Gegenstände ent-

Zwei Umstände veranlassen uns, diese Conjectur zu machen. Zuerst nimmt Boëtius im Anfang des zweiten Buchs seiner Geometrie, welches sich auf das Messen der Flächen bezieht, den Julius Frontinus als einen, der in dieser Kunst sehr bewandert gewesen sei und von dem er für dieses zweite Buch Vieles entlehnt habe. Am Ende des Werks giebt Boëtius ein Verzeichniss der vorzüglichsten römischen Feldmesser und führt darunter Julius Frontinus auf. Dieser doppelte Umstand beweist uns, dass dieser Autor über praktische Geometrie geschrieben hat. Ferner bemerken wir, dass das Stück der Geometrie, welches wir in dem genannten Manuscript finden, so viele Uebereinstimmung mit dem zweiten Buch des Boëtius hat, dass man daraus mit Bestimmtheit schliessen kann, das eine dieser Werke ist grossen Theils eine Kopie des andern. Der reine und leichtere Stil dieses Stücks der Geometrie deutet an, dass es früher geschrieben ist, als zur Zeit, in der

---

halten haben, die uns unbekannt geblieben sind und worunter sich vielleicht Einiges von Firmicus Maternus befunden hat; jedoch kennt man von diesem Verfasser und citirt von ihm nur die Astrologie in 8 Büchern.

Das Blatt 244, das erste nach der Lücke, enthält das Ende einer Schrift über regelmässige Körper. Hernach findet man verschiedene, auf einander folgende Stücke, ohne Titel und ohne Namen der Autoren, welche meisten Theils von der Geometrie der römischen Feldmesser und von den Maassen, deren sich diese bedienten, handeln. Wir haben unter dieser Menge folgende einzelne ausgezeichnet, von denen die beiden letztern dem Manuscript einen besondern Werth verleihen.

1) Das, was wir dem Frontinus zuschreiben möchten;
2) Das Buch über Arithmetik von Martianus Capella;
3) Das fünfte Buch des Werkes *De re rustica* von Columella, welches von der Ausmessung der Felder handelt;
4) Verschiedene andre Fragmente über Geometrie von römischen Feldmessern;
5) Eine Stelle aus dem 15ten Kapitel der Etymologien von Isidor von Sevilla;
6) Die beiden Bücher über Geometrie von Boëtius, deren erstes die neun Ziffern und die auf die neue Numeration bezügliche Stelle enthält; und deren zweites durch eine andre Stelle beschlossen wird, die sich auch noch auf diese Numeration bezieht, und die sich in den vorhandenen Ausgaben des Boëtius nicht findet.
7) Endlich eine andre Schrift über den Gebrauch der neun Ziffern, welche frappante Analogien theils mit Boëtius und Gerbert, theils mit unserm Zahlensystem hat.

Diese Schrift, von der man noch nicht Kenntniss genommen zu haben scheint, kann einiges Licht auf die noch streitige Frage über die wahre Bedeutung der Stellen bei Boëtius und Gerbert, und über die genaue Zeit der Einführung des indischen Zahlensystems in Europa geben.

Am Ende des Manuscripts stehen einige Bemerkungen über die Himmelskugel, darauf eine Abhandlung über Astrologie und astronomische Tafeln.

Boëtius lebte: wir sind daher ganz natürlich zu dem Schluss gekommen, dass es das Werk des Frontinus selbst ist, von dem Boëtius sagt, dass er von ihm entlehnt habe.

Dieses Stück der Geometrie kann übrigens dem Verfasser Ehre machen und ist würdiger seinen Namen zu führen, als das Werk: *De qualitate agrorum*, welches man ihm zugeschrieben hat. Denn wir betrachten es als das vollendetste Werk, welches aus der Feder eines lateinischen Geometers hervorgegangen ist, ohne davon das zweite Buch der Geometrie von Boëtius auszunehmen. Eines Theils nämlich finden wir in dieser Schrift die Formel für die Fläche eines Dreiecks durch die drei Seiten ausgedrückt und andern Theils finden wir darin nicht die ungenaue Regel, deren sich die römischen Feldmesser bedienten, um die Fläche des Vierecks zu bestimmen[143]), welche selbst von Boëtius reproducirt wurde.

Die vielfältige Uebereinstimmung veranlasst uns anzunehmen, dass es dasjenige Werk ist, welches, bei dem Wiederaufleben der Wissenschaften dazu gedient hat, den geometrischen Theil der im Jahr 1486 erschienenen Encyclopädie zusammenzusetzen, und welches seitdem viele Auflagen unter dem Titel *Margarita philosophica* erlebt hat. Auch unabhängig von diesem Umstand, der ihm in unsern Augen einigen Werth verleihen kann, würde es die Ehre des Drucks verdient haben, da es die beste Schrift über Geometrie ist, welche von den Römern auf uns gekommen ist.

Wir müssen inzwischen sagen, dass wir in der Berechnung der Fläche der regulären Polygone, vermittelst der Seiten, einen Fehler finden, den auch Boëtius begangen hat und der noch am Ende des XVten Jahrhunderts in der *Margarita philosophica* wiederholt ist.

Der Verfasser bedient sich folgender Formel:

Es sei a die Seite des regelmässigen Polygons und n die Anzahl seiner Seiten, so hat die Fläche diesen Ausdruck:

$$\frac{(n-2).a^2-(n-4)a}{2}. \quad ^{144)}$$

143) S. p. 313 der Sammlung: *Rei agrariae auctores legesque variae; cura Wilelmi Goesii, cujus accedunt indices, antiquitates agrariae et notae, una cum N. Rigaltii notis et observationibus.* Amst. 1674, in 4.; und p. 172 in dem Werk von Columella, *De re rustica* libri XII, Paris 1543, in 8.

144) Man erkennt diese Formeln in den Regeln, welche der Verfasser für die regelmässigen Polygone von 7, 8, 9, 10, 11 und

Die Falschheit dieser Formel liegt am Tage: zuerst weil sie nicht homogen ist, und sodann, weil man darnach, vermittelst einer *einfachen Gleichung des zweiten Grades*, auf den Ausdruck der Seite eines regelmässigen eingeschriebenen Polygons, als Function des Kreishalbmessers, und umgekehrt des Radius als Function der Seite schliessen könnte. Aufgaben, welche bekanntlich von Geichungen höherer Grade abhängen.

Vielleicht ist die ganze Stelle, welche sich auf die Ausmessung der regelmässigen Polygone bezieht, durch einen spätern Schriftsteller in den Theil der Geometrie, welchen wir dem Frontinus zuschreiben wollen, eingeschaltet. Denn die Regel für das gleichseitige Dreieck widerspricht einer andern, früher gegebenen, durchaus geometrischen Regel. So finden wir zuerst unter dem Titel *de trigono isopleuro*: „wenn a die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist, so ist $a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ das Quadrat des Perpendikels; dieses Perpendikel durch $\frac{a}{2}$ multiplicirt ist die Fläche des Dreiecks. Es sei $a = 30$, so wird:

$$(30)^2 - \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 675 = (26)^2; \text{ und } 26 \times \frac{30}{2} = 390.$$

Dieses ist die Fläche des Dreiecks." Diese Regel, so wie die numerische Anwendung sind genau, wenn man jedesmal die Brüche bei der Ausziehung der Quadratwurzel vernachlässigt. [145]) Sodann muss man sich wundern, noch unter

---

12 Seiten giebt; für das Dreieck, Fünfeck und Sechseck jedoch bedient er sich folgender Formeln:

$$\text{für das Dreieck: } \frac{a^2 + a}{2},$$

$$\text{für das Fünfeck: } \frac{3a^2 + a}{2},$$

$$\text{für das Sechseck: } \frac{4a^2 + a}{2}.$$

145) Wenn man $\sqrt{675} = 26$ annimmt, so ist es dasselbe, als wenn man $15\sqrt{3} = 26$ oder $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ setzt. — Hiernach wird der Ausdruck für die Fläche des Dreiecks, welcher genau $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ ist:

$$\frac{a^2}{4} \cdot \frac{26}{13} = a^2 \cdot \frac{13}{30}.$$

dem Titel *de trigono isopleuro* diese zweite Regel zu finden: „wenn a die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist, so ist $\frac{a^2+a}{2}$ seine Fläche; es sei $a = 28$, so wird die Fläche des Dreiecks $\frac{(28)^2+28}{2}$ oder $\frac{812}{2} = 406$."

Man bemerke also: das Dreieck, dessen Seite 28 ist, hat einen grössern Flächeninhalt, als dasjenige, dessen Seite 30 ist. Diese Vergleichung der beiden Zahlen-Beispiele des Verfassers scheint anzudeuten, dass die zweite Regel ihm fremd ist und dass sie aus einer andern Schrift entnommen ist.

Diese zweite Verfahrungsart ist von einem Beweise begleitet, der aber nur eine *petitio principii* ist. Folgendes ist das Raisonnement des Verfassers. Eine gegebene Fläche S ist der Flächeninhalt eines gewissen gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= \frac{\sqrt{8S+1}-1}{2}$ ist; wenn man in die Stelle des S die gefundene Fläche $\frac{a^2+a}{2}$ setzt, so erhält man zum Resultat a, welches die Seite des gegebenen Dreiecks ist, dessen gefundene Fläche genau ist.

Der Fehler dieses vermeintlichen Beweises liegt vor Augen; denn die Formel

$$\text{Seite} = \frac{\sqrt{8.\text{Fläche}+1}-1}{2}$$

ist, nur unter andrer Form, genau dieselbe als diese:

$$\text{Fläche} = \frac{a^2+a}{2},$$

um deren Beweis es sich gerade handelt.

Um aber von der einen dieser beiden Formeln zu der andern überzugehen, *muss man eine Buchstabengleichung des zweiten Grades auflösen.* Dieser Umstand ist höchst merkwürdig in der Geometrie der Lateiner.

Dieses ist die Formel, deren sich einige lateinische Autoren, wie Columella (*De re rustica*, Lib. V, Cap. II.) bedient haben, und welche noch in neuerer Zeit angewandt worden ist. Man findet sie in mehren Werken der praktischen Geometrie (s. *Georgii Vallae*, *de expetendis et fugiendis rebus*, Lib. XIV, und *Geometriae* Lib. V, Cap. IV. — *Il breve trattato di Geometria del Sig. Gio. Franc. Peverone di Cuneo*; in Lione, 1556, in 4. — Lib. III der *Géométrie pratique* von Henrion, p. 341 u. 349, 2te Ausgabe, Paris 1623).

Da das in Rede stehende Stück der Geometrie dasjenige ist, was von den bessern und vollständigern lateinischen Schriftstellern auf uns gekommen ist, und da es ihr gesammtes Wissen in der Geometrie zu enthalten scheint, so wollen wir die Sätze andeuten, welche den Gegenstand desselben ausmachen. Diese sind:

1. Die Berechnung des Perpendikels in einem Dreieck, dessen Seiten gegeben sind [146];
2. Die Berechnung der Fläche eines Dreiecks, als Function dieses Perpendikels, und die Formel, welche die Fläche als Function der Seiten giebt;
3. Die beiden Formeln, welche dazu dienen, ein rechtwinkliges Dreieck in ganzen Zahlen zu bilden, wenn die eine der Seiten als gerade oder als ungerade Zahl gegeben ist; nämlich diese:

für eine ungerade Zahl $\left(\frac{a^2+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-a}{2}\right)^2 + a^2$;

und für eine gerade Zahl $\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right\}^2 = \left\{\left(\frac{a}{1}\right)^2 - 1\right\}^2 + a^2$;

4. Der Ausdruck für den Durchmesser des Kreises, der einem rechtwinkligen Dreieck eingeschrieben ist; dass er nämlich gleich ist der Summe der beiden Katheten weniger der Hypotenuse;
5. Die Berechnung der Fläche des Quadrats, des Parallelogramms, des Rhombus und des Vierecks mit parallelen Bases:

Der Verfasser nennt die eine der Seiten die *Basis*, die gegenüberliegende Seite den *Scheitel* oder *Koraustc* (*vertex seu coraustus*). Das Wort *coraustus* findet sich nicht mehr im Wörterbuch, und es ist vielleicht bei den Neuern nur in der *Margarita philosophica* wieder aufgenommen;

6. Die (auf eine falsche Regel gegründete) Berechnung der Flächen der regelmässigen Polygone;
7. Das Verhältniss $\frac{44}{14}$ oder $\frac{22}{7}$ der Peripherie zum Durchmesser;
8. Endlich die Oberfläche der Kugel, welche gleich der Fläche von vier grössten Kreisen ist.

146) Der Autor nimmt zu den Seiten des Dreiecks die drei Zahlen 13, 14 und 15, deren sich Hero von Alexandrien in seinem Werk über Geodäsie bedient hat und welche man auch in der Geometrie der Inder findet. (Siehe oben bei der Analyse des Werks von Brahmegupta.)

Der Namen sind in der Geschichte der Wissenschaft bei den Lateinern so wenige, dass man auf die Anführung der Schriftsteller beschränkt ist, welche uns nur einige Spuren eines schwachen Wissens in der Geometrie hinterlassen haben, ohne selbständig Etwas zur Ausbildung derselben beigetragen zu haben. Wir nennen als solche Martianus Capella, St. Augustinus, Macrobius, Boëtius, Cassiodorus und Isidorus von Sevilla. Der erste, über dessen Zeitalter man nicht einstimmig ist, indem ihn die Einen in das 3te, die Andern in das 5te Jahrhundert setzen, hat uns ein Werk in neun Büchern[147]) hinterlassen, von denen die beiden ersten, welche eine Art Einleitung zu den sieben andern bilden, ein kleiner philosophischer und allegorischer Roman sind, unter dem Titel: *Die Vermählung der Philosophie mit dem Mercur*, und von denen die sieben andern den sieben freien Künsten gewidmet sind: der Grammatik, Dialectik, Rhetorik, Geometrie, Arithmetik, Astronomie[148]) und Musik.

In dem Buch über Geometrie scheint der Verfasser dieses Wort seinem etymologischen Sinne nach gebraucht zu haben; denn er fängt mit Begriffen aus der Geographie an. Das, was darin von der eigentlich so genannten Geometrie vorkommt, beschränkt sich auf einige Definitionen der Linien, der ebenen Figuren und der Körper, welche meistentheils von Euclid entlehnt sind und mit ihren griechischen Namen benannt werden. Ein sehr merkwürdiger Umstand, da in andern Schriften aus derselben Zeit oder aus einer nur wenig ältern, wie in denen des Boëtius und Cassiodorus, die griechischen durch lateinische Benennungen ersetzt sind.

Das Buch über Arithmetik von Martianus Capella ist gelehrter als sein Buch über Geometrie. Es ist, so wie die Arithmetik des Boëtius, eine Nachahmung der platonischen und pythagoräischen Werke, besonders des von Nicomachus, das von den Eigenschaften der Zahlen und von ihrer Eintheilung in verschiedene Klassen handelt: gerade, ungerade, zusammengesetzte, vollkommene, unvollkommene, überschiessende, mangelhafte, ebene, körperliche, dreieckige u. s. w. Zahlen (*numeri pares, impares, compositi, perfecti, im-*

---

147) *Martiani Minei felicis Capellae, Carthaginiensis, viri proconsularis, Satyricon, in quo de Nuptiis Philologiae et Mercurii libri duo et de septem artibus liberalibus libri singulares*, etc.

148) In diesem achten Buch findet sich ein sehr merkwürdiges Kapitel, betitelt: *Quod tellus non sit centrum omnibus planetis*, worin Martianus Capella den Mercur und die Venus sich um die Sonne drehen lässt. Aus dieser Stelle hat Copernicus die erste Idee zu seinem System entlehnt.

perfecti, abundantes, deficientes, plani, solidi, triangulares etc.)

Sanctus Augustinus hat über die Musik geschrieben. Man schreibt ihm auch, unüberlegter Weise, Principien der Arithmetik und Geometrie zu, welche aber nur eine einfache Nomenclatur liefern.

Eben so ist es mit dem Werk über Geometrie von Cassiodorus, welches in seinem 16ten Buch enthalten ist, das von den sieben freien Künsten handelt und von dem geometrischen Theil dieser Art von Encyclopädie, die der berühmte Isidorus von Sevilla unter dem Titel der *Etymologien* hinterlassen hat.

Die Geometrie des Boëtius ist von grösserer Wichtigkeit, als die genannten Schriften: sie lehrt zum ersten Male bei den Lateinern die Geometrie des Euclid und enthält einige interessante Stücke aus der Geschichte der Wissenschaft. Wir wollen einen kurzen Ueberblick über dieses Werk geben, welches heut zu Tage wenig bekannt ist.

Es ist in zwei Bücher getheilt. Das erste ist eine beinahe wörtliche Uebersetzung der Definitionen und Sätze der vier ersten Bücher von Euclid. Sodann findet man unter dem Titel *de figuris geometricis* einige von Boëtius aufgelöste Probleme, die nichts Interessantes darbieten.

Dieses erste Buch wird beschlossen durch die Auseinandersetzung eines neuen Zahlensystems, das von den griechischen und römischen Systemen verschieden ist und das von neun Ziffern Gebrauch macht. Man hat darin geglaubt, genau unser gegenwärtiges Zahlensystem zu erkennen; dieser Punkt aber in der Geschichte der Wissenschaft, welcher seit zwei Jahrhunderten die Aufmerksamkeit der Gelehrten in Anspruch genommen hat, ist noch nicht definitiv entschieden. Wir kommen späterhin auf diese interessante Stelle in der Geometrie des Boëtius zurück. Wir werden auch in einem besondern Artikel eine andre Stelle desselben Buchs besprechen, worin wir die Beschreibung des Stern-Fünfecks oder des der zweiten Art zu finden glauben.

Das zweite Buch ist der praktischen Geometrie gewidmet, so weit diese den römischen Feldmessern bekannt war. Die Analyse, welche wir bei Gelegenheit des Frontinus von einer, Manuscript gebliebenen, Behandlung der praktischen Geometrie gegeben haben, entspricht diesem zweiten Buch, welches eine Kopie dieses Manuscripts gewesen zu sein scheint und sich wesentlich nur in zwei Punkten, zum Nachtheil des Boëtius, von diesem unterscheidet. Dieser berühmte Schriftsteller giebt nicht die Formel zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks

vermittelst der drei Seiten, welche sich in dem Manuscript findet, und giebt die von den römischen Feldmessern angewandte ungenaue Regel zur Berechnung der Fläche eines Vierecks, welche dort nicht gefunden wird.

Indem Boëtius die beiden Formeln zur Construction eines rechtwinkligen Dreiecks in ganzen Zahlen, wenn eine der Seiten bekannt ist, angiebt, schreibt er die, bei welcher diese Seite eine gerade Zahl ist, dem Archytas zu. Proclus nennt, wie man weiss, Plato als den Erfinder dieser Formel und Pythagoras als den der andern.

Mit diesem Buch über praktische Geometrie hat man eine andre Partie verbunden, welche sich in keinem Manuscript des Boëtius findet und wovon Folgendes der Inhalt ist. Nach einer Art von Abhandlung über den Ursprung, die Nützlichkeit und die Vorzüglichkeit der Geometrie, erzählt Boëtius den Inhalt eines Briefs von J. Cäsar, aus dem man ersieht, dass dieser grosse Mann verlangte, in dem ganzen römischen Reich und in seinen Kolonien solle die Geometrie als Regel für Alles dienen, was sich auf das Messen und Begrenzen der Länder, auf die öffentlichen und Privat-Gebäude, auf die Befestigung der Städte und auf die grossen Heerstrassen bezöge. Der Verfasser zählt sodann die verschiedenen Materien auf, welche zu Streitigkeiten bei der Ländervermessung Veranlassung geben können. Er nennt die Eigenschaften, welche ein Feldmesser besitzen müsse, und führt die Namen derjenigen an, welche die meiste Berühmtheit erlangt haben, und die Namen der Herrscher, auf deren Befehl sie gearbeitet haben. Sodann giebt er ein Verzeichniss der verschiedenen Grenzen, deren man sich zur Unterscheidung der Provinzen, der Strassen und der Privat-Besitzungen bediente. Darauf nennt er die Kenntnisse, welche in der Arithmetik und in der Geometrie erforderlich sind, um ein vollkommner Geometer zu sein. Diese Kenntnisse umfassen: die Eigenschaften der Zahlen und ihre Eintheilung in gerade, ungerade, zusammengesetzte u. s. w. Zahlen; die logische Ordnung, welche man in der Geometrie befolgen muss; die Definition der Figuren, welche der elementarste Theil dieser Wissenschaft betrachtet; und die verschiedenen, bei den römischen Feldmessern gebräuchlichen Maasse.

Zuletzt wird das Werk mit einem Bruchstück beschlossen, welches nur die Arithmetik betrifft, und von dem wir erkannt haben, dass es in der That nur eine Zusammenstellung verschiedener Stellen aus dem ersten Buch der Arithmetik des Boëtius ist, in folgender Ordnung: aus dem Kapitel 32, aus der Vorrede und aus den Kapiteln 1, 2, 1, 32, 19, 20, 22, 12, 26 und 27. Dieses ganze Stück ist

ohne Zweifel der Geometrie des Boëtius fremd und mit Unrecht damit durch einen Compilator verbunden.

Die Ausgaben des Boëtius und der grösste Theil der Manuscripte enthalten nur zwei Bücher über Geometrie. Es giebt jedoch einige Manuscripte, die fünf dergleichen enthalten. Libri führt ein solches in der Bibliothek von St. Laurent zu Florenz an.[149]) Wir sehen aus der *Bibliotheca bibliothecarum* von Montfaucon (T. I, p. 88), dass auch eines in der Bibliothek des Vatican existirt, mit einem *Werk über die Zahlen, in zwei Büchern* (*Boëtii de numeris duo libri*), welches von der Arithmetik verschieden zu sein scheint. Es ist sehr wünschenswerth, dass diese Manuscripte, welche für die Geschichte der Wissenschaft von Nutzen sein können, endlich aus dem Staube der Bibliotheken hervortreten möchten.

Ueber die Stelle in dem ersten Buch der Geometrie von Boëtius, welche sich auf ein neues Zahlensystem bezieht.

Die Stelle in der Geometrie des Boëtius, um die es sich hier handelt, scheint lange Zeit hindurch unbemerkt geblieben zu sein, obgleich die Manuscripte von den Werken dieses Schriftstellers nicht selten sind und obgleich seine Geometrie in den Jahren 1491, 1499 und 1570 gedruckt worden ist. Es war, wie ich glaube, erst um die Mitte des 17ten Jahrhunderts, dass Isaac Voss, in seinen Bemerkungen über die Geographie des Pomponius Mela, diese Stelle erwähnte und die darin enthaltenen neun *Charaktere* oder *Ziffern* anführte. Seitdem ist es eine oft behandelte Frage gewesen, zu erfahren, ob es wirklich unser Zahlensystem gewesen ist, von dem Boëtius hat sprechen wollen, und ob die Griechen davon Kenntniss gehabt haben, so wie er es berichtet.

Dieser historische Punkt gewährt sowohl an und für sich ein grosses Interesse, als auch weil es von besondrer Wichtigkeit sein muss, bei der allgemeinsten Untersuchung über den Ursprung des indischen Calculs und über die Wege, die er verfolgt hat, um sich so weit zu verbreiten und plötzlich unter uns, zu Anfang des 13ten Jahrhunderts, in zahlreichen Werken zu erscheinen.[150])

---

149) *Histoire des sciences en Italie*, p. 89.

150) 1) Das Werk von Leonhard Fibonacci von Pisa, welches so anfängt: *Incipit liber Abbaci, compositus a Leonardo filio Bo-*

Man ist jedoch bis jetzt noch nicht einstimmig über die wahre Bedeutung der Stelle bei Boëtius, und die am gewöhnlichsten angenommene Meinung spricht zu Gunsten einer andern Piece aus dem 10ten Jahrhundert, welche ein Brief und eine kleine Abhandlung ist, die Gerbert (der 999 unter dem Namen Sylvester II. Papst wurde) zugeschrieben werden, worin man unser Zahlensystem bemerkt. Dasselbe hat man wiederholt, seitdem Wallis in seiner Geschichte der Algebra die Meinung ausgesprochen hat, dass Gerbert der erste war, der uns das indische Zahlensystem lehrte, welches er von

---

nacci Pisano, *in anno* 1202; und in welchem sich auch, zum ersten Male in Europa, die Principien der Algebra finden.

2) Das *Werk über praktische Arithmetik* von Jordan Nemorarius (um 1200), das Manuscript geblieben ist in der Savilianischen Bibliothek, unter dem Titel: *Algorismus Jordani*, *tam in integris quam in fractis demonstratus.* Dieses Werk ist verchieden von der speculativen Arithmetik, in zehn Büchern, von demselben Verfasser, welche 1496 von Faber von Etaples herausgegeben und erläutert ist.

3) Die Abhandlung über Arithmetik von Sacro Bosco unter dem Titel: *Tractatus Algorismi*, 1236, in Versen, die mit folgenden anfangen:

Haec algorismus, ars praesens, dicitur in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris.

4) Eine Stelle aus dem *Speculum doctrinale* von Vincent von Beauvais (1194—1264), unter dem Titel: *De computo et algorismo* (Lib. XVI, Cap. 9), worin die Kenntniss unsrer neun Ziffern und ihrer Stellen-Werthe, so wie auch der Gebrauch der Null, vollständig auseinandergesetzt sind.

5) Der *Algorisme* oder *Traité d'Arithmétique*, in französischer Sprache von einem Ungenannten unter Philipp III. (1270—1285) geschrieben. (Daunou erwähnt in der Abhandlung über den Zustand der Wissenschaften im 13ten Jahrhundert in Frankreich, welche zu Anfang des XVIten Theils der *Histoire littéraire de la France* (in 4., Paris 1824) steht, dass dieser *Traité* in der Bibliothek der h. Genovefa unter Nr. BB, 2, in 4., existire; aber trotz aller wiederholten Nachsuchungen der Herren Conservatoren dieser Bibliothek haben wir denselben nicht finden können.)

6) Das Werk von Maximus Planudes, gegen das Ende des 13ten Jahrhunderts, in griechischer Sprache abgefasst, unter dem Titel *ψηφοφορία κατ' Ἴνδους, ἡ λεγομένη μεγάλη.*

Es ist höchst merkwürdig, dass von diesen Werken über Arithmetik, welche von so grossem Werth für die Geschichte der Wissenschaft sind und die einen bedeutenden Fortschritt des menschlichen Geistes bezeichnen, noch keines gedruckt ist.

Ausser diesen Werken giebt es noch Schriften aus derselben Zeit, so wie den Kalender von Roger Baco, die Briefe von Jordan Nemorarius, und die Werke *De sphaera* und *De computo* von Sacro Bosco, worin die arabischen Ziffern angewandt werden.

den Sarazenen in Spanien empfangen hatte. Dieselbe Meinung ist noch vor ganz Kurzem von dem berühmten Präsidenten der asiatischen Gesellschaft zu London, in seiner gelehrten Dissertation über den Ursprung der Algebra [151]), ausgesprochen.

Wir müssen aber hier anführen, dass es allein das Zeugniss eines Historikers des 12ten Jahrhunderts, William von Malmesbury (dessen Urtheil [152]) ein Jahrhundert später durch Vincent von Beauvais [153]) wiederholt wurde) ist, auf welches man diese Meinung über das Werk von Gerbert gegründet hat, da es selbst nur wenig gelesen worden ist und namentlich Wallis dasselbe nicht gekannt hat. Und, merkwürdig genug! wenn es die Prüfung dieses Werks gewesen wäre, welche der Meinung des Wallis zu Grunde gelegen hätte, so würden wir durchaus nicht anstehen zu sagen, dass die Frage über die Stelle des Boëtius durch sich selbst entschieden sei und dass dem Boëtius die Ehre gebühre, die man dem Gerbert zuschreibt. Denn die Vergleichung, welche wir zwischen dem Werke des Gerbert und der Stelle des Boëtius angestellt haben, lässt uns keinen Zweifel, dass es sich durchaus um denselben Gegenstand und um dasselbe Zahlensystem handelt und dass das eine so wie das andre denselben Ursprung hat. Diese Bemerkung, welche noch nicht gemacht ist, muss erst gerechtfertigt werden; ich will daher an einer andern Stelle darauf zurückkommen und dabei einiges Andre anführen, wozu das Werk von Gerbert Gelegenheit geben kann. [154]) Ich muss mich hier ganz allein

---

151) *This* (Gerbert), *upon his return, hi communicated to Christian Europe, teaching the method of numbers under the designation of* Abacus, *a name apparently first introduced by him* (rationes numerorum Abaci), *by rules abstruse and difficult to be understood, as William of Malmesbury affirms. It was probably owing to this obscurity of his rules and manner or treating the Arabian, or rather Indian arithmetic, that is made so little progresss between his time and that of the Pisan* (Leonhard von Pisa). (Colebrooke: *Brahmegupta and Bhascara, Algebra*, Dissert. p. LIII.)

152) *Abacum certe primus a Saracenis rapiens, regulas dedit, quae a sudantibus abacistis vix intelliguntur.* S. *De gestis Anglorum libri V.* (Lib. II, p. 64 et 65.)

153) *Speculum historiale.* Duaci 1624, in fol. S. Lib. XXIV, Cap. 98, p. 997.

154) Z. B. dieses Werk und der Zueignungsbrief, der demselben zur Vorrede dient, sind diese wirklich von Gerbert? Und wenn man annimmt, dass sie sich auf unser Zahlensystem beziehen (was ich glaube), ist ihr Ursprung direct bei den Sarazenen in Spanien zu suchen? Diese beiden Fragen, welche hier zum ersten Male aufgeworfen werden, seitdem man, auf die Autorität von Malmesbury, die Ehre

auf die Untersuchung der Stelle in der Geometrie von Boëtius einschränken, welche die wichtigste Partie in diesem Werk, besonders als einziges historisches Document ist.

Eine ziemlich wörtliche Uebersetzung, welche uns den Sinn dieser Stelle wieder zu geben scheint, ist folgende:

„Die Alten nannten gewöhnlich *digitus* jede Art von Zahl unterhalb der ersten *limes*, d. h. diejenigen, welche wir von Eins bis Zehn zählen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9."

„Sie nannten *articuli* alle die von der Ordnung der Zehner und der folgenden Ordnungen bis ins Unendliche[155];"

---

der Einführung des arabischen Systems dem Gerbert zugeschrieben hat, sind nicht ohne Interesse. Denn dieser Brief und dieses Werk, von denen man allgemein glaubt, dass sie Manuscript geblieben seien, sind vollständig unter dem Titel: *de numerorum divisione*, in den Werken des Beda (672 — 735), als von diesem Schriftsteller herrührend, gedruckt. Es ist sehr wunderbar, dass sie nicht bemerkt worden sind, besonders von Montucla und Delambre, welche beide über dieses Kapitel der mathematischen Werke von Beda sprechen. (S. *Histoire des Mathématiques*, T. I, p. 495, und *Histoire de l'Astronomie ancienne*, T. I, p. 322.)

Jetzt wird es vielleicht ein noch zu beantwortender Punkt in der Geschichte sein, zu wissen, ob der Brief und das Zahlensystem, welches man Gerbert zuschreibt, von ihm oder von Beda sind.

Ohne diese Frage entscheiden zu wollen, welche den gelehrten Schriftstellern zukommt, die die *Literär-Geschichte von Frankreich* fortsetzen, so erlauben wir uns doch zu bemerken, dass die grosse Aehnlichkeit in Hinsicht auf den Gegenstand und selbst auf die Worte, welche wir zwischen diesem Werke und der Stelle des Boëtius finden, uns bewegt, es von dem Schriftsteller, der diesem letztern am nächsten ist, zu glauben; d. h. von Beda, welcher nur zwei Jahrhunderte später ist. Ein andrer Grund ist der, dass zur Zeit Gerbert's die Mauren in Spanien, so wie die Inder und Araber, sich der *Null* (oder des *Punkts*, als *Null*) bedienen mussten; so dass Gerbert, indem er ihr Zahlensystem lieferte, von der Null Gebrauch gemacht und ausdrücklich gesprochen hätte, wovon wir aber in dem genannten Werke keine Spur finden, in welchem wir annehmen, dass dieses Hülfszeichen durch die Anwendung der Columnen ersetzt wurde, wie bei Boëtius, worüber wir noch sprechen werden. Eine dritte Betrachtung endlich, welche die Meinung zulässig macht, dass Beda dieses Werk hat schreiben können, ist das, dass man unsre Ziffern in einigen sehr alten Manuscripten der Werke dieses Schriftstellers findet, wie Wallis es in seiner Geschichte der Algebra (p. 11) bemerkt hat.

155) D. h. jedes Zehnfache oder Hundertfache etc. eines *digitus*. Diese Eintheilung der Zahlen in *digiti* und *articuli* hatte besonders zum Zweck, der Ziffer der Einer und der der Zehner bei einer durch zwei Ziffern ausgedrückten Zahl, wie bei 27, specielle Benennungen zu geben, weil diese beiden Ziffern, in der Rechnung betrachtet, sehr wohl nicht gerade wirkliche Einer und Zehner bedeu-

„*Numeri compositi* alle die zwischen der ersten und zweiten *limes* begriffenen, d. h. zwischen Zehn und Zwanzig und alle folgenden mit Ausschluss der *limites*;"

„Und *numeri incompositi* sind alle *digiti* und *limites*." 156)

---

ten können. Dieses ist z. B. der Fall. wenn die Zahl 27, bei einer Multiplication, aus dem Produkt der ersten Ziffer des Multiplicators in die zweite oder dritte Ziffer des Multiplicandus entsteht.

Die Benennungen *digitus* und *articulus* verdienen hier besonders bemerkt zu werden, denn man kann sagen, dass sie allein hinreichen würden, um anzuzeigen, dass von unserm Zahlensystem die Rede ist, mit welchem sie seitdem beständig vorkommen: im 10ten Jahrhundert oder früher in dem Werke, das Gerbert zugeschrieben wird; im 13ten Jahrhundert in den Werken von Sacro Bosco, von Vincent de Beauvais, etc.; und beim Wiederaufleben der Wissenschaften in allen Behandlungen der Arithmetik, welche immer so wie diese Stelle des Boëtius anfangen. (S. *Opusculum de praxi numerorum quod algorismum vocant*, ein sehr altes Werk, gefunden und herausgegeben im Jahr 1503, durch Jodocus Clichtoveus; *Margarita philosophica*; *Summa de Arithmetica* von Luca del Borgo; *Algorithmus demonstratus* von Schoner; *Septem partium Logisticae arithmetices quaestiones* von Schroter; *Arithmetica practica in quinque partes digesta*, von Morsianus; *Arithmetica practica libris IV absoluta* von Orontius Finaeus; *Arithmeticae practicae methodus facilis*, von Gemma Frisius, etc.)

156) Also waren die *limites* Zahlen, und keine andern als die *articuli*.

Es gab daher, in Wirklichkeit, nur drei Arten von Zahlen, die *digiti*, *articuli* und *numeri compositi*. Diese Eintheilung der Zahlen in drei Arten wurde, beim Wiederaufleben der Wissenschaften, in allen Behandlungen der Arithmetik angeführt. Das Wort *limes* wurde auch in mehren Werken angewandt; aber es bezeichnete nicht Zahlen, sondern es wurde nur auf einen Inbegriff von Zahlen angewandt. Man nannte *limites* die verschiedenen Ordnungen der Einer, Zehner, Hunderte u. s. w., welche die Griechen ἐννεάδες nennen. So war *primus limes* die Ordnung, in welcher die Einer, *secundus limes* die Ordnung, in welcher die Zehner u. s. w. enthalten sind.

Die folgende Stelle aus dem *Algorithmus demonstratus* von Schoner giebt sehr genau die Bedeutung der Worte *digitus*, *articulus*, *numerus compositus* und *limes* an.

Digitus est omnis numerus minor decem. Articulus est omnis numerus, qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum, et sic in infinitum. Separantur autem digiti et articuli in limites. Limes est collectio novem numerorum, qui aut digiti sunt, aut digitorum aeque multiplices, quilibet sui relativi. Limes itaque primus digitorum. Secundus primorum articulorum. Tertius est secundorum articulorum. Et sic in infinitum. Numerus compositus est qui constat ex numeris diversorum limitum. Item numerus compositus est qui pluribus figuris significativis repraesentatur.

„Die multiplicirenden Zahlen vertauschen unter einander ihren Platz; d. h. bald ist die grössere Multiplicator der kleinern, und bald ist die kleinere Multiplicator der grössern. Oft ist eine Zahl Multiplicator von sich selbst. Aber die kleinern Zahlen sind immer Divisoren der grössern."

. . . .

„Die Pythagoräer hatten, um Irrthümer in ihren Multiplicationen, Divisionen und Messungen zu vermeiden (denn sie besassen in allen Dingen ein Genie für Erfindung und Subtilität), zu ihrem Gebrauch eine Tafel erdacht, die sie zur Ehre ihres Meisters *pythagoräische* Tafel nannten; weil sie zu dem, was sie entwarfen, die erste Idee von diesem Philosophen erhalten hatten. Diese Tafel wurde von den Neuern *abacus* genannt."

„Durch dieses Mittel, welches sie durch ihre Geistes-Anstrengung gefunden hatten, konnten sie die Kenntniss leichter zur gebräuchlichen und allgemeinen machen, indem sie es, so zu sagen, dem Auge darlegten. Sie gaben dieser Tafel eine sehr vorzügliche Gestalt, welche hier unten dargestellt wird."

Hier findet sich die *Tafel der Multiplication* in den Ausgaben des Boëtius und wahrscheinlich in den Manuscripten, welche die verschiedenen Schriftsteller, die über diese Stelle gehandelt haben, zu ihrer Disposition gehabt haben; denn sie haben immer unter dieser Voraussetzung gesprochen und besonders hat sich daraus Weidler ein Argument gebildet, um zu beweisen, dass es unsre Ziffern und unser Zahlensystem gewesen sind, welche Boëtius beschrieben hat. 157) Diese Tafel des Pythagoras findet sich aber nicht in einem sehr vorzüglichen Manuscript aus dem 11ten Jahrhundert, welches der Bibliothek zu Chartres gehört und welches oft correcter ist, als die Ausgabe von 1570. Dieser Umstand hat bei mir die Idee erzeugt, dass es vielleicht nicht die *Tafel der Multiplication* (welcher man, auf die Autorität dieser Stelle hin, den Namen des *Pythagoras* gegeben hat) war, von der Boëtius wirklich gesprochen hat. Und ich bin seitdem zu dem Glauben gekommen, dass die Schwierigkeit, welche man darin gefunden hat, den Aussprüchen des Verfassers einen Sinn unterzulegen, nur daher kam, dass man dieselben auf diese *Tafel der Multiplication* anwenden wollte. Was soll man aber an ihre Stelle setzen? Unser

---

157) *Spicilegium observationum ad historiam numeralium pertinentium*, etc. Wittenberg 1755, in 4. (28 Seiten.)

Manuscript antwortet durchaus nicht auf diese Frage; indess kann es uns auf den richtigen Weg führen.

Folgendes ist das, was wir gefunden haben.

In der ersten Zeile stehen die neun Charaktere, durch welche Boëtius die neun ersten Zahlen, Eins, Zwei, Drei .... Neun darstellt. Sie sind von der Rechten zur Linken geschrieben und über ihnen stehen ihre Namen, wie folgt:

QUIMAS.	ARBAS.	ORMIS.	ANDRAS.	IGIN.[158])
	SIPOS CELENTIS.	TEMENIAS.	ZENIS.	CALTIS.
@				

Hinter der Neun sieht man eine runde Figur, in welche der Buchstabe **a** eingeschrieben ist. Wir wollen später von diesem zehnten Zeichen sprechen.

Unter dieser ersten Zeile steht eine zweite, in welcher die römischen Ziffern I, X, C, M, $\overline{X}$, $\overline{C}$, M.$\overline{I}$ etc. von der Rechten zur Linken geschrieben sind.

Drei andre Zeilen sodann enthalten, in römischen Ziffern, andre Zahlen, welche die Hälfte, der vierte und der achte Theil dieser ersten sind.

In zwei andern Zeilen endlich stehen andre römische Charaktere, welche die Theile der *uncia* angeben, und in einer folgenden sind die Zahlen 1, 2, 3, 4 .... 12 in römischen Ziffern geschrieben.

Von diesem Allen nehmen wir nur die Zeile der Ziffern I, $\overline{X}$, C, M, $\overline{X}$, etc., und nehmen an, dass die *Tafel*, von der Boëtius spricht, „welche die Alten", wie er sagt, „*Tafel des Pythagoras* nannten und welcher die Neuern den Namen *Abacus* gegeben haben", nicht die *Tafel der Multiplication* war, sondern nur ein Tableau, das dazu bestimmt war, die Rechnungen in dem neuen Zahlensystem zu machen, welches er auseinandersetzen will.

---

158) Diese Namen waren schon in einem Manuscripte von dem gelehrten Orientalisten Greaves gefunden. Der berühmte Huet, Bischof von Avranche, glaubte, dass sie späterhin in dem Boëtius zu Gunsten der Orientalisten hinzugefügt wären, zur Zeit, als die arabische Literatur bei uns eingeführt wurde. Er schreibt den vier, *Arbas*, *Quimas*, *Zenis* und *Temenias* einen ebräischen Ursprung zu. (*Demonstratio Evangelica*, Prop. IV. S. auch Heilbronner, *Historia matheseos*, p. 744.)

Das, was die erste Tafel charakterisirt und wodurch sie zu diesem Gebrauch geeignet wird, ist dieses.

Oben war eine Horizontallinie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, und von diesen Theilungspunkten gingen Vertikalstriche herab. Diese Linien, zu je zwei genommen, bildeten die *columnae.*

Auf den Theilen der horizontalen Linie, welche zwischen diesen Columnen lagen, waren, von der Rechten zur Linken gehend, die römischen Ziffern I, X, C, M, $\overline{X}$, $\overline{C}$, M.$\overline{I}$, X.M.$\overline{I}$ etc. geschrieben, welche Eins, Zehn, Hundert, Tausend, Zehntausend, Hunderttausend, Tausendtausend, Zehntausendtausend u. s. w. bedeuten; wie folgt:

$X\overline{I}M\overline{I}$	$\overline{I}M\overline{I}$	$CM\overline{I}$	$XM\overline{I}$	$M\overline{I}$	$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I

Mit Hülfe dieses Tableaus, welches für die Multiplications-Tabelle substituirt wurde, können wir, wie ich glaube, dem Text des Boëtius, wovon ich die Uebersetzung liefern will, einen verständlichen Sinn unterlegen.

„Die Art, auf die man sich des eben beschriebenen Tableaus bediente, ist folgende. Man hatte *apices* und *characteres* von verschiedener Form. Einige bilden sich Zeichen für die *apices,* so dass der Eins entspricht, der Zwei, der Drei, der Vier, der Fünf, der Sechs, der Sieben, der Acht, der Neun. [159]) Einige Andre wählen für die Anwendung dieses

159) Wir führen hier die neun Ziffern unter der Gestalt an, welche sie an dieser Stelle in unserm Manuscript haben. Mehre sind, wie man sieht, von denen verschieden, welche sich ausserhalb des Textes befinden, was uns annehmen lässt, dass diese von irgend einem Abschreiber hinzugefügt sind. Dieses bestätigt uns in der Meinung, dass diese Reihe von Ziffern, in der ursprünglichen Schrift von Boëtius, nicht zu dem *Tableau* gehört, von dem er spricht; und dass dieses Tableau nur aus Vertikal-Columnen bestand, oberhalb welcher die Zahlen Eins, Zehn, Hundert, Tausend u. s. w. standen, welche Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. bezeichneten.

Tableaus die Buchstaben des Alphabets, so dass der erste der Eins, der zweite der Zwei, der dritte der Drei und die folgenden den Zahlen in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge entsprechen. Andre endlich begnügten sich, bei diesen Operationen die Charaktere anzuwenden, die schon vor ihnen zur Bezeichnung der natürlichen Zahlen gebraucht waren. Dieser *apices* (welche sie auch waren) bedienten sie sich gleich wie des Staubes [160]), so dass sie, wenn sie dieselben unter die Einheit setzten, immer *digiti* bedeuteten."

Dieser letzte Satz und die folgenden sind von grosser Wichtigkeit. Wir glauben darin gerade das zu sehen, was den eigentlichen Charakter unsres Zahlensystems ausmacht, d. h. *die Bedeutung der Stellung der Ziffern.* Um dieselben zu begreifen, muss man seine Aufmerksamkeit auf das oben genannte und gezeichnete Tableau wenden. Denn in ihnen zeigt sich die Nützlichkeit und der Gebrauch dieses Tableaus.

Wir nehmen den letzten Satz des Boëtius wieder auf und fahren fort:

„Wenn diese verschiedenen *apices* unter die Einheit (d. h. in die *Columne der Einer*) gestellt werden, so stellen sie immer *digiti* vor. Wenn man die erste Zahl, d. h. Zwei (denn die Einheit ist, wie in der Arithmetik gesagt wurde, nicht selbst eine Zahl, sondern der Ursprung und das Fundament der Zahlen), wenn man also *Zwei* unter die Linie, die mit der *Zehn* bezeichnet war, stellte, so kam man darin überein, dass sie *Zwanzig* bedeutete; die *Drei*, *Dreissig*; die *Vier*, *Vierzig*; und den andern folgenden Zahlen gab man die Bedeutung, welche aus ihrer eigenthümlichen Benennung folgte."

„Wenn man dieselben *apices* unter die Linie, welche mit Hundert bezeichnet war, stellte, so setzte man fest, dass 2, *Zweihundert* bedeutete; 3, *Dreihundert*; 4, *Vierhundert*, und dass die andern den andern Benennungen entsprächen.

„Und so weiter fort in den folgenden Columnen. Dieses System war keinem Irrthum unterworfen."

Man kann, wie ich glaube, hierin eine hinlänglich deutliche Beschreibung des Princips unsres Zahlensystems, nämlich des *Werths der Ziffern nach ihrer Stellung*, erken-

---

160) *Ita varie ceu pulverem dispergere ....* Boëtius spielt ohne Zweifel auf den Staub, oder *pulvis eruditus* des Cicero (*De natura Deorum*, Lib. II) an, welchen die Alten auf ihren *abacis* ausstreuten, um ihre geometrischen Figuren darin zu zeichnen.

nen, indem derselbe in einer Progression der Zehn von der Rechten zur Linken fortschreitet. Die *Columnen*, welche er anwandte und welche in dem Text ausdrücklich durch das Wort *paginula* oder *pagina* bezeichnet sind, gestatteten die Null zu vermeiden, weil man da, wo wir sie jetzt brauchen, eine leere Stelle liess. Eine Stelle in der Arithmetik des Planudes stimmt mit dieser Annahme überein, dass man ursprünglich in unserm Zahlensystem sich der Columnen bedient habe, welche die Null überflüssig machten. Denn Planudes sagt, dass die Null *sich an die leeren Stellen setzte*; und *so wie die Stellen die Werthe der Ziffern erhöhen, eben so thäten es die Nullen, welche die leeren Stellen ausfüllten.*[161]) Man hatte also vor dem Gebrauch der Null leere Stellen, was nicht anders geschehen konnte, als vermittelst Columnen. Wenn man diese Columnen hat weglassen und sich nicht an den Gebrauch eines, zu dieser Art von Rechnung vorbereiteten Tableaus hat binden wollen, so hat man dieselben vielleicht nur da stehen lassen, wo sich Nullen fanden; so dass alsdann zwei kleine vertikale Striche (die eine Columne bildeten) die Stelle der Null vertraten. Sodann hat man diese Figur in die der jetzigen Null umgewandelt, welche von einer einfachen Zeichnung ist.

Nach einer gedrängten Auseinandersetzung des Princips des neuen Zahlensystems, giebt Boëtius die Regeln für die *Multiplication* und *Division* auf folgende Weise:

„Bei den Multiplicationen und Divisionen muss man sorgfältig beachten, in welche Columne man die *digiti* und in welche man die *articuli* stellt. Denn wenn eine Anzahl von *Einern* der Multiplicator einer Anzahl von *Zehnern* ist, so stellt man die *digiti* unter die Zehner und die *articuli* unter die Hunderte; wenn dieselbe Zahl Multiplicator einer Anzahl von Hunderten ist, so stellt man die *digiti* unter die Hunderte und die *articuli* unter die Tausende; wenn sie der Multiplicator einer Anzahl von Tausenden ist, so stellt man die *digiti* unter die Tausende und die *articuli* unter die Zehntausende; und wenn sie der Multiplicator einer Anzahl von Hunderttausenden ist, so stellt man die *digiti* unter die Hunderttausende und die *articuli* unter die Tausendtausende."

„Wenn aber eine Anzahl von Zehnern Multiplicator einer Anzahl von Zehnern ist, so stellt man die *digiti* in die durch Hundert bezeichnete Columne und die *articuli* unter die Tausende";

„Wenn sie der Multiplicator einer Anzahl von Hunder-

161) Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I, p. 519.

ten ist, so stellt man die *digiti* unter die Tausende und die *articuli* unter die Zehntausende;"

„Bei einem Multiplicator aus den Tausenden stellt man die *digiti* in die Columne der Zehntausende und die *articuli* in die der Hunderttausende;"

„Und bei einem Multiplicator aus den Hunderttausenden stellt man die *digiti* unter die Tausendtausende und die *articuli* unter die Zehntausendtausende."

„Aehnlich wenn der Multiplicator zu den Hunderten gehört, u. s. w. u. s. w."

Diese ganze Stelle ist sehr verständlich und entspricht vollkommen den Regeln, welche wir bei der Multiplication beobachten; sie bestätigt hinreichend den Sinn, welchen wir den vorhergehenden Sätzen beigelegt haben. Diese Stelle ist es hauptsächlich, in welcher man die Analogie mit unserm Zahlensystem findet.

Es folgen sodann die Regeln der Division. Der Verfasser fängt so an:

„Jetzt werden die Divisionen beliebig grosser Zahlen, um die es sich etwa handelt, leicht werden für den Leser, dessen Geist durch das Vorhergehende vorbereitet ist. Wir wollen daher hierüber nur summarisch sprechen; und wenn sich dabei irgend eine Schwierigkeit vorfindet, so wollen wir die Mühe, sie zu heben, der Aufmerksamkeit des Lesers überlassen."

Die Dunkelheit des Textes erlaubt uns nicht die Fortsetzung zu übersetzen; wir vermuthen, dass sie uns verstümmelt und lückenhaft überliefert ist. Aber diese Fortsetzung ist nicht nothwendig, um unsre Meinung über das von Boëtius auseinandergesetzte Zahlensystem festzustellen. Das Vorhergehende genügt.

Die Regeln, welche der Verfasser für die Division giebt, scheinen uns, sich auf folgende fünf zurückzuführen:

1. Man dividire Zehner durch Zehner, Hunderte durch Hunderte, u. s. w.;
2. Man dividire die Zehner, oder die Hunderte, oder die Tausende, u. s. w., durch die Einer; oder auch die Hunderte, oder die Tausende, u. s. w., durch die Zehner.
3. Man dividire die Zehner oder eine aus Zehnern und Einern zusammengesetzte Zahl durch eine aus Zehnern und Einern zusammengesetzte Zahl;
4. Man dividire die Hunderte oder Tausende u. s. w. durch eine aus Zehnern und Einern zusammengesetzte Zahl;
5. Endlich dividire man die Hunderte oder Tausende durch eine aus Hunderten und Einern zusammengesetzte Zahl.

Hier endigt das erste Buch der Geometrie von Boëtius.

Die angeführte Stelle ist die einzige, welche man als eine solche citiren kann, die von einem neuen Zahlensystem handelt, und sie ist auch wahrscheinlich die einzige in den Manuscripten, welche man bis jetzt bearbeitet hat. Aber dasjenige, welches wir vor Augen haben, enthält noch am Ende des zweiten Buchs eine zweite Stelle über denselben Gegenstand, welche bekannt zu werden verdient, da sie uns ausdrücklich auf den Werth der Stellung der Ziffern hinzuweisen scheint. Es ist folgende.

Nach dem Tableau der Brüche einer Unze fügt Boëtius hinzu:

„Bei der Bildung des obigen Tableaus bedienten sie (die Alten) sich Charaktere von verschiedener Art und verschiedener Form. Wir aber bedienen uns in jedem Werke dieser Gattung nicht andrer, als derer, welche wir bei der Construction des *Abacus* bezeichnet haben. Wir haben die erste Linie dieses Tableaus den Einern zuertheilt, die zweite den Zehnern, die dritte den Hunderten, die vierte den Tausenden, und endlich die andern Linien den *limites*[162]) der andern Zahlen. Wenn man *apices* in die erste Linie setzt, so werden sie Einer darstellen, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende u. s. w. f. in den andern."

Darauf giebt Boëtius die Werthe für die Theile der Unze, von denen er vorher die Namen angegeben hat, *digitus*, *statera*, *quadrans*, *drachma* etc.

Diese ganze Stelle schliesst sich offenbar an das Tableau der Eintheilungen der Unze an und muss in dem Werke des Boëtius wiederhergestellt werden.

Aus dem Vorhergehenden glauben wir schliessen zu können, dass das von Boëtius auseinandergesetzte Zahlensystem das Decimalsystem ist, in welchem die neun Ziffern, deren er sich bedient, ihren Werth von ihrer Stellung empfangen, indem diese in einer Progression nach Zehn von der Rechten zur Linken fortschreitet; und dass dieses Zahlensystem genau das der Inder und Araber und unser gegenwärtiges war, nur mit dem geringen Unterschiede, dass in der Anwendung die Stellen, wo wir eine Null setzen, frei blieben, und dass diese zehnte Hülfsfigur durch die Anwendung der

---

162) Hier giebt Boëtius dem Wort *limes* eine ähnliche Bedeutung, als es bei den Neuern angenommen hat. Siehe in einer frühern Note die Stelle, welche wir aus dem *Algorithmus demonstratus* von Schoner angeführt haben.

Columnen, welche die Ordnung der Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. angaben, ersetzt wurde.

Wir müssen hier hinzufügen, dass in dem Manuscript, dessen wir uns bedienten, nach den neun Ziffern, die mit ihren Namen in einer Linie angegeben waren, sich hinter der Neun noch ein zehntes Zeichen befindet, welches eine Rundung darstellt, in deren Mitte ein kleines lateinisches **a** steht. Dieses zehnte Zeichen bedeutet höchst wahrscheinlich die Null; das darin eingeschriebene **a** ist vielleicht der Endbuchstabe des Worts *syphra*, oder der erste des Worts *arcus*, welches wir in einem andern Stück, das in demselben Manuscript enthalten ist und sich auf dasselbe Zahlensystem bezieht, angewandt finden, um das Wort *columna* auszudrücken, weil über den hier verzeichneten Columnen Kreisbögen stehen, so dass dieser Buchstabe **a** andeuten will, dass die *Rundung* eine Columne vertritt. Dieser Ursprung der Null wäre sehr natürlich.

Wir nehmen nicht an, dass sich dieses zehnte Zeichen in der Autographie des Boëtius selbst finde; sie wird später hinzugefügt sein. Aber es ist gut, dieselbe in einem Manuscript des 11ten Jahrhunderts zu bemerken, weil es eine Meinung ist, die von sehr angesehenen Schriftstellern getheilt wird, dass die Null erst zu Anfang des 13ten Jahrhunderts von Fibonacci eingeführt wurde.

Der Sinn, welchen wir der Stelle des Boëtius gegeben haben, beruht auf der doppelten Annahme, dass das Wort *abacus*, welches dabei gebraucht wird, sich nicht auf die *Tafel der Multiplication* anwendet, wie man es bisher angenommen hat, sondern vielmehr auf ein *Tableau* einer besondern Disposition, welches sich für die Anwendung der Zahlen in unserm Zahlensystem eignet. Diese doppelte Annahme ist nicht im Widerspruch mit den literarischen Documenten, welche uns über die alte Bedeutung des Worts *abacus* übrig geblieben sind, und findet sich durch die Bedeutung bestärkt, welche dasselbe im Mittelalter angenommen und noch im 16ten Jahrhundert besessen hat.

In der That:

1) Man weiss von verschiedenen griechischen oder römischen Autoren, die sich vor Boëtius der Worte *ἄβαξ* oder *abacus* bedienten, dass sie dadurch eigentlich ein *Tableau* bezeichneten, *auf welchem die Alten ihre arithmetischen Rechnungen und ihre geometrischen Figuren ausführten.* (S. Polybius, Lib. V; Plutarch, *Vita Catonis Uticensis*, am Ende; Persius, Sat. 1, v. 131; Martianus Capella, *De nuptiis Philologiae et Mercurii*, Lib. VI, *de Geometria.*)

2. Vor Boëtius ist durchaus nicht, weder von der *Tafel der Multiplication* noch von der *Tafel des Pythagoras* gesprochen; es gründet sich nur auf die Autorität dieser Stelle seiner Geometrie, wo sich in den Manuscripten die *Tafel der Multiplication* findet, dass man seitdem auf diese Tafel die Namen *mensa pythagorica* und *abacus pythagoricus* angewandt hat.

Und man muss bemerken, dass Boëtius in seinem Werk über Arithmetik, worin er von dieser Tafel bedeutenden Gebrauch macht, um die Eigenschaften der Zahlen, nach ihren verschiedenen Kategorien, als dreieckige, fünfeckige u. s. w. betrachtet, ins Licht zu setzen, sie nie mit dem Namen des *Pythagoras*, oder mit dem Ausdruck *abacus* bezeichnet.

Nach Boëtius findet man nur einen einzigen alten Autor, Beda, welcher *mensa pythagorica seu abacus numerandi* eine Tafel der Multiplication nennt, welche ausgedehnter als die bei uns gebräuchliche ist. Aber man muss erst feststellen, ob dieser doppelte Titel wirklich in den Manuscripten des Beda, und besonders in den ältesten, steht.

3. Das Wort *abacus* wird in dem Brief und in dem Werk *De numerorum divisione*, welche man dem Gerbert zuschreibt, angewandt und bezeichnet dort offenbar nicht die Tafel der Multiplication, sondern vielmehr das neue Zahlensystem, welches der Verfasser auseinandersetzt. Dieses System ist aber, wie wir in einer frühern Note gesagt haben, durchaus dasselbe, als das des Boëtius; wir müssen also daraus schliessen, dass, auch bei Boëtius, das Wort *abacus* eine besondre, auf dieses System bezügliche Bedeutung habe.

Wir nehmen daher an, dass Boëtius sich des Worts *abacus* (dazu, vielleicht, *pythagoricus* verstanden) bedient habe, das Tableau zu bezeichnen, das sich zur Ausführung der Rechnungen nach dem neuen Zahlensystem eignete; und dass ein späterer Schriftsteller, wie Gerbert, diesen Namen dem System selbst gegeben habe.

Diese Conjectur scheint durch die Meinung bestätigt zu werden, welche Wallis auf zahlreiche historische Documente gegründet hat, dass nämlich das Wort *abacus*, im Mittelalter und beim Wiederaufleben der Wissenschaften, als synonym mit *algorismus* gebraucht worden ist (*De Algebra tractatus*, p. 16), dass das eine so wie das andre den Gebrauch der Zahlen mit arabischen Ziffern, d. h. unser Zahlensystem, bezeichnet habe[163]) (*ibid.*, p. 19); und dass, wenn

---

163) Wir sehen in der That, dass zu Anfang des 13ten Jahrhunderts Fibonacci sein Werk über Arithmetik *Liber abbaci* nannte.

man bei irgend einem Autor das Wort *algorismus* findet, man mit Bestimmtheit daraus schliessen kann, dass diese Ziffern zur Zeit dieses Schriftstellers bekannt waren. 164)

Die Stelle in der Geometrie des Boëtius und das dem Gerbert zugeschriebene Werk *de numerorum divisione* sind bis jetzt die einzigen alten Denkmäler unsres Zahlensystems, welche uns bekannt waren. Wir haben noch ein drittes gefunden, hinter der Geometrie des Boëtius, in dem Manuscript des 11ten Jahrhunderts, von dem wir schon gesprochen haben. Wir werden dieses Stück in einer andern Schrift bekannt machen. Es bestätigt, wie ich glaube, den Sinn, den wir der Stelle bei Boëtius gegeben haben. Die neun Ziffern führen darin die Namen *igin*, *andras* etc.; und ihre Werthe, d. h. die Zahlen, welche sie ausdrücken, sind durch folgende neun Verse angegeben:

Ordine primigeno 165) *nomen possidet Igin.*
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post numerus non compositus sibi primus.
Denique bis binos succedens indicat Arbas.
Significat quinos ficto de nomine Quimas.

Ein Jahrhundert später wurde ein andrer italienischer Autor, Paolo di Dagomari, der als Geometer, Astronom und Literator Berühmheit erlangt hatte, *Paolo dell' abbaco* zubenannt, wegen seiner grossen Gewandtheit im Calcul.

Zu Ende des 15ten Jahrhunderts sagt Lucas Paccioli, dass unser System der Arithmetik *abacus* genannt ist, um in der Weise der Araber, *muodo arabico*, zu sprechen; dass aber nach Andern dieses Wort sich aus dem Griechischen ableite. (*Summa de Arithmetica. Distinctio* 2a; *de numeratione.*)

Ein Werk aus derselben Zeit, von Fr. Pellos, hat zum Titel: *Sen segue de la art de arithmeticha, e semblantment de jeumetria dich ho nonimat compendion de lo Abaco .... complida es la opera per Fr. Pellos .... Impresso in Thaurino, lo present compendion de Abaco per ....* 1492.

Clichtoveus endlich, zu Anfang des 16ten Jahrhunderts, nennt sein Werk über Arithmetik *Praxis numerandi quem abacum dicunt*, und verbindet damit ein ähnliches Werk eines alten Autors, der ihm unbekannt ist, unter dem Titel: *Opusculum de praxi numerorum quod algorismum vocant.* Dieses beweist hinlänglich, dass zur Zeit des Clichtoveus *abacus* und *algorismus* synonym waren und sich auf unser Zahlensystem anwandten, wie es Wallis geglaubt hat.

164) *Et ubicunque in scriptore aliquo Algorismi nomen reperitur, certo concludas figuras hasce ea aetate fuisse cognitas* (*De Algebra Tractatus*, p. 12).

165) Hier findet sich im Manuscript eine leere Stelle. Das Wort *sibi* würde passen.

Sexta tenet Calcis perfecto munere gaudens.
Zenis enim digne septeno fulget honore.
Octo beatificos Termenias exprimit unus.
Hinc sequitur Sipos est qui rota namque vocatur.[166])

Wir haben uns in dieser Note nur damit beschäftigt, die wahre Bedeutung der Stelle bei Boëtius zu untersuchen und unsre Meinung über die Frage festzustellen, ob sich dieselbe auf unser Zahlensystem bezieht. Es giebt aber diese Stelle noch zu einer andern Frage Veranlassung, die auch schon häufig besprochen ist und darin besteht, zu wissen, ob, wie Boëtius sagt, dieses System den Pythagoräern bekannt gewesen ist. Mehre Schriftsteller[167]) haben es geglaubt; der grösste Theil jedoch konnte es nicht zugeben, dass die Griechen ein Zahlensystem besessen, das vorzüglicher als das ihrige war, und dass sie die Vorzüglichkeit so sehr verkannt hätten, dass sie es konnten in Vergessenheit kommen lassen. Dieser Einwurf ist bedeutend; und Montucla nimmt, um darauf zu antworten, an, dass es sich von den Griechen aus einer spätern Zeit handle, wo die Kenntniss und die Liebe zu den Wissenschaften schon in Verfall geriethen. Diese Annahme lässt sich hören; ist es denn aber nothwendig, hierzu seine Zuflucht zu nehmen? Wir glauben, dass Montucla es nur deshalb gethan hat, weil man den Unterschied, welcher zwischen dem Zahlensystem der Griechen und dem der Inder besteht, so wie auch die vermeintliche Schwierigkeit, mit dem erstern zu operiren, im Allgemeinen übertreibt. Uns scheint es, dass, im Gegentheil, die beiden

166) Dieser letzte Vers bezieht sich hier auf die Ziffer 9. Im Verfolg der Schrift jedoch wird die 9 *celentis* genannt. Welches ist der Grund dieses doppelten Namens, *sipos* und *celentis*, welcher sich auch, wie wir oben gesagt haben, in dem Manuscpript des Boëtius findet?

In dieser neuen Schrift bemerkt man hinter den neun Ziffern, so wie auch in dem des Boëtius, eine Rundung, welche ohne Zweifel die *Null* vorstellt. War das Wort *sipos* nicht ursprünglich für diese zehnte Figur bestimmt, zu der sie so gut passt? Dann würde hier ein Vers für die Ziffer 9, *celentis*, fehlen.

Wir überlassen diese Fragen denjenigen Lesern, welchen die Kenntniss des Ebräischen die Beantwortung derselben erleichtern kann.

167) Conrad Dasypodius, Isaac Vossius, Huet, Dom Calmet, Eduard Bernard, John Weidler, Ward, Bayer, Villoison, Muntucla.

Zu Anfang dieses Jahrhunderts erschien in Italien eine neue Abhandlung über den Gegenstand, der uns hier beschäftigt, unter dem Titel: *Memorie sulle cifre arabiche*, Mailand 1813, in 4. Wir haben uns diese Schrift noch nicht verschaffen können.

Systeme sehr wenig von einander verschieden sind. Allen beiden liegt eine Progression nach Zehn zu Grunde, und beide drücken irgend eine Zahl auf dieselbe Art, durch Einer, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. aus, mit Hülfe der neun Grundzahlen Eins, Zwei, Drei ..... Neun, welche die Ordnung der Einer bilden und zur Bildung der Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. dienen. Mit einem Wort, die beiden Zahlensysteme beruhen beide, das eine so wie das andre, auf folgender Formel, welche die Zusammensetzung irgend einer Zahl ausdrückt:

$$N = A.10^{r} + B.10^{r-1} + C.10^{r-2} + \ldots + E.10^{1} + F,$$

wo jede der Zahlen *A*, *B*, *C* .... *E*, *F* eine der neun ersten Zahlen Eins, Zwei, Drei .... Neun ist.

Welches ist nun also der wirkliche Unterschied zwischen den beiden Zahlensystemen? Nachdem in beiden die neun Zahlen aus der Ordnung der Einer durch neun besondre Zeichen ausgedrückt sind, so stellen die Griechen die neun Zahlen jeder folgenden Ordnung durch andre verschiedene Zeichen dar, während die Inder die ersten neun Ziffern selbst dazu gebrauchen; deren verschiedene Werthe durch ihre Stellung unterschieden und bestimmt sind. Und da diese Stellen in beiden Systemen dieselben sind, so sieht man, dass die Rechnung nicht schwieriger in dem einen, als in dem andern sein kann, und dass man also keinen so sehr viel wichtigern Grund hat, das indische System, obwohl es ausgebildeter und vollständiger ist, für das griechische zu substituiren. Diese Substitution konnte zwar unter den Mathematikern geschehen, aber es dürfte nicht leicht gewesen sein, sie bei dem ganzen Volke einzuführen. Man findet den Beweis bei den Römern, deren Zahlensystem die Rechnung ausserordentlich lästig machte und die dasselbe nichts desto weniger beibehielten, obgleich sie das unendlich höher stehende System der Griechen kannten.

Ein Anfangs sehr wesentlich scheinender Einwurf gegen die Meinung derer, welche glauben, dass die Griechen das indische System gekannt haben, ist der, dass sie nach dem ihrigen nicht das Mittel besassen, sehr grosse Zahlen auszudrücken (sie blieben bei neun und neunzig Millionen stehen), und dass Archimedes ein Buch der *Principia* geschrieben hat, um diesen Fehler zu verbessern, und sich in seinem *Arenarius* eines Mittels bedient, welches er ausgedacht hat. Wenn in der Schule des Pythagoras, sagt man, das indische System bekannt gewesen wäre, so würde es auch Archimedes gekannt haben und dieser hätte nicht nöthig gehabt, Mittel aufzusuchen, um grosse Zahlen auszudrücken, weil es ge-

nügend gewesen wäre, dieses System vorzulegen. Wenn aber Archimedes ein neues System hat schaffen wollen, so könnte man daraus ohne Zweifel schliessen, dass er das der Inder nicht gekannt habe; dieses war aber gar nicht seine Absicht; er wollte nur ein Mittel finden, grosse Zahlen in dem Systeme der Griechen auszudrücken. Was hat das aber hiermit zu thun? Indem er von der Grenze, wo dieses System aufhörte, den Bedürfnissen der Rechnung zu genügen, ausging, wandte er auf dasselbe das indische System an, d. h. den *Stellenwerth* der Ziffern. Ist das ein Beweis, dass Archimedes dieses indische System nicht kannte? Kann man selbst sagen, dass er nicht davon gesprochen habe in seinem Buch der *Principia*, welches nicht auf uns gekommen ist und welches sich auf die Numeration bezog und auf das System der Griechen das Princip von dem Stellenwerth der Ziffern anwandte? In seinem *Arenarius* hatte er keine Veranlassung, in das Detail einzugehen, welches sich in seinen *Principiis* finden würde, weil dieses Werk nicht zum Gegenstand hatte, grosse Zahlen auszudrücken, wie man es mitunter zu glauben scheint; es hatte zum Zweck, die Menge der Sandkörner zu berechnen, welche sich in der Kugel befinden würden, die, um die Sonne als Mittelpunkt beschrieben, die Fixsterne umfasste. Und diese berechnete Zahl wollte er in dem Zahlensystem der Griechen ausdrücken. Dazu setzte er sich vor, den Ziffern, die über die achte Colonne hinausgingen, Werthe nach der Stellung zu geben, welche dieselben waren, als im indischen System.

Die wenigen, uns übrig gebliebenen Documente geben uns nicht an, wie die Fixirung dieses Punkts bestimmt wurde, von welchem aus die Ziffern einen Werth nach ihrer Stellung erhielten. Geschah es durch ein besondres Zeichen? oder sollten vielleicht die acht ersten Columnen eine vollständige Zahl sein? das hätte in das griechische System die Betrachtung der Null eingeführt, unter irgend einer Form, als Punkt, oder als eine leere Stelle, oder als eine Columne. Übrigens weiss man, dass die Null den Griechen bekannt war und dass sie ihnen zur Bezeichnung des Fehlens der *Grade* oder *Minuten* u. s. w. bei ihrer Rechnung mit den Sexagesimal-Brüchen gedient haben. 168)

Alle diese Betrachtungen waren gewiss nicht für den Geist des Archimedes zu erhaben; aber mir scheint uns Nichts zu dem Ausspruch ermächtigen zu können, dass er

168) Siehe das Memoir von Delambre über die Arithmetik der Griechen.

er das Princip nicht aus seiner Kenntniss des indischen Systems habe entlehnen können, oder dass, wenn er dieses System gekannt hätte, er anders in seinem *Arenarius* verfahren hätte.

Aber Apollonius, wird man sagen, hat sich, nach Archimedes, auch damit beschäftigt, das Zahlensystem der Griechen zu vervollständigen; er hat auf vier Columnen die *Octaden* oder die Abtheilungen der acht Columnen zurückgeführt; wenn er das indische System gekannt hätte, so würde er schon von der zweiten Columne an das Princip des Stellenwerths angewandt haben, welches er bei der fünften anwandte.

Um jedoch die Arbeit des Apollonius, die nicht auf uns gekommen ist und deren Resultat uns nur durch die Fragmente des Pappus bekannt geworden ist, aburtheilen zu können, muss man untersuchen, weshalb er gerade bei der vierten Columne, und nicht bei der dritten oder fünften stehen geblieben ist. Der Grund dazu scheint uns folgender zu sein: die Griechen hatten 36 Ziffern, um alle Zahlen, die aus vier Columnen zusammengesetzt waren, so wie 2354, auszudrükken. Die 27 ersten Ziffern waren die verschiedenen Buchstaben ihres Alphabets, und die neun folgenden, welche die Tausende ausdrückten, waren die neun Ziffern der Einer, markirt durch ein *Jota* oder einen Accent. Es waren dieselben 36 Ziffern, deren sie sich zum Ausdruck der Zahlen über die einfachen Tausende hinaus bedienten, bis zur achten Columne exclusive; und, von der fünften Columne ab, stellten die Ziffern Myriaden vor, und man schrieb unter sie den Buchstaben *M*, oder auch nach ihnen und vor der vierten Columne die Buchstaben *Mv*, um diese Myriaden zu bezeichnen. Diese Zeichen waren beschwerlich, sie complicirten die Rechnung und konnten Irrthümer erzeugen. Apollonius wollte sie unterdrücken. Deshalb erdachte er die Abtheilungen der vier Columnen und gab ihnen die Werthe nach der Stellung.

Wir erkennen in dieser Idee des Apollonius, so wie in der des Archimedes, die Absicht, die von den Griechen gebrauchten Charaktere mit ihren eigenthümlichen Zeichen genau beizubehalten und sie dem Ausdruck aller möglichen Zahlen anzupassen. Und wir sehen, dass diese beiden Geometer auf dem glücklichsten Wege zu ihrem Ziele gekommen sind, indem sie diesen Charakteren Stellenwerthe gaben, nach demselben Principe, als das indische Zahlensystem.

Beweist dieses, dass sie dieses indische System durchaus nicht gekannt haben?

Ueber eine Stelle aus der Geometrie des Boëtius, die sich auf ein regelmässiges Fünfeck der zweiten Gattung bezieht. — Ursprung und Entwickelung der Stern-Polygone.

Boëtius giebt in seiner Geometrie, welche eine Uebersetzung der Sätze der vier ersten Bücher von Euclides ist, für jedes Theorem oder Problem nur den Ausspruch und die darauf bezügliche Figur.

Sein letzter aus dem Euclid entlehnter Satz ist die Aufgabe, in einen Kreis ein regelmässiges Fünfeck einzuschreiben (*Euclid* Lib. IV, Prop. XI); hinter dem Ausspruch dieser Aufgabe findet sich, wie gewöhnlich, die darauf bezügliche Figur, und diese Figur hat das Eigenthümliche, dass sie zugleich das gewöhnliche Fünfeck darstellt und das *Stern-Fünfeck* oder das der *zweiten Gattung*.

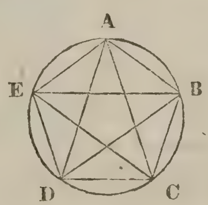
Ferner findet sich hinter dieser Figur eine Explication, die bei den andern Sätzen nicht vorkommt, und welche zum Zweck zu haben scheint, diese doppelte Figur, oder vielmehr dieses neue Fünfeck, das der vorgelegten Aufgabe entspräche, zu rechtfertigen.

Da diese Stelle des Boëtius schwer zu verstehen ist, und da wir uns leicht in der Auslegung, die wir ihr geben, irren können, so wollen wir sie, nach einem Manuscripte, das viel correcter als die Baseler Ausgabe (1570) ist; hier anführen:

„*Intra datum circulum, quinquangulum quod est aequilaterum atque aequiangulum designare non disconvenit.*"

Hier findet sich die Figur, welche der Aufgabe entspricht, und der Verfasser fährt fort:

„*Nam omnia quaecumque sunt numerorum ratione sua constant; et proportionaliter alii ex aliis constituuntur. Circumferentiae aequalitate multiplicationibus suis quidem excedentes; atque alternatim portionibus suis terminum facientes.*"



Man soll in den Kreis ein gleichseitiges und gleichschenkliges Fünfeck einschreiben.

Die Figur, welche der Aufgabe entspricht, stellt zwei Fünfecke vor, von denen das Eine eine neue und folglich von dem gewöhnlichen Fünfeck verschiedene Form hat. Boëtius rechtfertigt es auf folgende Art:

Denn Alles, was durch Zahlen ausgedrückt ist, findet vermöge des eigenthümlichen Verhältnisses der Zahlen statt; und diese leiten sich proportional, die einen aus den andern ab. Die Bögen 169) *werden, durch ihre Verdoppelung, um eine Quantität, die ihnen gleich ist, grösser, und ihre Chorden* 170), *von zwei zu zwei genommen, bilden den Perimeter* 171) *der Figur.*

Wenn diese Uebersetzung des Textes von Boëtius zulässig ist, so scheint sie uns der Construction eines Stern-Fünfecks zu entsprechen. In der That, es seien *A, B, C, D, E* die fünf Ecken des gewöhnlichen regelmässigen Fünfecks. Die Bögen, welche zu dessen Seiten gehören, sind *AB, BC, CD, DE, EA*. Wenn man sie verdoppelt, so entstehen daraus *ABC, BCD, CDE, DEA, EAB*, und die zugehörigen Sehnen werden *AC, BD, CE, DA, EB*. Nimmt man diese Sehnen von zwei zu zwei, so hat man *AC, CE, EB, BD, DA*: und in dieser Ordnung betrachtet, bilden diese Chorden das Stern-Fünfeck.

Uebrigens darf man sich nicht etwa wundern, diese Figur im Boëtius zu finden; denn es scheint, wie wir weiter unten zeigen wollen, dass sie schon im Alterthum, besonders dem Pythagoras bekannt gewesen ist; später findet man sie wieder im 13ten Jahrhundert in dem Commentar von Campanus zum Euclid; und während drei oder vier Jahrhunderten ist die Theorie der Stern-Polygone, was man damals *polygonum egrediens* nannte, cultivirt und erweitert wor-

---

169) *Circumferentia* ist, an mehren Stellen im Boëtius, die Benennung für Kreisbögen.

170) Wir übersetzten *portio* durch *Chorde*, weil *portio* die Benennung für Kreis*segment* ist, welches bei den Lateinern keinen andern Namen hatte. (*Portio circuli est figura quae sub recta et circuli circumferentia continetur.*) Und hier nehmen wir an, dass Boëtius das Ganze für den Theil genommen habe, d. h. *Segment* für die *Chorde*, weil das Wort *Chorde* damals noch nicht eine einfache Benennung war, man sagte *linea inscripta*.

171) Die Lateiner nannten *terminus* das Ende einer Linie und den *Perimeter* eines Polygons oder irgend einer Figur. (*Figura est quod sub aliquo vel aliquibus Terminis continetur.* Definition des Boëtius.)

den. Seitdem ist aber diese Theorie verloren gegangen und ganz unbekannt geblieben, weil sie ohne das Hinzutreten der algebraischen Analysis nur das Interesse der Curiosität darbot und der Geometrie keinen reellen Nutzen verschaffte. Der ausgezeichnete Geometer aber, der sie zu Anfang dieses Jahrhunderts von Neuem erschuf und von dem sie den Namen führt, hat ihr eine Wichtigkeit verliehen, welche sie nicht mehr verlieren kann, indem derselbe ihren wahren wissenschaftlichen Charakter und den analytischen Standpunkt nachwies, welcher sie nothwendig und unzertrennlich mit den alten Polygonen vereinigte. [172])

Nichts desto weniger kann diese Theorie dem Mittelalter Ehre machen, wo man so selten Gelegenheit hat, einige Spuren von Genie und einige Keime fruchtbarer Neuerungen anzuführen. Deshalb wollen wir das hier mittheilen, was wir in der Geschichte einer Epoche, von der uns zu wenige Documente übrig geblieben sind, über diesen Gegenstand gefunden haben.

Wir wollen aber zuerst sagen, mit welchem Recht wir behauptet haben, dass das Stern-Fünfeck im Alterthum, besonders von Pythagoras betrachtet worden ist.

Wir finden in der Encyclopädie von Alstedius [173]), im XVten Buch, welches von der Geometrie handelt, unmittelbar nach der Construction des gewöhnlichen regelmässigen Fünfecks, folgende Stelle:

„*Pentagonum etiam ita scribitur et a superstitiosis notatur hoc nomine Jesus.*"

(Hier findet sich das gestirnte Fünfeck gezeichnet, mit den Buchstaben *i*, *e*, *s*, *u*, *s* an seinen Scheitelpunkten.)

„*Si pentagono ita constructo addas lineam ex superiori angulo in oppositum angulum ductam, fiet illa figura, quam vocant sanitatem Pythagorae; quia Pythagoras, hac figura dilectatus, adscribebat singulis prominentibus angulis has quinque litteras* υ, γ, ι, ϑ, α. *Germani vocant ein Trudenfuss: quia sacerdotes veteres Germanorum et Gallorum vocabantur Druidae: qui dicuntur calacos* (vielleicht *calceos*) *hujus figurae gestasse.*"

172) S. Art. 15 des *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, von Poinsot. (*Journal de l'école polytechnique*, T. IV, Cah. X.)

173) *Encyclopaedia universa.* Herbornae 1620, in 4. — Ebenso *Secunda aucta*, ibid. 1630, in fol., 2 Vol. — Ebenso Lugduni 1649, in fol., 2 Vol.

Kircher spricht in seiner Arithmologie[174]) (Th. V, *De magicis amuletis*) in demselben Sinne von dem sternförmigen Fünfeck, welches er *pentalpha* nennt, weil zwei zusammenstossende Seiten mit einer sie schneidenden den Buchstaben *A* bilden. Er bezeichnet die Scheitelpunkte mit den Buchstaben υ, γ, ι, ϑ, α. Die Stelle bei diesem Autor ist folgende:

„In quibus (sigillis magicis) nil frequentius occurrit, quam p e n t a l p h a et h e x a l p h a; est autem pentalpha nil aliud, quam linearis figura in quinque A *diductum, quibus Graeci* υγιϑα, *id est salutem et sanitatem exprimebant; quo Antiochum vexillo imposito, jussu Alexandri in somno apparentis, mox admirabilem a Galatis victoriam reportasse Magi fingunt, eoque tamquam summae felicitatis symbolo in suis nugamentis utuntur."*

Sodann berichtet Kircher mehre mysteriöse Umstände, bei denen man von diesem *pentalpha* Gebrauch machte.

Im 16ten Jahrhundert hat noch der berüchtigte Alchymist Paracelsus das Stern-Fünfeck als das Sinnbild der Gesundheit betrachtet.[175])

Wir sehen aus der mathematischen Bibliothek von Murhard, dass der gelehrte Professor Kästner von dem *pentalpha* und *hexalpha* in seinen geometrischen Sammlungen gehandelt hat (*Geometrische Abhandlungen. Erste Sammlung, Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie.* Göttingen 1790, in 8.).

Wir gehen zur eigentlichen Theorie der Stern-Polygone über.

Die ersten Keime dazu finden wir in dem Commentar, welchen Campanus, ein Geometer des 13ten Jahrhunderts, zu seiner Uebersetzung der Elemente des Euclid aus dem Arabischen (der ersten, die in Europa erschien) hinzugefügt hat. Bei Gelegenheit des 32sten Satzes im ersten Buch, welcher aussagt, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks zwei Rechte ausmachen, stellt Campanus das Stern-Fünfeck als ein Beispiel eines Polygons auf, welches auch diese Eigenschaft des Dreiecks besitzt, dass die Summe seiner Winkel gleich zweien Rechten ist. Dieser Satz ist in den Ausgaben des Euclid von Zamberti wiederholt, wo sich neben

174) *Arithmologia, sive de abditis numerorum mysteriis, qua origo, antiquitas, et fabrica numerorum exponitur*, etc. etc. Romae 1665, in 4.

175) „. . . . *Stellam pentagonicam, seu Germanico idiomate pedem Truttae, Theophrasto Paracelso signum sanitatis.* (Kepler, *Harmonices Mundi*, Lib. II, p. 60.)

dem Commentar dieses Geometers auch der des Campanus[176]) findet; eben so haben viel andre Autoren in ihren eigenen Commentaren zu den Elementen des Euclid davon Gebrauch gemacht, z. B. Lucas de Burgo[177]), Peletier[178]) und Clavius.[179]) Ramus citirt auch in seinen *Scholis mathematicis*[180]), Lib. IX, das Stern-Fünfeck als ein Beispiel einer Figur, neben dem Triangel, worin die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt.[181])

Aber alle diese Geometer sind, so wie Boëtius und Campanus, bei der Betrachtung des Stern-Fünfecks stehen geblieben, ohne die Theorie ahnen zu lassen, zu welcher diese Gattung von Figuren Gelegenheit geben kann. Wir finden, dass es ein Schriftsteller aus dem 14ten Jahrhundert, Bradwardin, war, welcher zuerst die Theorie des Stern-Fünfecks auf Polygone von mehr Seiten ausdehnte und die wahre Doctrin der Stern-Polygone gegründet hat.

Das Werk, in dem wir dieselbe finden, hat zum Titel: *Geometria speculativa Thomae Bradvardini, recolligens omnes conclusiones geometricas studentibus artium, et philosophiae Aristotelis, valde necessarias, simul cum quodam tractatu de quadratura circuli; noviter edita.* Parisiis, apud Reginaldum Chauldiere, in fol., ohne Datum. Die erste Ausgabe dieser Geometrie erschien 1496[182]), mehre andre 1505, 1508 etc.[183]) Wir kennen nur die, welche wir angeführt haben.

---

176) Der Commentar von Campanus allein ist 1482 und 1491 gedruckt, darauf mit dem Commentar von Zamberti 1505, 1516, 1537, 1546.

177) *Euclidis opera a Campano interprete fidissimo translata. Lucas Paciolus, theologus insignis, altissima mathematicarum disciplinarum scientia rarissimus judicio castigatissimo detersit, emendavit*, etc. etc. Venetiis 1509, in fol.

178) *Demonstrationum in Euclidis Elementa Geometrica libri sex.* Lyon 1557, in 8. — Item 1610, in 4. — *Les six premiers livres des élémens géométriques d'Euclide, avec les démonstrations de Jacques Peletier, du Mans.* Genève 1628, in 8.

179) *Euclidis elementorum libri XV, accessit XVI de solidorum regularium comparatione*, etc. Romae 1574, in 8., in sehr vielen Auflagen.

180) *Scholarum mathematicarum libri XXXI.* Francf. 1559. in 4. — Item Basiliae 1569. — Item Francf. 1599. — Item ibid. 1627.

181) *Sic quinquangulum e continuatis ordinatis quinquanguli lateribus factum aequat quinque interiores angulos duobus rectis.*

182) Heilbronner, *Historia matheseos*, p. 523.

183) Montucla, *Histoire des mathématiques*, T. I, p. 573.

Nachdem er die gewöhnlichen regulären Polygone behandelt hat, welche er *einfache* nennt, widmet Bradwardin ein besondres Kapitel den *sternförmigen* Polygonen, welche er *Figuren mit ausspringenden Winkeln* nennt. Er sagt, dass *diese Polygone durch die Verlängerung der Seiten eines einfachen Polygons bis zum Durchschnitt je zweier gebildet sind*; und fügt hinzu, dass, so viel er gesehen habe, von diesen neuen Figuren kein andrer Geometer, ausser Campanus, gesprochen habe, welcher von ihnen in wenigen Worten und nur beiläufig handelt.

Der Inhalt dieser Partie im Werke von Bradwardin ist folgender:

Das Fünfeck ist die erste Figur mit ausspringenden Winkeln. Die Summe der Winkel ist gleich zweien Rechten. Die Summe der Winkel der andern Polygone mit ausspringenden Winkeln wächst immer um zwei Rechte, so wie bei den einfachen Figuren.

Dieses stimmt mit der Formel $S=2\ (m-4)$ zusammen, welche die Summe der Winkel in einem ausspringenden Polygon von m Seiten angiebt.

Die ausspringenden Polygone der *ersten Ordnung* führen, durch die Verlängerung ihrer Seiten bis zum Durchschnitt je zweier, zu den ausspringenden Polygonen der *zweiten Ordnung*, eben so wie die einfachen Polygone die ausspringenden Polygone der ersten Ordnung bildeten.

Das Siebeneck ist die erste Figur mit ausspringenden Winkeln der zweiten Ordnung; es entsteht aus dem Siebeneck mit ausspringenden Winkeln der ersten Ordnung, welches die dritte Figur der ersten Ordnung ist.

Eben so war das ausspringende Fünfeck, welches die erste Figur der ersten Ordnung ist, gebildet aus dem einfachen Fünfeck, der dritten Figur aus der Ordnung der einfachen Polygone. Diese Analogie führte Bradwardin zur Aussprache folgenden allgemeinen Princips: *die erste Figur einer Ordnung wird durch die Verlängerung der Seiten der dritten Figur aus der nächst vorhergehenden Ordnung gebildet.*

Der Verfasser schliesst endlich damit, dass er sagt, es würde zu weit führen, von den Winkeln dieser Figuren zu sprechen; er glaube jedoch, ohne es mit Bestimmtheit behaupten zu wollen, dass die Summe der Winkel in der ersten Figur jeder Ordnung gleich zwei Rechten sei und dass sich bei den andern Figuren diese Summe immer nur um zwei Rechte vermehre, indem man von einer Figur zur andern übergeht.

Die am Rande des Werks dargestellten Figuren sind das Fünfeck, das Sechseck, das Siebeneck und das Achteck der ersten Ordnung; das Siebeneck, das Achteck und das Neuneck der zweiten Ordnung; und endlich das Neuneck, das Zehneck und das Zwölfeck der drittten Ordnung.

Zwei Jahrhunderte nach Bradwardin hat Charles de Bouvelles, von dem man gewöhnlich anführt, dass er eine Auflösung der Quadratur des Kreises beabsichtigte, in verschiedenen Ausgaben eines Werks über Geometrie [184]) eine Theorie der *ausspringenden* Vielecke reproducirt, aber weniger vollständiger als Bradwardin. Man findet in ihm das ausspringende Fünfeck, von dem er beweist, dass die Summe der fünf Winkel gleich zweien Rechten ist, das ausspringende Sechseck, welches aus zwei Dreiecken zusammengesetzt ist, das ausspringende Siebeneck, welches durch Verlängerung der Seiten des gewöhnlichen Siebenecks entsteht, und das mehr ausspringende Siebeneck, das durch Verlängerung der Seiten des ausspringenden Siebenecks gebildet wird, und von dem der Verfasser beweist, dass die Summe seiner Winkel gleich zwei Rechten ist.

Man hat dieser Theorie in dem Auszug der Geometrie von Bouvelles erwähnt, welcher in den *Appendices* der *Margarita philosophica* steht. [185])

Diese ersten Notizen über die Theorie der Stern-Polygone sind in den zahlreichen Ausgaben des Werks unbeachtet übergangen, so wie auch in der Geometrie von Bouvelles, von der man nur gesprochen hat in Bezug auf eine falsche Auflösung für die Einbeschreibung des regulären Siebenecks in den Kreis und in Bezug auf eine beabsichtigte Quadratur des Kreises, die von dem Cardinal Nicolas de Cusa entlehnt ist.

---

184) *Geometriae introductionis libri sex, breviusculis annotationibus explanati, quibus annectuntur libelli de circuli quadratura, et de cubicatione sphaerae, et introductio in perspectivam Caroli Bovilli.* Paris 1503, in fol.

Dieses Werk, weniger die *introductio in perspectivam*, ist französisch erschienen unter dem Titel: *Livre singulier et utile, touchant l'art et pratique de Géometrie, composé nouvellement en françois, par maître Charles de Bouvelles, chanoine de Noyon*, Paris 1542, in 4. Andre Ausgaben sind von 1547, 1551, 1557, 1608.

Bouvelles hat noch viele andre Werke geschrieben, worin er sich als Philosoph, Theolog, Historiker, Redner, Poet und Canonist zeigt.

185) Seite 1231, 1233 und 1235 in der Ausgabe von 1535: „*Pentagonus uniformis dicitur, cujus latera non se mutuo intercidunt. Egrediens vero, cum ejus latera se invicem secant. Hexagonus ....*"

Man findet in den Figuren zu der Perspective des Daniel Barbaro [186]) das sternförmige Fünfeck, Sechseck und die beiden Siebenecke. Aber es scheint nicht, dass der Verfasser die Absicht gehabt hat, diese neuen Polygone zu erzeugen, sondern er hat nur darthun wollen, dass die gewöhnlichen regelmässigen Polygone auf zwei Arten zu andern Polygonen führen, die ihnen gleichartig sind. Nach der ersten Art verlängert man ihre Seiten bis zum Durchschnitt je zweier (zur Bildung des Polygons der zweiten Art); die Durchschnittspunkte sind die Scheitel eines Polygons, das mit dem gegebenen gleichartig ist. Die zweite Art besteht darin, dass man alle Diagonalen von jedem Scheitel nach dem zweiten oder dritten zunächst liegenden Scheitel zieht: diese bilden durch ihren Durchschnitt ein zweites Polygon, das dem vorgegebenen gleichartig ist. Aber nach diesen beiden Arten der Construction bildet man auch ein sternförmiges Polygon, von dem es sich findet, dass es der bemerkenswertheste Theil der Figur ist.

Kircher, den wir schon oben wegen des *pentalpha* und *hexalpha* citirt haben, macht, in einem andern Werke [187]), von dem Siebeneck der zweiten Ordnung (oder der dritten Gattung) Gebrauch, um die Ausdeutung fühlbar zu machen, welche in einer merkwürdigen Stelle des Dio Cassius enthalten ist, in Bezug auf die sieben Tage der Woche, die von den Aegyptern den Göttern geheiligt wurden, von denen die sieben Planeten ihre Namen führten. Diese Planeten waren nach der Ordnung ihrer Distanzen von der Erde: *Saturn*, *Jupiter*, *Mars*, *Sonne*, *Venus*, *Mercur* und *Mond*. Kircher stellt sie in dieser Reihenfolge auf eine Kreisperipherie, und indem er successive von dem ersten zum vierten, von dem vierten zum siebenten, von diesem zum dritten u. s. w. übergeht, zeichnet er eine Figur, welche er *Siebeneck* nennt (d. i. das Siebeneck der dritten Gattung), in der die aufeinanderfolgenden Scheitel die sieben Tage der Woche in ihrer natürlichen Reihenfolge bezeichnen. Saturn entspricht dem Sonnabend, Sonne dem Sonntag, der Mond dem Montag, der Mars dem Dienstag, der Mercur der Mittwoche, der Jupiter dem Donnerstag und die Venus dem Freitag. Die Bildung dieses Siebenecks, sagt Kircher, ist eine schöne Eigenschaft der Zahl Sieben.

---

186) *La pratica della perspettiva di Monsignor Daniel Barbaro*, Venise 1569, in fol.

187) *Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta*, Romae 1646, in fol., S. 217 et 537.

Die Werke, von denen wir bisher gesprochen haben, sind, obgleich ihre Verfasser eine gewisse Berühmtheit erlangt haben, dennoch schon seit langer Zeit nicht leicht bekannt, weil sie in der That sich nicht durch diese Productionen des Geistes empfahlen, welche die Werke und ihre Verfasser unsterblich machen, während man noch nach Jahrhunderten die Meinungen der Erfinder und die Spuren ihrer Bemühungen aufsucht. Man darf sich daher nicht wundern, dass das Polygon des Boëtius, das des Campanus und die Theorie des Bradwardin heut zu Tage unbekannt sind. Wir haben aber jetzt noch, in Bezug auf die Geschichte dieser Theorie, einen berühmten Namen anzuführen, ein denkwürdiges Werk und eines von denjenigen seltenen Werken, welche den Ruhm der neuern Zeiten bilden und analytische Betrachtungen enthalten, welche vor zwei Jahrhunderten einen tiefen Eindruck auf den Geist der Geometer machen mussten. Kepler war aber seinem Jahrhundert vorangeeilt; denn dieser ist es, von dem wir sprechen, und von seinem Werke *Harmonices Mundi libri V* (Lincii Austriae 1619, in fol.), und von dem schönen Satz über das *Verhältniss der Quadrate der Umlaufszeiten zu den Kuben der Entfernungen von der Sonne*, und von diesem zweiten, von ganz andrer Art, dass *eine und dieselbe Gleichung die verschiedenen Arten Polygone von einer und derselben Anzahl Seiten bestimmt.* Man wird heut zu Tage ohne Zweifel bemerken, dass kein neuer Gedanke jemals unter, dem Anschein nach, günstigern Umständen hervorgetreten ist, um dem Verfasser augenblicklich einen dauernden Ruhm zu sichern. Dennoch ist die sinnige Theorie des Kepler in Vergessenheit gerathen und von seinem unsterblichen Werke ist nur der Ausspruch seines grossen Gesetzes für die Bewegung der Himmelskörper übrig geblieben; und dieses wurde noch verkannt und vielleicht verachtet von seinen Zeitgenossen, unter denen man mit Bedauern Descartes und Galiläi nennt; es war beinahe 80 Jahre später noch nöthig, dass Newton dasselbe erklärte, es begreiflich machte und ihm das Leben gab! [183])
Die Theorie der Polygone, welche Kepler bei seinen weit-

---

188) Kepler hat gewisser Maassen vorausgesehen, dass die Entdeckungen, welche ihn 17 Jahre Arbeit, und zwar ununterbrochene Arbeit gekostet hatten, erst nach langer Zeit begriffen werden würden. Mit Enthusiasmus spricht dieser grosse Mann: *Jacio in aleam, librum scribo, seu praesentibus, seu posteris legendum; nihil interest: expectat ille suum lectorem per annos centum; si Deus ipse per annorum sena millia contemplatorem praestolatus est.* Harmonices Mundi, Lib. V, p. 179.

läufigen und delikaten Speculationen geleitet hat, ist noch weniger berücksichtigt worden; nicht die geringste Sorgfalt ist darauf verwandt worden; Nichts konnte sie vor einem vollständigen Vergessen bewahren: ein Vergessen, das uns die traurige Betrachtung von Bailly ins Gedächtniss ruft, die er gerade bei den Kepler'schen Gesetzen anstellt: „Es ist doch vergebens, dass man Wahrheiten entdeckt; man spricht zu seinen Zeitgenossen, und sie hören es nicht!" Nein, es ist nicht vergebens; aber zu häufig sind diese neuen Wahrheiten erst für die Nachkommen.

Das Werk von Kepler besteht aus fünf Büchern. Das erste, unter dem Titel: *De figurarum regularium, quae proportiones harmonicas pariunt, ortu, classibus, ordine et differentiis, causa scientiae et demonstrationis*, ist der allgemeinen Theorie der regelmässigen Figuren gewidmet, und enthält ins Besondre die der *sternförmigen* Polygone.

Im Eingange wirft Kepler dem Ramus vor, dass er das Xte Buch des Euclides tadelt und es aus der Geometrie verwiesen haben wolle. Er setzt es sich vor, dasselbe zu vervollständigen, indem er die regelmässigen Polygone, welche dem Kreise nicht *geometrisch* einschreibbar sind, behandelt und an ihnen das zeigt, wodurch sie von denen, die man einzuschreiben weiss, verschieden sind. Er verspricht über diesen Theil der Geometrie als Philosoph zu schreiben, und zwar auf eine Art, die klarer, leichter und populärer ist, als bis dahin geschehen ist.

Dieses Buch fängt mit sehr vielen Definitionen an, die zum Verständniss des Werks durchaus nothwendig sind; von denen wir aber hier nur die zwei oder drei folgenden anführen.

Reguläre Figuren sind solche, in denen alle Seiten unter einander und alle Winkel unter einander gleich sind.

Man theilt sie in zwei Klassen. Die einen sind *primäre* und *radicale*; diese sind die gewöhnlichen regulären Figuren; und die andern sind die *sternförmigen*, welche durch die Verlängerung der Seiten einer *radicalen* Figur gebildet werden. [189])

Eine Figur in den Kreis einbeschreiben, heisst durch *geometrische* Construction (also vermittelst der geraden Linie und des Kreises) das Verhältniss ihrer Seiten zum Durchmesser des Kreises bestimmen.

---

189) Kepler sagt nicht, ob diese Idee der sternförmigen Polygone von ihm ist, oder ob er sie aus einem frühern Werke entlehnt habe.

Darauf führt Kepler mehre Sätze aus dem Xten Buch des Euclid an, deren er sich bedient hat. Er fängt mit dem 35sten Satz an, um die verschiedenen regulären Figuren zu behandeln; und betrachtet zuerst die, welche sich *geometrisch* in den Kreis einbeschreiben lassen.

In Bezug auf die sternförmigen Polygone bemerkt man das Fünfeck der zweiten Gattung, das Achteck und das Zehneck der dritten Gattung, das Zwölfeck der dritten und fünften Gattung, die Funfzehnecke der zweiten, vierten und siebenten Gattung, und den Stern von 24 Seiten der fünften, siebenten und eilften Gattung.

Indem er zu den Polygonen übergeht, welche nicht geometrisch construirt werden können, beweist er, dass das gewöhnliche Siebeneck und seine beiden sternförmigen dazu gehören. Darauf nimmt er seine Zuflucht zur Analysis, um ihm in Kurzem vorzuwerfen, dass er darin eben so wenig bewandert sei und sie nicht verstehe. Diese Stelle enthält mehre analytische Bemerkungen, welche das Werk vor der Vergessenheit bewahren werden.

„Man wird mir, sagt er (p. 34), die Analysis dagegen anführen, welche von dem Araber Geber *Algebra*, und von den Italienern *Cossa* genannt wird; denn die Seiten der Polygone aller Gattungen scheinen nach dieser Methode bestimmt werden zu können."

„Für das Siebeneck, z. B., verfährt Jobst Byrge, der in dieser Weise sehr geistreiche und selbst unglaubliche Dinge ausgedacht hat, auf folgende Weise .... etc."

Kepler sucht durch geometrische Betrachtungen den Ausdruck für die Seite des eingeschriebenen regelmässigen Siebenecks, als Function des Radius, und kommt zu dieser Gleichung:

7 — 14 ij + 7 iiij — 1 vj *aeque valent figurae nihili*;

oder nach unsrer gegenwärtigen Bezeichnung:

$$7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0;$$

worin x das Verhältniss der Seite des Siebenecks zum Radius ist.

„Der Werth für die Wurzel einer solchen Gleichung, sagt er, ist nicht ein einziger; denn es giebt zwei für das Fünfeck, drei für das Siebeneck, vier für das Neuneck u. s. w."

Er fügt hinzu, dass (für das Siebeneck) die drei Wurzeln die Seiten der drei verschiedenen Siebenecke sind, welche man in den Kreis einbeschreiben kann.

Hierin liegt die genaue Bedeutung der drei Wurzeln jener Gleichung, welche die Seite des eingeschriebenen regelmässigen Siebenecks giebt. Und zugleich liegt darin die analytische Idee, welche die Theorie der sternförmigen Polygone nothwendig mit der der Polygone der Alten verbindet.

Kepler drückt, weiterhin, dasselbe Princip auf bemerkenswerthe Weise aus; denn indem er die Schwierigkeiten, welche aus der Fruchtbarkeit der Analysis selbst entstehen können, zugesteht, erkennt er das Vorzügliche, was diese Methode besitzt, an.

„Bisher, sagt er, hatte die Seite eines Polygons und die des Sterns von gleichem Namen eine besondre und bestimmte Beschreibung. In der algebraischen Analysis, die übrigens Bewunderungswürdiges enthält (obgleich dieses gerade das ist, was den Geometer beengt), kann das Gesuchte nicht auf blos eine einzige Art geliefert werden. Wenn wir aber, ohne dieses allgemein zu beweisen, das verfolgen, was wir oben angefangen haben, so giebt es eben so viele Zahlen, welche der Gleichung genügen, als sich in der Figur Sehnen oder Diagonalen von verschiedener Länge finden: im Fünfeck zwei; im Siebeneck drei; von denen eine für die Seite und die andern für die Diagonalen gelten. Deshalb findet auch Alles, was von dem Verhältniss der Seite der Figur zum Durchmesser gesagt ist, auch für die Verhältnisse aller ihrer andern Seiten zu demselben Durchmesser statt.

Kepler wiederholt dieselben Betrachtungen in dem folgenden Satz, worin er beweist, dass die Theilung eines Bogens in drei, fünf, sieben u. s. w. Theile geometrisch nicht möglich ist. „Mehre Linien, sagt er, entsprechen der Aufgabe, und von einer Eigenschaft, die mehren Dingen zugleich zukommt, kann man nichts Specielles oder Eigenthümliches in Bezug auf Eines von ihnen schliessen." [190])

---

190) Mitten unter diesen so richtigen und tiefen mathematischen Betrachtungen findet man einige Betrachtungen, welche den bizarren und chimärischen Gebrauch andeuten, den ein Geist Kepler's, der durch die pythagoräischen und platonischen Ideen über die cosmographischen Eigenschaften der Zahlen beherrscht wurde, von seinen gelehrten Speculationen über die Polygone machen wollte. Von dieser Art ist die Stelle, welche den 45sten Satz beschliesst: „Es ist also bewiesen, dass die Seiten dieser Figuren unbekannt bleiben müssen und ihrer Natur nach unfindbar sind. *Und es liegt nichts Wunderbares darin, dass Das, was sich in dem Urbild der Welt nicht findet, auch nicht durch die Zusammenstellung seiner einzelnen Theile erzeugt werden kann.*

Aehnliche Ideen haben Kepler zu einer der wichtigsten Entdeckungen geführt, welche jemals gemacht sind!

Das zweite Buch, betitelt: *De figurarum regularium congruentia*, behandelt auch noch regelmässige Polygone und darauf Polyëder. Kepler nimmt die verschiedenen Arten durch Polygone zusammenzusetzen, mögen sie von derselben Gattung oder von verschiedener sein, um genau eine ebene Fläche zu bilden oder regelmässige Polygone zu erzeugen.

Das dritte Buch, *De ortu proportionum harmonicarum, deque natura et differentiis rerum ad cantum pertinentium*, welches nur von der musikalischen Harmonie handelt, ist der Geometrie und Astronomie fremd.

In dem vierten Buch, das zum Titel hat: *De configurationibus harmonicis radiorum sideralium in Terra, earumque effectu in ciendis Meteoris, aliisque Naturalibus*, macht Kepler von den sternförmigen Polygonen und von dem Werth ihrer Winkel Gebrauch, mit denen er die *Configurationen* oder die Winkel-Entfernungen der Planeten vergleicht: diese Winkel entsprechen den sublunarischen Umständen und Phänomenen, welche verschieden sind, je nachdem sie diesen oder jenen Polygonen angehören. Die *wirkenden Configurationen*, das sind solche, welche sich zur Anreizung der sublunarischen Natur und der innern Qualitäten der Seele eignen, sind durch die Winkel der geometrisch einschreibbaren Polygone ausgedrückt. Man findet darin das Quadrat, das Dreieck, das Fünfeck der zweiten Gattung, das Siebeneck der dritten Gattung, das Zehneck der dritten Gattung und das Zwölfeck der fünften Gattung.

Das fünfte Buch hat zum Titel: *De harmonia perfectissima motuum coelestium, ortuque ex iisdem Excentricitatum, semidiametrorumque et Temporum periodicorum.* Kepler vergleicht darin die fünf regelmässigen Körper mit den harmonischen Verhältnissen, und sucht darin Analogien mit den Bewegungen der Planeten zu entdecken. In diesem fünften Buche findet man, wie es der Titel angiebt, sein herrliches Gesetz *über das constante Verhältniss der Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten zu den Kuben der Entfernungen von der Sonne.*[191])

191) Man fühlt stets eine Verehrung selbst vor den Worten, deren sich Kepler zum Ausdrücken seiner grossen Entdeckung bediente; sie drücken die ganze Zufriedenheit und die Wichtigkeit aus, welche er auf die Durchdringung dieses so versteckten Geheimnisses gelegt hat. „Nachdem ich die wahren Dimensionen der Bahnen vermöge der Beobachtungen des Brahe und durch die ununterbrochene Anstrengung einer langen Arbeit gefunden hatte, hab' ich endlich das Verhältniss der Perioden zu der Ausdehnung der Bahnen gefunden;

Sera quidem respexit inertem
Respexit tamen, et longo post tempore venit;

Man sieht aus der Analyse, welche wir von dem Werke des Kepler gegeben haben, dass die Lehre von den *sternförmigen* Polygonen eine wichtige und in analytischer Hinsicht neue Rolle darin spielt. Wir konnten jedoch keine Spur von derselben darin finden, obwohl sie sich in der Theorie der Winkeltheilung, womit sich die Geometer vielfältig beschäftigt haben, hätte finden sollen. Wallis besonders, welcher nur ein halbes Jahrhundert nach Kepler eine Geschichte der Algebra und ein Werk über die Winkeltheilung schrieb, konnte dieselbe nicht übergehen. Dieser Geometer hat sehr wohl eingesehen, dass die zweite Wurzel der Gleichung des zweiten Grades, wodurch man die Seite des eingeschriebenen regelmässigen Fünfecks bestimmt, die Diagonale giebt [192]; aber diese geometrische Auslegung der fremdartigen Wurzel genügte nicht, man musste sie mit der Aussprache der Aufgabe selbst in Einklang bringen, um darin nicht nur eine Diagonale zu erblicken, sondern *die Seite eines zweiten Fünfecks*. Diese Idee, welche uns gegenwärtig so einfach erscheint und die analytische Auflösung der Aufgabe erklärt, ist den Bernoulli's, Euler und Lagrange entgangen und ist erst in unsrer Zeit einem Geometer in den Sinn gekommen.

Die Lehre von den ausspringenden Polygonen von Bradwardin wurde lebhaft durch einen Schriftsteller des 17ten Jahrhunderts, durch J. Broscius, bekämpft, in einem Werke, betitelt: *Apologia pro Aristotele et Euclide contra P. Ramum et alios.* Danzig 1652, in 4. Sie hatte keinen Angriff zu fürchten, der nicht zu ihrer weitern Verbreitung ge-

---

„Und wenn man das genaue Datum wissen will, so ist es der 8te März 1618, dass dasselbe zuerst in meinem Geist entstanden, darauf von einem ungeschickten Calcul geprüft, sodann als falsch verworfen, endlich, am 15ten Mai, mit neuer Kraft wieder vorgenommen, aus dem Dunkel meines Verstandes hervortrat: aber so vollständig bestätigt durch meine 17jährige Arbeit über die Beobachtungen Brahe's und durch meine vollständig übereinstimmenden Meditationen, so dass es ein richtiger und bestimmter Satz ist, *dass das Verhältniss zwischen den periodischen Zeiten zweier Planeten genau anderthalbmal das Verhältniss der mittlern Entfernungen ist.*" (Lib. V, p. 189.)

192) Diese Bemerkung ist wahrscheinlich schon vor anderthalb Jahrhunderten von Stiefel gemacht; denn man findet in seiner Algebra die Ausdrücke für die Seite und für die Diagonale des regelmässigen Fünfecks als Function des Radius des umbeschriebenen Kreises (s. seine *Arithmetica integra*, fol. 178); und wenn man auch annimmt, dass er diese Ausdrücke nicht durch die Auflösung der Gleichung des zweiten Grades erhalten hat, so musste ihre Form ihm zeigen, dass die auf diesen Linien gebildeten Quadrate die Wurzeln einer ähnlichen Gleichung sind; denn dieser Geometer, der gewandteste Algebraist seiner Zeit, war ausserordentlich geübt in der Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades.

dient hätte; indess ist, durch einen besondern Zufall, dieses Werk von Broscius das letzte, welches von diesen Polygonen handelt. Diese waren seitdem gänzlich in Vergessenheit gerathen und konnten zu Anfang dieses Jahrhunderts nicht mehr ins Gedächtniss gerufen werden, als Poinsot sie von Neuem erschuf und hervorrief.

Das, was das Werk von Broscius über diese Polygone enthält, ist Folgendes:

Zuerst tadelt er sehr heftig Ramus, dass er sich des sternförmigen Fünfecks als Beispiel für eine Figur bedient hat, in welcher, mit Ausnahme des Dreiecks, die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt. „Dieses beweist", wie er sagt, „die Unwissenheit des Ramus in der Geometrie. Denn dieses ist ein Zehneck, welches fünf einspringende und fünf ausspringende Winkel hat, und die Summe seiner Winkel ist gleich 16 Rechten."

Broscius citirt das Werk von Bradwardin und beweist, dass man unendlich viele Figuren mit ausspringenden Winkeln von 7, 9, 11 u. s. w. Seiten bilden könne, in denen, so wie in der Figur des Ramus, die Summe der Winkel gleich zwei Rechten ist. Bradwardin hat diesen schönen Satz nur geglaubt, ohne ihn zu beweisen; und Charles de Bouvelles hat ihn nur auf das ausspringende Fünfeck der dritten Gattung angewandt. Broscius geht weiter; er betrachtet die Figuren der verschiedenen Gattungen, bei derselben Anzahl der Seiten, und giebt die Summe ihrer Seiten an.

Er findet, dass es drei Gattungen von Siebenecken giebt, wenn man das gewöhnliche Siebeneck mitzählt, in denen die Summe der Winkel 10, 6 und 2 Rechte ist;

Drei Arten von Achtecken, in denen die Summe der Winkel 12, 8 und 4 Rechte ist;

Sechs Arten von Figuren mit ausspringenden Winkeln (worunter das gewöhnliche 14seitige Polygon mitbegriffen ist), in denen die Summe der Winkel 24, 20, 16, 12, 8 und 4 Rechte ist;

Sieben Arten von Figuren mit 15 ausspringenden Winkeln, in denen die Summe der Winkel 26, 22, 18, 14, 10, 6 und 2 Rechte ist.

Diese Resultate stimmen mit dem von Poinsot gefundenen Gesetz überein, nach welchem die Summe der Winkel jedes Polygons $S = 2\ (m - 2h)$ ist, wenn m die Anzahl der Seiten des Polygons und h diejenige Zahl ist, welche die *Gattung* oder die *Ordnung* dieser Figur angiebt.

Der Gesichtspunkt, unter welchem Broscius diese neuen Figuren betrachtet, indem er sie als Polygone mit abwechselnd ausspringenden und einspringenden Winkeln ansieht,

in denen die Seiten sich nicht schneiden, führte ihn zu einer neuen Constructionsart dieser Figuren und zu einer besondern Eigenschaft der Isoperimetrie.

Wir nehmen als Beispiel das gewöhnliche regelmässige Siebeneck und markiren die Mittelpunkte seiner sieben Seiten. Um die gerade Linie, welche zwei aufeinanderfolgende Mitten verbindet, lasse man sich das kleine Dreieck drehen, welches durch diese Gerade von dem Siebeneck abgeschnitten wird, so dass sich dieses Dreieck vollständig auf die Fläche der Figur legt. Ebenso drehe man um jede der sechs andern Geraden, welche zwei aufeinanderfolgende Mitten verbinden, das kleine Dreieck, welches dadurch von dem Siebeneck abgeschnitten wird. Alle diese kleinen Dreiecke werden in ihrer neuen Lage, ein neues Polygon, mit abwechselnd ausspringenden und einspringenden Winkeln bilden.

Dieses neue Polygon von 14 Seiten hat offenbar denselben Umfang als das vorgegebene Siebeneck.

Lässt man nun um jede Gerade, welche die Scheitel zweier aufeinanderfolgenden einspringenden Winkel verbindet, das kleine Dreieck, welches diese Gerade vom Polygon abschneidet, drehen, so wird man auf diese Weise ein drittes Polygon von 14 Seiten bilden, in welchem auch noch die Winkel abwechselnd ausspringen und einspringen, und dieses neue Polygon wird offenbar denselben Umfang mit dem zweiten und also auch mit dem ersten haben.

Die Flächen dieser drei Polygone sind von einander durchaus verschieden; weil das zweite innerhalb des ersten liegt, und das dritte innerhalb des zweiten.

Nun erkennt man leicht, dass das zweite Polygon kein andres ist, als das Siebeneck der zweiten Gattung, in welchem die Stücke der Seiten, die innerhalb liegen, ausgelöscht sind; und dass ebenso das dritte Polygon kein andres ist, als das Siebeneck der dritten Gattung, in welchem ebenfalls die Stücke der Seiten, die innerhalb liegen, ausgelöscht sind.

Man sieht hierin eine neue Art, die ausspringenden Polygone zu bilden, indem man sie, das eine aus dem andern ableitet. Diese Art verdient bemerkt zu werden, vorzüglich wegen dieses besondern Umstandes, dass alle diese Polygone, die auf diese Weise aus dem ersten abgeleitet werden, denselben Umfang haben.

Wir finden kein andres Werk, in dem man von den ausspringenden Polygonen gesprochen hätte, bis zu Anfang dieses Jahrhunderts, wo diese Theorie als eine ganz neue erschien, ohne dass ihr berühmter Urheber und die Geometer, welche sie bewunderten, an die Rolle dachten, welche sie schon vier Jahrhunderte hindurch gespielt hatte.

Geometrie der Araber.

Von dem 8ten bis zum 13ten Jahrhundert verharrte Europa in der tiefsten Unwissenheit. Die Liebe zu den Wissenschaften und ihre Fortbildung waren während dieses langen Zeitraums auf das einzige Volk der Araber zu Bagdad und Cordova concentrirt. Ihnen verdanken wir die Bekanntschaft mit den griechischen Werken, die sie zu ihrem eignen Gebrauch übersetzten und die sie uns bei weitem früher überlieferten, bevor uns dieselben in ihrer Originasprache zukamen. Bis auf die letzten Zeiten hat man geglaubt, dass dieses die einzige Verpflichtung wäre, welche wir gegen die Araber hätten, und man hat es vernachlässigt, ihre eigenen Werke aufzusuchen und zu studiren, indem man glaubte, dass darin nichts Originelles und von der griechischen Bildung Verschiedenes zu finden sey. Dieses ist ein Irrthum, auf den man sich heut zu Tage stützt, besonders seitdem man die indischen Werke kennt und seitdem man weiss, dass die Araber aus diesen letztern ihre Principien des algebraischen Calculs entlehnt haben, wodurch sie sich wesentlich von den Griechen unterscheiden. Aber es ist noch zu kurze Zeit her, dass dieser Irrthum zerstört ist, und die arabischen Werke sind uns noch zu wenig bekannt. Eine grosse Zahl derselben existirt seit mehren Jahrhunderten in Europa, grossen Theils in ihrer Originalsprache, und nur einige, im 12ten und 13ten Jahrhundert ins Lateinische übersetzt. Wir wollen wünschen, dass ihre Wichtigkeit anerkannt werde und dass sie bald aus den Bibliotheken, in denen sie begraben liegen, hervorgehen. Nur dann erst wird man an eine wirklich wissenschaftliche Geschichte der Araber denken können. Für den Augenblick ist Nichts weiter möglich, als einige hauptsächliche Thatsachen und einige zerstreute Data zu sammeln, welche es nicht gestatteten, mit Bestimmtheit zu behaupten, dass diese grosse und ausgezeichnete Nation an der Verbreitung und der Vervollkommnung der mathematischen Wissenschaft Theil genommen habe, da nicht sogleich der Charakter genügend hervortrat, den diese Wissenschaft durch die Vermengung der griechischen und indischen Elemente, aus denen sie zusammengesetzt ist, angenommen hatte. Dieser Charakter aber zeigt sich in den Werken der Europäer aus dem 15ten Jahrhundert, Werke, die denen der Araber nachgeahmt sind, und gegenwärtig können wir sie mit Klarheit untersuchen und erkennen.

Die Liebe und der Eifer für die Wissenschaften entwickelte sich bei den Arabern im 8ten Jahrhundert, als die

Herrschaft der Abassiden anfing, mit ausserordentlicher Schnelligkeit. Diese Prinzen bildeten, als noble Nachahmer der Ptolemäer in Aegypten, zu Bagdad den Mittelpunkt aller Talente der Welt.[193] Sie sammelten mit Eifer alle Kenntnisse, welche sie bei den Völkern finden konnten, die von den Nachfolgern des Propheten und von den Ommijaden unterjocht waren. Die Araber eigneten sich auf diese Weise alle Wissenschaften an[194]), deren alleinige Bewahrer sie wurden, als, durch das Geschick, was von dem Menschlichen unzertrennlich ist, dieselben bei *den* Völkern in Vergessenheit kamen oder gänzlich untergingen, welche sie hervorgerufen und Jahrhunderte hindurch ausgebildet hatten. Die Griechen und die Inder[195]) zahlten den grössten Tribut zu diesem wissenschaftlichen Contingent. Solcher war der Ursprung der Wissenschaften, zumal der Geometrie, bei den Arabern.

Die Elemente Euclid's scheinen das erste Werk gewesen zu sein, welches sie, unter der Herrschaft Almansor's, im 8ten Jahrhundert übersetzten. Bald darauf verdankt man den aufgeklärten Anregungen des Kalifen Al Mamun (welcher zu Bagdad im Jahr 814 seine Regierung antrat) die Kenntniss der Werke von Archimedes, Apollonius, Hypsicles, Theodosius und des Almagest von Ptolemäus.

Seitdem waren die Fortschritte der Araber in dieser Wissenschaft reissend, und das 9te Jahrhundert zählt tüchtige und sehr gelehrte Geometer.

Drei Brüder, Mohammed, Hamet und Hasan, Söhne des Musa ben Schaker, wurden berühmt durch die Uebersetzungen, die sie von verschiedenen griechischen und indischen Werken lieferten, und durch ihre eigenen Schriften über alle Theile der mathematischen Wissenschaft, wovon mehre auf uns gekommen sind. Die astronomischen Tafeln, welche Mohammed ben Musa *nach dem indischen System* eingerichtet hatte, waren lange Zeit im Orient berühmt. Aber ein Werk,

---

193) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, T. I, p. 117.

194) „Man kann nicht zweifeln, dass die Araber seit der Gründung des Kalifats und der Errichtung ihres Reichs eine grosse Achtung vor den Künsten und Wissenschaften hatten, da sie alle vorzüglicheren griechischen, ebräischen, chaldäischen und indischen Werke in ihre Sprache übertrugen.“ (Herbelot, *Orientalische Bibliothek*, unter dem Wort *Elm* [Wissenschaft].)

195) Man liest in der *orientalischen Bibliothek* von Herbelot, unter dem Wort *ketab* (welches *Behandlung*, *Werk* bedeutet), die Titel vieler Werke über alle Theile der mathematischen und philosophischen Wissenschaft, welche die Araber aus indischen Werken übertragen oder ihnen nachgeahmt haben.

das in unsern Augen viel werthvoller und wichtiger ist, ist seine *Behandlung der Algebra*; es war das älteste Werk, was bis auf die letzte Zeit bekannt war, wo die der Inder zu uns gelangt sind. Aus diesem Werk haben wir unsre ersten mathematischen Kenntnisse geschöpft, zuerst durch Vermittelung des Leonhard von Pisa, welcher sich in Arabien unterrichtet hatte; und darauf, indem es uns selbst zur Disposition stand und im 13ten Jahrhundert übersetzt wurde. Man betrachtet deshalb Mohammed ben Musa als den Erfinder der Algebra [196]), und sein Name ist mit Recht bei den

---

196) Cardan sagt im Anfang seiner *Ars magna*: *Haec ars olim a Mahomete, Mosis Arabis filio, initium sumpsit. Etenim hujus rei locuples testis Leonardus Pisanus.*

Er wiederholt dasselbe in seinem Werk *De subtilitate* (Lib. XVI), wo er den Mohammed ben Musa nach dem Archytas und als den neunten unter die zwölf grössten Genies der Erde stellt. *Huic Mahometus Moisis filius Arabs, Algebraticae ut ita dicam artis inventor, succedit. Ob id inventum ab artis nomine cognomen adeptus est.*

Tartalea schreibt auch dem Mohammed ben Musa die Erfindung der Algebra zu, indem er ihn im Titel des VIten Theils seines *General trattato di numeri e misure* anführt: *Antica pratica speculativa de l'arte magna, detta in Arabo Algebra et Almucabala, over regola della cosa, trovata Maumeth, figlio de Moise arabo, la quale se puo dire la perfetta arte del calculare*, etc.

Man hatte zuerst die Erfindung der Algebra dem Geber, einem andern arabischen Geometer, zugeschrieben. So schreibt Stiefels, ein berühmter deutscher Algebraist und Zeitgenosse Cardan's, an den Professor Milichius: *Tuo quoque consilio usus, Algebram (quam persuasisti bonis rationibus a Gebro astronomo, autore ejus, ita esse nuncupatam) multis exemplis illustratam scripsi* (*Arithmetica integra*, p. 226); und nennt die Algebra häufig *Regula Gebri*. Diese Meinung wurde noch im 17ten Jahrhundert getheilt (s. Kepler, *Harmonices Mundi* Lib. I, Prop. 45); da sie aber keinen andern Grund, als die Aehnlichkeit der Worte hatte, so konnte sie sich nicht halten, zumal als man die wahre Etymologie des Wortes *Algebra* erkannte, welches von der doppelten Benennung *Algebr* & *Almocabelah* herkommt, deren sich die Araber stets bedienen und die *oppositio et comparatio* bedeutet. Diese Benennung, welche wir durch das einzige Wort *Algebra* ersetzt haben, bezieht sich eigentlich auf die Gleichungen, deren Mechanismus das Fundament der ganzen Wissenschaft ist.

Andre Schriftsteller, an deren Spitze Regiomontanus und Scheubel stehen, betrachteten Diophantus als den ersten Erfinder der Algebra; und diese Meinung herrschte allgemein vor, weil Diophantus in der That eine grosse Priorität vor den Arabern hatte. Gegenwärtig aber handelt es sich um die Priorität zwischen den Griechen und Indern. Brahmegupta ist um zwei Jahrhunderte später als Diophantus, aber die Vollkommenheit seines Werks deutet es bestimmt an, dass die Algebra in Indien schon eine sehr alte Existenz gehabt habe. Denn, so wie Peletier in seiner Algebra sagt, diese ist eine

europäischen Geometern in grossem Ansehn geblieben. Indess ist sein Werk, das schon aus Anerkennung die Ehre des Drucks verdient hätte, Manuscript geblieben und während drei Jahrhunderten ganz vergessen worden, bis es Rosen im Jahr 1831 arabisch und englisch herausgab. Libri reproducirt auch, im ersten Theil seiner *Histoire des sciences en Italie*, eine der lateinischen Uebersetzungen, welche man auf der königlichen Bibliothek aufbewahrt. Diese ist nicht so vollständig als das Manuscript, dessen sich Rosen bediente. Der geometrische Theil, unter Anderm, findet sich nicht darin.

Man weiss, dass Mohammed ben Musa einen Theil seiner mathematischen Kenntnisse von den Indern entlehnt hat. [197]) Und wir müssen glauben, dass er die Algebra von ihnen hat. Sein Werk bietet gewisse Vergleichungspunkte mit den ihrigen dar und durchaus keinen mit dem von Diophantus. Mohammed bedient sich darin, eben so wie die Inder, geometrischer Betrachtungen, um die Sicherheit der algebraischen Operationen klar zu machen; man bemerkt besonders darin die Art, auf die er nach dieser Methode die Regeln für die Auflösung der Gleichung des zweiten Grades, wo er drei Fälle betrachtet, beweist. [198]) Das Werk enthält auch, so wie die der Inder, einen geometrischen Theil über die Ausmessung der Oberflächen.

---

von denjenigen Dingen, die, weit davon entfernt, ihre Erfindung einem einzigen Autor zu verdanken, *n'ont pris règle, forme et ordre qu'après un long temps de circuitions, d'intermissions et de continuelles exercitations d'esprit.*

197) Casiri, *Bibliotheca Arabico-Hispana*, p. 427—428. — Colebrooke, *Brahmegupta and Bhascara Algebra*; Dissert. p. LXXII. — F. Rosen, *Algebra of Mohammed ben Musa*, Vorrede, p. VIII.

198) Diese drei Fälle, von denen der Autor nur Zahlenbeispiele giebt, werden durch folgende drei Buchstabengleichungen ausgedrückt:

$$ax^2 + bx - c = 0,$$
$$ax^2 - bx - c = 0,$$
$$ax^2 - bx + c = 0.$$

Der vierte Fall, den die allgemeine Gleichung des zweiten Grades darbieten kann, ist

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

worin alle Glieder positiv sind. Mohammed hat von diesem gar nicht gesprochen, weil die Wurzeln in diesem Fall immer negativ sind.

Bei den andern Gleichungen nimmt er nur die *positiven* Wurzeln und lässt die *negativen* Wurzeln, als nichts bedeutend, weg.

Man bemerkt darin die drei Ausdrücke $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ und $\frac{62832}{20000}$ als Näherungsverhältnisse der Peripherie zum Durch-

---

In der dritten, $ax^2 - bx + c = 0$, wo die beiden Wurzeln:

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

positiv sind (vorausgssetzt, dass sie reell sind), sagt Mohammed, dass man sie beide berechnet, dass man sich aber in jedem Fall davon versichern muss, dass sie der Aufgabe entsprechen. Man versucht zunächst die erste, welche durch das positive Zeichen entsteht, und wenn sie nicht passt, so wird die zweite, welche durch das negative Zeichen entsteht, gewiss passen. (*When jou meet with an instance which refers jou to this cas, try its solution by addition, and if that do not serve, then subtraction certainly will.* Pag. 11.)

Die Inder lassen auch beide Wurzeln in den Fällen zu, wenn sie beide passen (*Bija-Ganita* §. 130, 139), und verwerfen eine als absurd in den andern Fällen (ibid., §. 140, 141), z. B. bei folgender Aufgabe: *Wenn ein Gnomon 12 Zoll hoch ist und wenn der Schatten desselben, um den dritten Theil der Hypotenuse vermindert, 14 Zoll misst, wie gross ist der Schatten?* Man wird bei der Bestimmung des Schattens auf eine Gleichung des zweiten Grades geführt, deren beide Wurzeln positiv und zwar $\frac{45}{2}$ und 9 sind. Die erste Wurzel passt, weil sie grösser als 13 ist und also, um den dritten Theil der Hypotenuse verringert, gleich 14 werden kann; die zweite dagegen muss, da sie kleiner als 14 ist, wie Bhascara sagt, wegen ihrer Absurdität (*by reason of its incongruity*) verworfen werden.

Lucas de Burgo folgt Mohammed ben Musa Punkt für Punkt; er betrachtet ebenfalls drei Fälle; er giebt die Lösung jedes in einer Strophe von vier lateinischen Versen und rechtfertigt sie durch geometrische Betrachtungen. In Bezug auf den Fall, dass beide Wurzeln positiv sind, urtheilt er, dass bei gewissen Aufgaben die eine so gut wie die andre passen könne, bei andern jedoch die eine nur allein genüge. (*Siche l'uno e l'altro modo satisfa el thema. Ma a le volte se hane la verita a l'uno modo. A le volte a l'altro. El perche se cavando la radice del ditto remanente de la mita de le cose non satisfacesse al thema. E tu la ditta R (radice) agiongi a la mita de le cose, e haverai el quesito: et mai fallara che a uno de li doi modi non sia satisfatto el quesito, cioe giongnendola, overo cavandola del dimeccamento de le cose*, etc. *Summa de Arithmetica*, etc. Distinctio 8, tractatus 5, Art. 12.)

Diese beständigen Beziehungen, welche zwischen dem Werke des Mohammed ben Musa und denen der Inder einer Seits, und dem des Lucas de Burgo andrer Seits stattfinden, zeigen hinlänglich den Ursprung der europäischen Algebra und den directen Einfluss, welchen die arabischen Werke auf die Fortschritte und den Charakter der Mathematik beim Wiederaufleben der Wissenschaften ausgeübt haben. Und dieses war der Zweck dieser Note.

messer, welche, wie wir gesagt haben, den Indern bekannt waren[199]), und die drei Zahlen 13, 14 und 15 als die Seiten eines Dreiecks, das wir auch in den Werken des Brahmegupta und Bhascara gefunden haben.

Das Werk des Mohammed ist nicht so ausgedehnt, als diese; er behandelt weder die *unbestimmten* Gleichungen des zweiten noch des ersten Grades. Wir finden dafür den Grund in der Vorrede des Verfassers, der uns berichtet, dass er dies gedrängte Werk auf Befehl des Kalifen Al Mamun verfasst habe, um eine Menge von Operationen zu erleichtern, welche sich beim Verkehr der Menschen und bei ihren täglichen Bedürfnissen darbieten.

Dieses würde hinreichen, uns zu beweisen, dass die Araber damals weitläufigere und höher stehende Werke besessen haben, wenn wir nicht auch sonst wüssten, dass sie in der That die gelehrten Schriften der Inder gekannt, und selbst ein Werk über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades geschrieben haben, wie wir noch späterhin sagen werden.

Dem sei aber wie ihm wolle, merkwürdig ist es auf jeden Fall und wohl der Betrachtung der Gelehrten von Europa würdig, dass ein Werk über Algebra, welches von den Arabern *im 11ten Jahrhundert als ein elementares betrachtet wurde* und gewisser Maassen als ein praktisches Handbuch zum Gebrauch des Volks diente, dass dieses 700 Jahre später die *Ars magna* der Europäer war und die Basis und der Ursprung ihrer grossen wissenschaftlichen Entdeckungen.[200])

---

199) Es scheint, dass das Verhältniss $\frac{62832}{20000} = \frac{3927}{1250} = 3,14160$ den Indern angehört, und dass sie dasselbe durch die Berechnung der Seite des regelmässigen Polygons von 768 Seiten gefunden haben. *Gl' Indiani, come apparisce da un libro dei Bramini, intitolato Ajin-Akbari, avean trovato con ingegnosissimo metodo Geometrico, mediante l'inscrizione di un poligono regolare di 768 lati, che la circonferenza del circolo sta al diametro come 3927 a 1250.* (*Saggio sulla storia delle mathematiche, opera del Sig. P. Franchini*, Lucca 1821, in 8.) Th. Simpson ist von selbst auf das Verhältniss 3,1416 gekommen, durch die Einbeschreibung des Polygons von 768 Seiten; er hat sogar noch das nähere Verhältniss $\frac{628317}{200000}$ erhalten (s. seine *Elemente der Geometrie*). Seine Methode ist sehr einfach; und ich weiss nicht, weshalb man niemals davon spricht.

200) Bisher haben wir von den Arabern nur das Werk über Algebra von Mohammed ben Musa gekannt. Es ist wenigstens das einzige, von dem die Geometer des 16ten Jahrhunderts, Lucas de

Mohammed hat ein Werk über die ebenen und sphärischen Dreiecke geschrieben, welches noch unter dem Titel *De figuris planis et sphaericis* existiren soll.

Man besitzt auch ein Werk über Geometrie, welches er wahrscheinlich in Gemeinschaft mit seinen beiden Brüdern, Hamet und Hasen, verfasst hat; denn es hat zum Titel: *Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti, Hameti, Hasen.* In diesem Werke findet sich die Formel für die Fläche des Dreiecks, als Function der drei Seiten, bewiesen; und eine Anwendung von ihr auf ein Dreieck gemacht, das zu seinen Seiten dieselben drei Zahlen 13, 14 und 15

Burgo, Cardan, Pelletier, Tartalea, Stevin u. a. gesprochen haben. Aber es haben noch viele andre arabische Autoren über Algebra geschrieben; von mehren derselben finden wir die Namen und die Titel ihrer Werke in der *Orientalischen Bibliothek* von Herbelot unter den Wörtern *Gebr* und *Ketab* (p. 966, 967, 981 in der Ausg. in fol., 1697).

Es giebt ein Werk, 1812 in Calcutta aus dem Arabischen ins Englische übersetzt, welches die Arithmetik, die Geometrie und die Algebra behandelt und von dem es mich wundert, dass man, obgleich man sich schon einige Jahre mit dem Studium der indischen und arabischen Wissenschaft beschäftigt, von ihm gar nicht spricht. Wir fanden folgenden Titel für dieses Werk, das wir noch nicht kannten, in dem Katalog der Bibliothek des Langlès, art. 552: *The khoolasut-ool-hisab, a compendium of arithmetic and geometry; in the arabic language, by Buhae-oodd-deen, of Amool in Syria, with a translation into persian and commentary, by the late Muoluwee Ruoshun Ulee of Juonpoor: to which is added a treatise on algebra, by Nujm-ood-den Ulee khan, head Qazee, to the Sudr Deewanee and Nizamut Udalut, Revised and edited by Tarinee Churun Mitr, Muoluwee Jan Ulee and Ghoolam Ukbur.* Calcutta, Pereira 1812, gr. 8.

Libri liefert ein Werk über Algebra, das aus dem arabischen Original ins Lateinische übersetzt ist und in der königlichen Bibliothek Manuscript geblieben ist, unter dem Titel: *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit, et secundum librum qui Indorum dictus est, composuit.*

Dieses Werk ist in mehrer Hinsicht von Werth. Zuerst ist es wesentlich verschieden von dem des Mohammed ben Musa; denn es bezieht sich einzig nur auf die einfache und doppelte *Regula falsi.* Und zweitens zeigt es uns, dass diese Regeln von den Indern herkommen. Man hat sie bisher den Arabern zugeschrieben, auf die Autorität des Lucas de Burgo gestützt, der sie die Regeln des *Helcatagm „e vocabulo Arabo"* nennt. (*Summa de Arithm.* Dist. VII, Tract. I.)

In andern Werken aber, aus derselben Zeit, nennt man sie *Regula falsi* oder *augmenti et decrementi*, ebenso wie der Compilator Abraham (s. *Algorithmus de integris, minutiis vulgaribus, ac proportionibus, cum annexis de tri, falsi, aliisque regulis.* Leipzig 1507, in 4.).

hat, wie bei den Indern. Der Beweis ist derjenige, den Fibonacci und Jordan Nemorarius im 13ten Jahrhundert gegeben und den Lucas de Burgo und Tartalea zu unsrer Kenntniss gebracht haben. Er scheint den Arabern anzugehören; denn er ist verschieden von dem des Hero von Alexandrien.

Die drei Söhne des Musa ben Schaker haben noch viele andre Werke geschrieben, welche man in der *Bibliotheca Arabico-Hispana* von Casiri (T. I, p. 418) angegeben findet.

Alkindus, einer ihrer berühmtesten Zeitgenossen, welchen Cardan eben so wie den Mohammed ben Musa zu den zwölf grössten Genies der Welt rechnet [201]), hat auch über alle Theile der Mathematik geschrieben. Cardan erwähnt sehr lobend sein Werk: *De regula sex quantitatum.* [202]) Wir haben in der Note VI den Zweck dieser Regel der sechs Quantitäten angegeben, was durch den Calcul oder durch eine aus dem Ptolemäischen Theorem abgeleitete Construction geschah.

Alkindus hat über die Arithmetik der Inder (*De Arithmetica indica*) und über die Algebra (*De quantitate relativa, seu Algebra*) geschrieben. Seine andern, sehr zahlreichen Werke wollen wir nicht anführen. Ein Theil davon muss sich noch in den Bibliotheken Spaniens finden. Mehre würden ohne Zweifel von Interesse sein. [203])

Thebit ben Corah, Schüler des Mohammed ben Musa, war auch ein berühmter Geometer, der die Mathematik in ihrer ganzen Ausdehnung umfasste. Unter den zahlreichen von ihm hinterlassenen Werken, deren Verzeichniss man bei Casiri findet, giebt es eines, dessen Titel: *De problematibus algebraicis geometrica ratione comprobandis*, die Aufmerksamkeit der Geometer lebhaft in Anspruch nehmen musste; denn derselbe zeigt an, dass Thebit die Algebra auf die Geo-

201) *De subtilitate libri XXI*, lib. XVI.

202) *Ibid.* lib. XVI. — *Practica arithmeticae*, cap. 46. — *Opus novum de proportionibus numerorum*, etc. Propositio quinta.

203) Ein solches wäre sein Werk über die indische Arithmetik. Denn es ist ganz eigenthümlich, dass man, seit der langen Zeit, in der die Frage über den Ursprung unsres Zahlensystems behandelt ist und in der man sich nicht über die Bedeutung der Stelle bei Boëtius und des darauf bezüglichen Briefes von Gerbert vereinigen konnte, dass man, statt über die Form der Ziffern, welche nothwendig variiren mussten, Betrachtungen anzustellen, die beiden Piecen mit den arithmetischen Werken verglichen hat, die uns die Araber hinterlassen haben und von denen, wie ich glaube, keines übersetzt oder in dem Original-Text überliefert ist.

metrie anwandte. Und es ist ohne Zweifel der Titel dieses Werks, der Montucla zu dem Ausspruch veranlasste: *„Thébit a écrit sur la certitude des démonstrations du calcul algébrique, ce que pourrait donner lieu de penser que les Arabes eurent aussi l'idée heureuse d'appliquer l'algèbre à la Géométrie."* Diese Conjectur ist für uns eine bestimmte geworden, welche schon durch die Algebra des Mohammed ben Musa bestätigt ist und wovon man einen noch überzeugendern Beweis in einem andern Werke findet, dessen Kenntniss wir L. Am. Sédillot verdanken.

Dieses Werk ist ein Fragment der Algebra (gefunden in dem arabischen Manuscript, Nr. 1104 in der königl. Bibl.), worin die Gleichungen des dritten Grades *geometrisch* gelöst sind. Sédillot belehrt uns, dass der Verfasser, bevor er zu der Auflösung dieser Gleichungen ging, die des Problems von den zwei mittlern Proportionalen gab, welches er durch zwei Parabeln löste, und dessen er sich zur Auflösung gewisser Gleichungen bediente. Hatte der arabische Geometer wahrgenommen, dass alle Gleichungen des dritten Grades durch die beiden mittlern Proportionalen und die Trisection des Winkels sich auflösen lassen, welches, wie man weiss, eine der ehrenvollen Entdeckungen Vieta's war? Er construirt die Wurzeln der Gleichungen von der Form $x^3 - ax - b = 0$ mit Hülfe eines Kreises und einer Parabel. Aber wir glauben, dass es sich immer noch um Zahlengleichungen handelt, die einzigen, welche man in den arabischen Werken und bei den Neuern bis Vieta findet, welchem man diesen immensen Schritt verdankt, den man thun musste, um zur Idee und Betrachtung der Buchstabengleichungen zu gelangen.

Trotz dieser Beschränkung in der algebraischen Speculation der Araber, können wir doch sagen, dass sie nicht allein die Algebra gekannt, sondern dass sie auch die Kunst besessen haben, die Formeln graphisch auszudrücken und ihre Bedeutung augenscheinlich darzustellen; eine so schöne und werthvolle Kunst, welche Kepler bedauert nicht zu kennen[204]), und welche eine der schönsten Erfindungen Vieta's ist.

---

204) Indem Kepler nicht graphisch die Eigenschaft aus der Gleichung des zweiten Grades darstellen konnte, welche das Verhältniss der Seite des regelmässigen Fünfecks zum Radius des umgeschriebenen Kreises giebt, drückt er sich so aus: *Quomodo affectionem repraesentabo? quo actu geometrico? Nullo alio id doceor facere, quam usurpando proportionem, quam quaero: principium petitur. Miser calculator, destitutus omnibus geometriae praesidiis, haerens inter spineta numerorum, frustra cossam suam respectat. Hoc unum est discrimen inter cossicas et inter geometricas determinationes.* (*Harmonices mundi*, lib. 1, p. 37.)

Man hat immer geglaubt, dass die Araber nicht über die Gleichungen des zweiten Grades hinausgegangen wären; indem man diese Meinung darauf gründet, dass Fibonacci und Lucas de Burgo bei diesem Punkt stehen geblieben sind.[205]) Montucla hat dieses zuerst in Zweifel gezogen, und vermuthet, dass die Araber auch Gleichungen vom dritten Grad behandelt haben. Er stützt sich auf den Titel: *Algebra cubica, seu de problematum solidorum resolutione*, eines Manuscripts, das durch den berühmten Golius aus dem Orient herbeigeschafft ist und das sich in der Bibliothek zu Leyden befindet.[206]) Das durch Sédillot gefundene Fragment der Algebra bestätigt die Conjectur Montucla's, und bildet dadurch einen der wichtigsten Punkte in der Geschichte der arabischen Wissenschaft.

Wir müssen jedoch sagen, dass uns Nichts zu der Behauptung autorisirt, dass sie die *algebraische* Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, d. h. den Ausdruck für die Wurzeln dieser Gleichungen, gekannt haben. Der Titel des Manuscripts in der Bibliothek zu Leyden scheint im Gegentheil anzudeuten, dass darin die Rede ist von ihrer geometrischen Construction vermittelst der *loca solida* (Kegelschnitte), so wie in dem der königl. Bibliothek zu Paris.

Die Trigonometrie ist einer von denjenigen Theilen der Mathematik, welchen die Araber, wegen ihrer Anwendungen auf die Astronomie, mit der grössten Sorgfalt cultivirten. Auch verdankt sie ihnen die zahlreichen Vervollkommnungen, welche ihr eine neue Gestalt gaben und sie zu den Anwendungen geeignet machten, welche die Griechen nur mit vieler Mühe gemacht haben.

Die ersten Fortschritte in der Trigonometrie datiren sich von Albategnius, Prinz von Syrien[207]), welcher um 880 lebte und 928 starb. Dieses ist der grosse Astronom, der Ptolemäus der Araber genannt, der die glückliche und fruchtbare Idee hatte, für die *Chorden* der Bögen, deren sich die Griechen in ihren trigonometrischen Rechnungen bedienten, die halben Chorden der doppelten Bögen zu substituiren, d. h. die *Sinus* der gegebenen Bögen. „Ptolemäus," sagt er, „bediente sich nur der ganzen Chorden zur Erleichterung der

---

205) Fibonacci löst zwar einige Aufgaben von höhern Graden auf, aber nur solche, die sich auf den zweiten Grad reduciren.

206) *Histoire des Mathématiques*, T. I, p. 383.

207) Der eigentliche Name dieses Geometers ist Mohammed ben Geber; er wurde al Batani zubenannt, weil er zu Batan, einer Stadt in Mesopotamien, geboren war, und aus diesem Namen haben die Neuern Albategnius gemacht.

Beweise, aber wir, wir haben die Hälften der doppelten Bögen genommen." [208])

Albategnius ist zu der Fundamental-Formel der sphärischen Trigonometrie gekommen: $cos.\ a = cos.\ b\ .\ cos.\ c + sin.\ b\ .\ sin.\ c\ .\ cos.\ A$, von der er verschiedene Anwendungen macht. [209])

Man findet in seinen Werken die erste Idee zu den Tangenten der Bögen und den Ausdruck $\frac{\text{sinus}}{\text{cosinus}}$, dessen sich die Griechen nicht bedienten. Albategnius führt sie in die Rechnung der Gnomonik ein und nennt sie den *ausgedehnten Schatten.* Dieses ist die trigonometrische *Tangente* der Neuern. Man sieht, dass Albategnius doppelte Tafeln hatte, solche, die ihm die Schatten gaben, welche den Sonnenhöhen correspondirten, und solche, die ihm die Höhen gaben, welche den Schatten correspondirten; d. h. die Tangenten der Bögen und die den Tangenten entsprechenden Bögen. Aber diese Tafeln waren für den Radius 12 berechnet, während die der Sinus für den Radius 60 galten; woraus hervorgeht, dass er nicht die Absicht gehabt hat, diese Tangenten in die trigonometrischen Rechnungen einzuführen. [210])

Dem Abu l Wefa und Ibn Jounis, welche ein Jahrhundert nach ihm lebten, verdankt man diesen Schritt.

Abu l Wefa (937—998) definirt, nachdem er die Theorie der Sinus auseinandergesetzt hat, andre trigonometrische Linien, „welche er in seinem Werke anwenden werde, um sich derselben zur Auflösung verschiedener Probleme der sphärischen Astronomie zu bedienen."

Diese sind die *Tangenten* und *Cotangenten*, welche er *umbra versa* und *umbra recta* nennt, und die *Secanten*, die er *diametri umbrae* nennt.

Abu l Wefa hat seine Tangenten-Tafel für den Radius $= 60$ berechnet, er hat aber keine für die Secanten.

Man besitzt diese Tafel der Tangenten nicht; aber, was wichtig zu wissen ist, es war eine bestimmte Angabe für ihre Einführung in die trigonometrische Rechnung.

Diese glückliche Revolution in der Wissenschaft, welche diese zusammengesetzten und unbequemen Ausdrücke durch Sinus und Cosinus verbannten, fand erst 500 Jahre später

---

208) Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 12.

209) *Ibid.*, p. 21, 164. Man weiss, dass die entsprechende Formel $cos.\ A = sin.\ B\ .\ sin.\ C\ .\ cos.\ a - cos.\ B\ .\ cos.\ C$ sich von Vieta herleitet, der sie 1503 in seinem *Variorum de rebus mathematicis responsorum* lib. octav. gegeben hat.

210) Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 17.

bei den Neuern statt. Man schreibt diese Ehre dem Regiomontanus zu, und beinahe ein Jahrhundert später kannte sie Copernicus noch nicht.

Ibn Jounis (979—1008) bediente sich auch der Tangenten und Cotangenten und hatte auch Sexagesimal-Tafeln. [211]

Er hatte den ersten Gedanken, Hülfsbögen zu berechnen, welche die Formeln vereinfachten und der Ausziehung der Quadratwurzeln, die die Methoden so mühsam machten, enthoben. Diese, gegenwärtig so gebräuchlichen Hülfsmittel des Calculs, sind lange Zeit in Europa unbekannt geblieben, und man findet davon erst 700 Jahre später einige Beispiele in den Werken Simpson's (Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 165).

Die sphärische Trigonometrie verdankt Geber, einem Astronomen, von den man annimmt, dass er um 1050 gelebt habe, die Formel $\cos. C = \sin. B . \cos. c$, welche die fünfte von den sechs Formeln für die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke ist. [212] Die sechste, $\cos. a = \cot. B . \cot. C$, ist bis zum 16ten Jahrhundert unbekannt geblieben; man verdankt sie Vieta.

Diese beiden Formeln sind die, welche beide spitzen Winkel des Dreiecks enthalten. Die Griechen hatten nur die vier ersten, welche hinreichend waren, weil sich bei ihren Anwendungen der Trigonometrie auf Astronomie der Fall, dass die drei Winkel bekannt waren, nicht darbot.

Dieses sind die hauptsächlichsten Vervollkommnungen, welche die Trigonometrie durch die Araber erhalten hat.

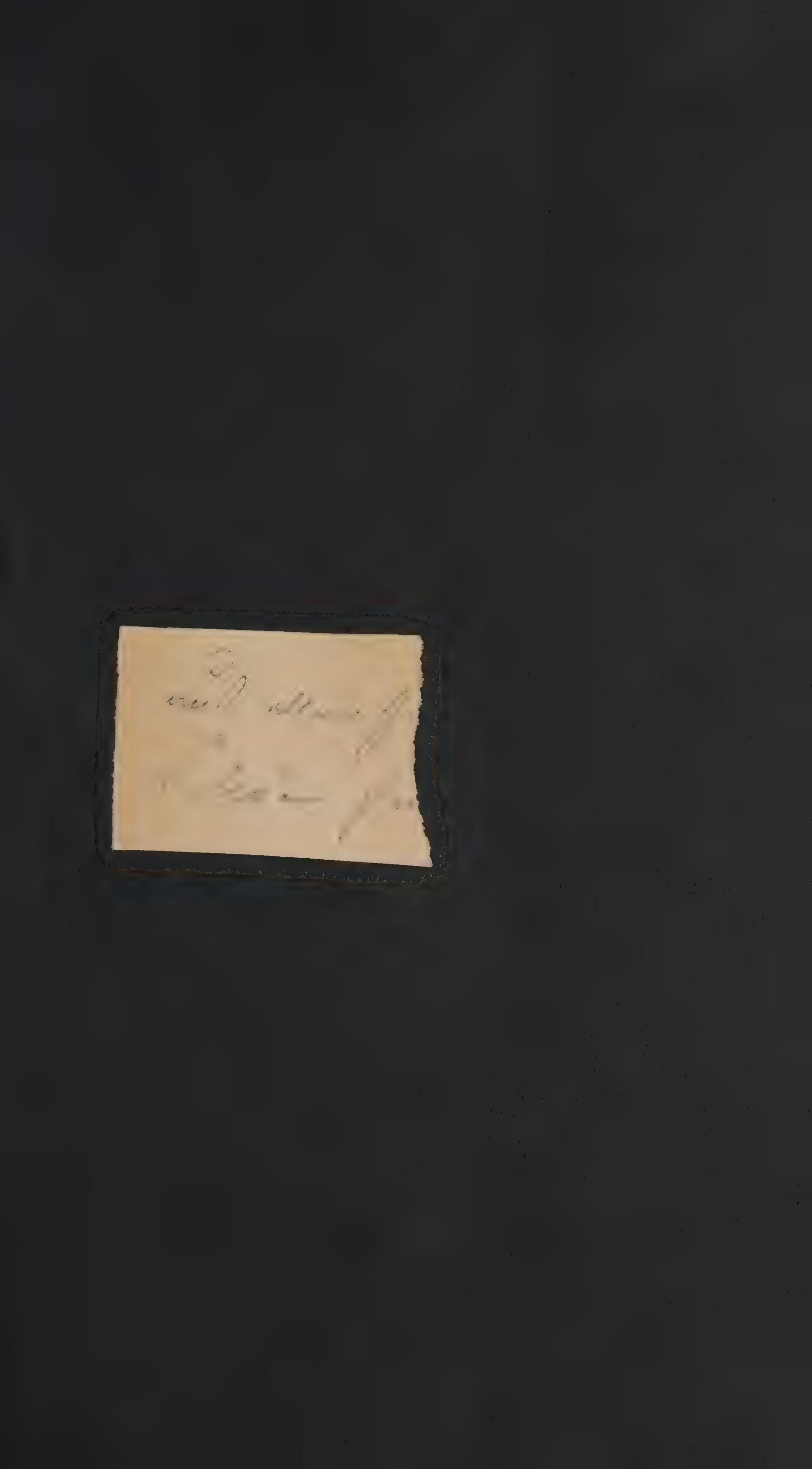
Sie konnten daher die Astronomie mit Erfolg cultiviren. Auch zählt man eine grosse Anzahl von arabischen Autoren, die sich dieser Wissenschaft widmeten. Wir haben jedoch hier nicht von den Fortschritten zu sprechen, die sie darin machten; und wir wollen noch einige Worte von der Einen ihrer Anwendungen, von der Gnomonik sagen, da diese im Grunde nur eine Aufgabe der reinen Geometrie ist.

Die Araber legten eine grosse Wichtigkeit auf die Construction der Sonnenuhren, da dieses beinahe ihr einziges Mittel zur Zeitmessung war. Seit dem neunten Jahrhundert haben sich berühmte Geometer damit beschäftigt. Auf diese Kunst beziehen sich auch ohne Zweifel die beiden Werke von Alkindus, betitelt: *De horologiorum sciathericorum*

---

211) Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 164.

212) Wir nennen *B* und *C* die beiden schiefen Winkel des Dreiecks, *b* und *c* die gegenüberliegenden Seiten und *a* die Hypotenuse.





descriptione und *De horologio horizontali praestantiore*; und die beiden folgenden von Thebit ben Corah: *De horometria seu horis diurnis ac nocturnis* und *De figura linearum quas gnomometrum* (*styli apicis umbra*) *percurrit*. Dieser letzte Titel scheint anzudeuten, dass Thebit sich der Betrachtung der Kegelschnitte zur Construction der Sonnenuhren bedient habe. Wir sehen diese Methode noch von einem andern arabischen Geometer des 13ten Jahrhunderts auf verständige Weise angewandt. Bei den Neuern hatte Maurolicus die erste Idee davon, der dabei in seinem Werke einen Charakter von Originalität entwickelte, der ihm alle Ehre macht.

Der arabische Schriftsteller, dem die Gnomonik am meisten schuldig zu sein scheint, ist Abul Hassan Ali von Marocco, der zu Anfang des 13ten Jahrhunderts lebte; sein Werk hatte den Titel: *Das Buch, welches den Anfang und den Zweck vereinigt*, weil es aus zwei gesonderten Theilen besteht, deren erster eine Behandlung des Calculs und der zweite der Instrumente und ihrer Anwendung enthält. Sédillot, dessen zu frühen Verlust (1832) die Mathematik und die orientalischen Sprachen betrauern, hat eine Uebersetzung dieses Werks geliefert, welche unter dem Titel: *Traité des instrumens astronomiques des Arabes* (2 Vol. in 4., Paris 1834) von seinem Sohn L. Am. Sédillot herausgegeben ist.

Dieses Werk ist eine vollständige und sehr genaue Behandlung der Gnomonik der Araber. Es enthält mehre neue Sachen, welche Erfindung des Abul Hassan sind.

Man findet darin zum ersten Mal die Linien der *gleichen* Stunden, wovon die Griechen keinen Gebrauch gemacht haben. Es scheint, dass diese Neuerung, welche von den Neuern festgehalten ist, demselben Autor gebührt, denn er sagt: „Dieses bildet einen Theil der ungewöhnlichen Dinge, die wir in diesem Werke geben, als ein Resultat unsrer Meditationen und Reflexionen." (Lib. III, Cap. XIV.) Er giebt mit der grössten Genauigkeit die Linien der *temporären* Stunden (die auch *antike*, *ungleiche* [213]), *jüdische* genannt werden).

213) Diese Stunden waren unter einander gleich während eines Tages, aber ihre Dauer veränderte sich von einem Tage zum andern, weil sie immer der zwölfte Theil der Zeit waren, welche zwischen dem Aufgang und Untergang der Sonne lag. Die diese Stunden bezeichnenden Linien waren sehr wenig von der geraden Linie verschieden, so wie es Delambre durch die Rechnung nachgewiesen hat (*Histoire de l'astronomie ancienne*, T. II, p. 481). Aber die Natur dieser Linien ist noch nicht bekannt; sie könnte den Ge-

In dem XXVIsten und den folgenden Kapiteln, betitelt: *Bestimmung des Parameters und der Hauptaxe der Parallelen für irgend einen Punkt*, wendet Abul Hassan die Eigenschaften der Kegelschnitte an, um die Bögen der Zeichen zu beschreiben. Er berechnet die Parameter und die Axen dieser Curven, als Functionen der Breite des Orts, der Declination der Sonne und der Höhe des Gnomons.

Dieser Theil des Werks beweist, dass der Geometer und Astronom Abul Hassan ein Mann von Verdienst war. Er giebt für seine Regeln keinen Beweis; jedoch muss sich derselbe in einem *Werke über Kegelschnitte*, welches er ververfasst hat, finden. Delambre, der diese ganze geometrische Partie im Werke des Abul Hassan gründlich untersucht hat, findet sie weit vorzüglicher, als die von Commandin und Clavius gegebenen Vorschriften, welche gleichfalls ihre Bögen und Zeichen mit Hülfe der Theorie der Kegelschnitte zeichneten. Jedoch gesteht er zu, dass die Regeln des arabischen Geometers noch nicht alle die Einfachheit besitzen, deren sie fähig sind. Er benutzt die Polhöhe zur Bestimmung des Parameters, was die Rechnung unnützer Weise complicirt der verlängert; denn der Ausdruck des Parameters, auf die unentbehrlichen Elemente reducirt, ist unabhängig von der Polhöhe und enthält nur die Declination und die Höhe des Gnomons, so wie es Delambre nachweist. Es ist dieses, wie er sagt, ein sehr merkwürdiges Theorem, das für die Gnomonik von hinlänglicher Wichtigkeit ist, so dass es von den Autoren, die für die Beschreibung der Bögen der Zeichen, vermöge der Eigenschaften der Kegelschnitte, so complicirte Methoden gegeben haben, nicht unbeachtet bleiben konnte.[214])

Dieses Theorem, geometrisch ausgedrückt, sagt, *dass alle Schnitte eines geraden Kegels, welche durch Ebenen, die gleichweit vom Scheitel entfernt sind, gebildet werden, denselben Parameter haben.*

---

genstand einer hübschen analytischen Aufgabe liefern, die sich auf folgende reduciren würde:

Wenn man sich auf einer Halbkugel mehre Kreisbögen denkt, deren Ebenen unter einander parallel und gegen die Ebene des grössten Kreises, der die Basis der Halbkugel bildet, geneigt sind; und wenn diese parallelen Kreisbögen nach einem gegebenen Verhältniss getheilt werden, so bilden die Theilungspunkte eine Curve doppelter Krümmung, welche auf der Halbkugel liegt. Legt man nun durch diese Curve einen Kegel, dessen Scheitel der Mittelpunkt der Halbkugel ist, so wird der Schnitt dieses Kegels durch eine Ebene eine Linie der gleichen Stunden sein.

214) *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 536.

Diese Eigenschaft des geraden Kegels findet auch beim schiefen statt. Das folgt aus dem schönen Theorem des Jacob Bernoulli, welches wir bei Gelegenheit der Kegelschnitte des Apollonius angeführt haben, und dessen er sich bediente, um die Parameter für die Schnitte eines schiefen Kegels (indem er die schneidenden Ebenen senkrecht gegen das Axendreieck annahm) zu bestimmen.

Man schreibt dem Mahomet Bagdadin, einem Geometer des 10ten Jahrhunderts, eine elegante Abhandlung über die Eintheilung der Oberflächen zu, welche von Joh. Dee und Commandin übersetzt wurde. [215])

Dieses Werk hat zum Gegenstand, eine Figur durch eine unter gewissen Bedingungen gezogene Linie in Theile zu zertheilen, die gegebenen Zahlen proportional sind. Es besteht aus 22 Sätzen, von denen sich 7 aufs Dreieck, 9 aufs Viereck und 6 aufs Fünfeck beziehen. Der Verfasser giebt sie unter der Form von Problemen, wozu er Auflösungen liefert, die er hernach beweist.

Seiner Natur nach ist dieses Werk die Ergänzung eines Werks über Geodäsie und ist auch von allen neuern Geometern in ihren Behandlungen der praktischen Geometrie nachgeahmt worden.

Dee und Commandin glaubten, dass diese Arbeit von Euclid herkommen könne, welcher nach dem Berichte des Proclus, in seinem Commentar zum ersten Buch der Elemente, auch über die Theilung der Figuren geschrieben hat. Diese Meinung wird von Savilius nicht getheilt und seitdem ist die Frage unentschieden geblieben. Wir sind sehr geneigt, dies Werk einem griechischen Geometer zuzuschreiben; dem Euclid, wenn man will, da Proclus von ihm einen *Tractatus de divisionibus* anführt; denn es ist wegen seiner Form und wegen der Reinheit seines geometrischen Stils vollkommen den Werken der Griechen ähnlich, und keineswegs denen der Araber, welche, die Wissenschaft der erstern mit der der Inder vereinigend, den algebraischen Calcul in ihre Geometrie einführten und ihre allgemeinsten Sätze an numerischen Datis bewiesen und nicht in dem Zustand derjenigen Allgemeinheit und Abstraction, welche sich in dem genannten Werke finden. Wir fügen noch hinzu, dass die Griechen seit den ersten Zeiten der alexandrinischen Schule über Geodäsie geschrieben

---

215) *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdedino adscriptus. Nunc primum Joannis Dee Londinensis, et Federici Commandini Urbinatis opera in lucem editus.*
Federici Commandini de eadem re libellus. Pisauri 1570, in 4.

haben, so wie wir es aus einem von Venturi herausgegebenen Werk des ältern Hero sehen; und dass, wenn sie nicht ihr Werk *De divisionibus superficierum* gehabt hätten, dieses eine Lücke gewesen wäre, welche die Vollendung ihrer Werke nicht anzunehmen gestattete.

Die Optik ist bei den Arabern von sehr vielen Autoren behandelt, von denen der berühmteste Alhasen ist. Sein Werk, das auf uns gekommen ist [218]), empfiehlt sich durch gelehrte und ausgedehnte Betrachtungen der Geometrie; zumal bemerkt man darin die Auflösung einer Aufgabe, welche in der Analysis von einer Gleichung des vierten Grades abhängt. Es handelt sich darum, den Reflexionspunkt auf einem sphärischen Spiegel zu finden, wenn der Ort des Auges und der des Objects gegeben sind. Dieses Problem hat berühmte neuere Geometer beschäftigt, so wie Sluze, Huygens, Barrow, Marquis von Lhopital, R. Simson. Der letztere hat es sehr einfach durch reine geometrische Betrachtungen gelöst. (*Sectionum conicarum libri V*, Appendix, p. 223.)

Man hat geglaubt, dass das Werk des Alhasen der Optik des Ptolemäus nachgeahmt wäre. Dieses ist die Meinung Montucla's. Aber Delambre, obgleich er im Allgemeinen zu Gunsten der Griechen eingenommen ist, theilt dieselbe nicht; er glaubt sogar, dass es möglich ist, Alhasen habe das Werk von Ptolemäus gar nicht gekannt, weil das seinige viel vorzüglicher ist. [217]) Dem sei aber wie ihm wolle, das Werk des Alhasen macht den Arabern Ehre, und wir müssen es als die Grundlage unsrer Kenntnisse in der Optik betrachten. Der polnische Geometer Vitellio, einer der Gelehrtesten des 13ten Jahrhunderts, hat aus demselben mit Nutzen geschöpft, um sein Werk der Optik, das erste, welches ein europäischer Geometer hat erscheinen lassen, zu verfassen.

Dem L. Am. Sédillot verdankt man die neuere Kenntniss eines Original-Werks der Araber: *Traité des connues géométriques*, par Hassan ben Haithem. [218])

---

216) Gedruckt zu Basel, 1572, nebst der dritten Ausgabe der Optik von Vitellio, unter dem Titel: *Opticae thesaurus. Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis et nubium ascensionibus. Item Vitellionis Thuringo-Poloni libri decem, a Fr. Risnero*, in fol.

217) *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. II, p. 412.

218) *Nouveau journal asiatique*, Mai, 1834.

Die Abschrift, wovon Sédillot diese Uebersetzung geliefert hat, ist vom 3ten Juni 1144 datirt; sie findet sich nebst sechs andern mathematischen Werken in dem arabischen Manuscript, Nr. 1104 in der königl. Bibliothek. Sédillot verspricht diese Piecen bekannt zu machen, von denen die eine das oben erwähnte Fragment der Algebra

Dieser Geometer florirte um das Jahr 1009 und starb zu Cairo 1038. Er schrieb einen Commentar über den Almagest und einen andern über die Definitionen, welche zu Anfang der Elemente Euclid's stehen.

Sein *Traité des connues* ist in zwei Bücher getheilt. „Das erste", sagt er, „enthält vollkommen neue Dinge, deren Gattung nicht einmal von den alten Geometern gekannt war; und das zweite enthält eine Reihe von Sätzen, welche denen analog sind, die in dem ersten Buch der *Data* enthalten sind, die sich aber nicht in diesem Werke Euclid's finden."

Unter dem Titel der *Prolégomènes* beschäftigt sich der Verfasser mit einer metaphysischen Discussion über die Definition der *connues*, ihre Abtheilungen und Unterabtheilungen, und über die Natur der Quantitäten, auf die sie sich beziehen.

Diese Präliminarien, sagt Sédillot, welche den Geist der Gelehrten aus der Zeit des Hassan ben Haithem charakterisiren, gestatten hinlänglich, genau die mathematische Philosophie der Araber zu würdigen.

Aber der gelehrte Uebersetzer belehrt uns nur über den Anfang dieser Prolegomena, und wir sehen es nicht ein, welches die Anwendung dieser subtilen Distinctionen auf die Sätze der Geometrie sein könnte, die das Wesentliche des Werks ausmachten. Ohne Zweifel bezogen sie sich auf die Form selbst, welche der Verfasser den Aussprüchen seiner Sätze gegeben hat. Zeigen sie aber den Nutzen dieser ungewöhnlichen Form und den wissenschaftlichen Charakter, so wie die wahre Bestimmung dieser Sätze? Das ist gerade das, was zu wissen von Wichtigkeit wäre.

Diese Form ist dieselbe, als die der *Data* des Euclid, so dass dieses Werk eine Nachahmung und eine Fortsetzung der *Data* des griechischen Geometers ist; jedoch mit dem Unterschiede, dass die Sätze des ersten Buchs „durchaus neue Sachen und solche, deren Gattung selbst den Alten unbekannt war", sich auf örtliche Sätze bezogen, während die des Euclid gewöhnliche Theoreme waren, in denen Alles bestimmt ist.

So war in den *Datis* des Euclid der Zweck eines Satzes der, zu beweisen, dass ein solcher Gegenstand (Punkt, Gerade oder Quantität), welcher aus einer solchen Construction oder aus solchen Bedingungen folgen musste, vollständig be-

---

über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades ist und daher eines der wichtigsten Monumente für die Geschichte der Mathematik bei den Arabern bilden wird.

kannt war; und den Werth und die Lage dieses Gegenstandes zu bestimmen.

Dieses ist auch der Zweck bei den Sätzen des ersten Buchs der *connues* von Hassan ben Haithem, aber es befindet sich darin bei jeder Aufgabe eine Unbestimmtheit der Bedingung, welche aus der Betrachtung eines *geometrischen Orts* entsteht.

Diese Sätze sind doppelter Art.

Bei den ersten handelt es sich darum, zu beweisen, dass ein solcher *Ort* vollkommen bekannt ist, wenn er durch die Aufeinanderfolge von Punkten gebildet wird, die durch gewisse Bedingungen bestimmt sind, und die directe und unmittelbare Construction dieses *Orts* zu geben.

Der Ausspruch eines Satzes dieser Art ist folgender:

Wenn man von zwei der Lage nach bekannten Punkten zwei gerade Linien zieht, die sich in einem Punkte schneiden, wo sie einen bekannten Winkel bilden; wenn man darauf die eine dieser Linien gerade fort verlängert und das Verhältniss dieser Linie zu ihrer Verlängerung ebenfalls bekannt ist, so wird der Endpunkt auf der Peripherie eines Kreises von bekannter Lage liegen. (Lib. I, Prop. VII.)

Bei allen diesen Sätzen ist der geometrische Ort die gerade Linie oder der Kreis. Sie scheinen im Allgemeinen aus den *Locis planis* des Apollonius entnommen.

Bei den Sätzen der zweiten Art ist es nicht der geometrische Ort, den man bestimmen will, sondern irgend eine andre Sache, die sich darauf bezieht und die, vermöge einer Unbestimmtheit in den Bestimmungen der Construction, unendlich vielen Punkten oder Linien gemeinschaftlich ist. — Beispiel:

Wenn von zwei sich berührenden Kreisen der eine innerhalb des andern liegt und wenn man an den kleinen Kreis eine Tangente zieht, deren Endpunkt (nicht der Berührungspunkt) sich in der Peripherie des grössern Kreises befindet; und wenn man diesen Endpunkt mit dem Berührungspunkt der beiden Kreise verbindet, so ist das Verhältniss dieser letztern Linie zur Tangente ein bekanntes. (Prop. XIX.)

Dieser letzte Satz und die von derselben Art, sind, wie man sieht, in der Weise der Porismen des Euclid, wie diese von R. Simson aufgefasst wurden.

Die erstern, welche davon verschieden sind, weil die zu bestimmende Sache der geometrische Ort ist, entsprechen der Idee, welche wir uns von der Natur und der wahren Be-

stimmung dieser Porismen gemacht hätten, bevor wir dieses Werk des arabischen Geometers kannten. (S. Note III.)

Dieses Werk ist bis jetzt das einzige, welches uns eine Analogie oder wenigstens den Schein einer Analogie mit dem berühmten Buch der Porismen von Euclid geliefert hat. Dieser Umstand giebt demselben in unsern Augen den Werth; und die Entdeckung dieses Werks, wodurch gewisser Maassen die Meinung des gelehrten Geometers Castillon bestätigt wird, welcher glaubte, dass das Werk von Euclid noch im 13ten Jahrhundert im Orient existirte, lässt uns wenigstens hoffen, unter den zahlreichen arabischen Manuscripten, die bis jetzt noch ungekannt in den Bibliotheken liegen, einige Spuren von dieser Lehre der Porismen zu finden. Wir wissen nicht, ob es diese Theorie ist, auf die sich ein Werk von Thebit ben Corah bezieht, welches wir unter folgendem Titel in dem Katalog der orientalischen Manuscripte der Bibliothek zu Leyden aufgeführt finden: *Datorum sive determinatorum liber continens problemata geometrica.* Dieses Werk empfiehlt sich, durch seinen Titel und wegen des Namens des Verfassers, der Beachtung aller Geometer, welche das Arabische verstehen.

Alle Sätze des zweiten Buchs der *connues* sind in der Weise derer bei Euclid, aber von diesen verschieden; sie gehören, eben so wie diese, der elementaren Geometrie (der geraden Linie und dem Kreis) an, mehre jedoch bieten einen höhern Grad von Schwierigkeit dar. Es sind solche, wie man sie heute den Schülern als Uebungsbeispiele vorlegt, wenn diese schon die Elemente der Geometrie inne haben. Wir führen folgende an:

Wenn man in einem Dreieck, dessen Seiten und Winkel bekannt sind, eine Linie vom Scheitel nach der Basis zieht, und wenn das Verhältniss des Quadrats dieser Linie zu dem Rechteck aus den beiden Segmenten der Basis bekannt ist, so ist auch die Lage der gegebenen Linie bekannt. (Prop. XV.)

Wenn man durch zwei angenommene Punkte auf der Peripherie eines Kreises, der seiner Grösse und Lage nach gegeben ist, zwei gerade Linien zieht, die sich in einem andern Punkt dieser Peripherie schneiden, und wenn man das Produkt der beiden Geraden kennt, so ist jede dieser Geraden der Grösse und Lage nach bekannt. (Prop. XXII.)

Wenn man zwei Kreise ihrer Grösse und Lage nach kennt und man zieht eine gerade Linie, welche beide Kreise berührt, so kennt man auch diese Gerade ihrer Grösse und Lage. (Prop. XXIV u. XXV, die letzten im Werk.)

„Alle diese Dinge“, sagt am Ende Hassan ben Haithem, „sind von bedeutendem Nutzen für die Auflösung geometrischer Aufgaben und sind von keinem der ältern Geometer gesagt worden.“

Dieses Werk verdient, seiner Natur nach, zwischen die *Data* und die *Porismata* des Euclid und die *Loca plana* des Apollonius einer Seits, und zwischen die Werke des R. Simson und Stewart andrer Seits gestellt zu werden; es enthält, wie diese, *Complemente* der elementaren Geometrie, welche zur Erleichterung der Auflösung von Aufgaben bestimmt sind.

Man hat in diesem Werk des Hassan ben Haithem eine Analogie mit der Geometrie der Lage, wie sie D'Alembert und Carnot verstanden haben, zu finden geglaubt. Aber wir können nicht eine solche Analogie zwischen der Meinung des D'Alembert, welcher selbst darin eine Realisation, die der Natur der Algebra entgegen wäre, erkannte [219]), zwischen der *Géométrie de position* von Carnot und zwischen dem Werke des arabischen Geometers erkennen. Carnot hat bei seiner Geometrie der Lage hauptsächlich im Auge, die wahre Theorie der *negativen* Quantitäten darzustellen; und die Geometrie der Lage war in seinem Sinne, und in der That, nur die gewöhnliche Geometrie, in welcher, nach dieser Lehre der negativen Quantitäten, ein einziger Beweis, der an einer hinlänglich allgemeinen Figur ausgeführt ist, sich unmittelbar und ohne neue Hülfsmittel auf jede andre Form der Figur anwenden lassen müsse. [220])

---

219) „Es wäre zu wünschen, dass man Mittel finden möchte, die *Situation* in die Berechnung der Probleme eingehen zu lassen, was sie meisten Theils ausserordentlich vereinfachen würde; aber der Zustand und die Natur der Analysis scheinen es nicht zu gestatten.“ (*Encyclopädie*, Art. *Situation*.)

220) Dieses war eine wirkliche Neuerung, die einige Jahre vorher zwei Mathematiker sich nicht erlaubt hatten, welche die reine Geometrie zu dem speciellen Gegenstand ihrer Arbeiten wählten und dieser ihre Berühmtheit verdanken. Wir sprechen von R. Simson und Stewart, welche für einen Satz eben so viele Beweise lieferten, als die darauf bezügliche Figur, durch die Veränderung der respectiven Lage ihrer Theile, verschiedene Formen annehmen konnte. Carnot dagegen, nachdem er den Satz an einer Figur, in dem allgemeinen Zustand der Construction betrachtet, bewiesen hat, zeigt, was dieser Satz und die ihn ausdrückenden oder darauf bezüglichen Formeln werden müssen, wenn die Figur, durch die Veränderung der Lage ihrer verschiedenen Theile, sich selbst verändert. Diese neuen Formeln, welche er *correlative* in Bezug auf die erste nennt, und die er unmittelbar aus dieser ohne besondern Beweis ableitet, wurden direct, so wie die erste selbst, von Simson und Stewart bewiesen.

Diesen neuen Charakter der Allgemeinheit, der Leichtigkeit und Kürze, und der Natur der Theorien und zahllosen neuen Sätze, welche das Werk von Carnot enthält, verdankt dasselbe seinen wissenschaftlichen Werth und den glücklichen Einfluss, den es auf die Fortschritte der reinen Geometrie gehabt hat.

Ohne die Idee D'Alembert's zu benutzen, hat doch das Werk von Carnot durchaus keine Analogie mit dem Werk des arabischen Geometers über die *connues géométriques.*

Wir können unsre Betrachtungen über die Arbeiten der Araber in der Geometrie nicht beschliessen, ohne ein Wort von dem berühmten persischen Astronomen und Geometer Nassir Eddin von Thus (1201—1274) zu sagen, dessen in arabischer Sprache geschriebenen Werke alle Zweige der menschlichen Kenntnisse behandeln. Man findet darin, mit Ausnahme der auf die Astronomie bezüglichen, die Uebersetzungen mehrer griechischen Werke von Euclid, Archimedes und Theodosius, ein Werk über Algebra und ein *Compendium* der Arithmetik und Algebra. Von allen diesen Werken sind nur die Elemente Euclid's durch die berühmte Druckerei der Medici (Rom 1594, in fol.) veröffentlicht, nebst dem Commentar des Nassir Eddin, der geachtet ist, und da er mehre neue Beweise der Sätze Euclid's enthält, zur Zeit, als die arabische Sprache verbreiteter war als heute, mehren Autoren von Nutzen gewesen ist. Man zeichnet darin einen Beweis des fünften Postulats aus, welchen Wallis geistreich fand und ihn in dem IIten Theil seiner Werke reproducirte.

Aus dem Vorhergehenden schliessen wir nun als Resumé Folgendes:

Die Araber haben eine grosse Achtung und entschiedenen Geschmack für die mathematische Wissenschaft gezeigt;

Sie haben eine vollständige Kenntniss der Werke und des Wissens der griechischen Geometer gehabt;

Sie haben die Trigonometrie merklich vervollkommnet, und dieser Theil der Geometrie hat von ihnen seine neuere Form, die für die Fortschritte der Astronomie unumgänglich nothwendig war, erhalten;

In den andern Theilen der Geometrie scheinen sie nicht über die Griechen hinausgegangen zu sein, sei es, weil sie nicht das Erfindungs-Genie hatten, oder weil sie, nachdem sie sehr schnell bedeutende Kenntnisse in allen Theilen der Wissenschaft erlangt hatten, sich nicht die Mühe gaben, ihre Grenzen noch weiter hinauszuschieben;

In andrer Beziehung aber haben sie einen wesentlichen Vorzug vor den Griechen;

Sie haben die Algebra der Inder besessen, und haben die Anwendung der Algebra auf die Geometrie gekannt;

Ihre Werke dieser Art gehen bis zur Auflösung der Gleichungen des dritten Grades vermittelst geometrischer Construction;

Endlich, da sie die Geometrie der Griechen und die Algebra der Inder, die eine vermittelst der andern behandelten und vermöge der Unterstützung, welche diese beiden Theile sich gegenseitig zukommen liessen, haben sie ihrer mathematischen Wissenschaft einen eigenthümlichen und originellen Charakter mitgetheilt, der den Europäern überliefert ist und den dieselbe unter den Händen der letztern annehmen musste, um den Grund zu der im 16ten Jahrhundert so schnell erlangten Ueberlegenheit über die Geometer des Alterthums zu legen.

Geometrie der Occidentalen im Mittelalter.

Während die Araber eine schnelle und glänzende Laufbahn in der Wissenschaft zurücklegten, waren die Europäer noch in Unwissenheit versunken. Nach dem Isidorus von Sevilla, welcher der letzte war, den wir in unsrer Uebersicht über die Arbeiten der Lateiner genannt haben, haben uns bis zum 12ten Jahrhundert nur wenige Schriftsteller einige Spuren, nicht allein von der Ausbildung, sondern auch selbst von irgend welcher Kenntniss der Wissenschaften hinterlassen. In dieser Epoche zeigte sich die erste geistige Regung in Europa und es wurden zahlreiche Anstrengungen gemacht, um die alten Wissenschaften Griechenlands, die von den Arabern bewahrt und ausgebildet waren, hierher überzutragen. Diese Bewegung wiederholte sich mit neuer Kraft um die Mitte des 15ten Jahrhunderts, und damals, unterstützt durch die Kenntniss, welche man von den griechischen Manuscripten hatte, bereitete sie die grossen Entdeckungen des 16ten Jahrhunderts vor, von wo an sich die ungeheure Uebermacht der Neuern über die Alten in der Mathematik datirt.

Wir wollen einen kurzen Blick auf die Arbeiten werfen, die sich aus diesem Intervall von 800 Jahren auf die Geometrie beziehen.

8tes Jahrhundert. Zu Anfang des 8ten Jahrhunderts besass Beda eine für seine Zeit grosse Bildung und schrieb über viele verschiedene Gegenstände. Seine

auf Mathematik bezüglichen Werke sind: 1) Zwei Abhandlungen über theoretische und praktische Musik; 2) verschieschiedene Piecen über Astronomie, worunter man eine kleine Schrift *De circulis sphaerae et polo* unterscheidet, und eine über Gnomonik, unter dem Titel *De mensura horologii*, und eine *De astrolabio*, worin er sich graphischer Constructionen bedient; 3) und endlich einige Piecen über Arithmetik. Ein Werk unter dem Titel *De arithmeticis numeris* ist ein sehr gedrängter Auszug einiger Definitionen, entnommen aus den Werken über Arithmetik von Apulejus und Boëtius, deren Namen von Beda angeführt werden. Ein andres, *De loquela per gestum digitorum*, lehrt an den Fingern zu zählen und ihre Articulation. Dieses Buch ist von verschiedenen Autoren benutzt und reproducirt.

Ein drittes, welches uns heute das meiste Interesse in der voluminösen Sammlung der Werke von Beda darzubieten scheint, ist die Abhandlung *De numerorum divisione*, auf welche man bisher so wenig Aufmerksamkeit verwandt hat, dass die Schriftsteller, welche davon Rechenschaft geben, sich über ihren Inhalt getäuscht haben. [221]) Diese Abhandlung ist genau dieselbe, als die, welche auf den Brief des Gerbert an Constantin folgt, worin man allgemein die Auseinandersetzung unsres Zahlensystems zu sehen geglaubt hat. Ist sie von Beda oder von Gerbert? Diese Frage haben wir schon beseitigt, als wir von der Stelle in der Geometrie des Boëtius sprachen, welche sich auf dasselbe Zahlensystem bezieht und wovon uns diese Abhandlung eine Nachahmung und eine Entwickelung zu sein scheint; wenigstens beziehen sich beide auf dieselbe Materie und haben, nach unsrer Meinung, denselben Ursprung. [222]) Uebrigens findet man in den alten Manuscripten von Beda die arabischen Ziffern, so wie in denen des Boëtius. (Wallis, *de algebra tractatus*, cap. IV.)

---

221) Montucla, *Histoire des mathématiques*, T. I, p. 495: „Beda war Verfasser eines Buchs über Arithmetik unter dem Titel *De numeris* und eines andern *De numerorum divisione*, woraus man sieht, wie sehr diese Operation zu seiner Zeit gehemmt war.“ — Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I, p. 322: „In diesem Kapitel (*De divisione numerorum*) lehrt Beda sich der Finger und ihrer Articulationen bedienen, um die Divisionen und Multiplicationen zu erleichtern.“

222) Wir wollen uns hier bemühen, einen Fehler zu verbessern, den wir vorher begangen haben, als wir sagten, dass man noch nicht bemerkt habe, dass sich der Brief Gerbert's in den Werken von Beda finde. Wir hatten damals nicht beachtet, dass diese Bemerkung von Andres gemacht war, in seinem Werk: *Dell' origine, de progressi, e dello stato attuale d'ogni litteratura*, Parma,

Endlich enthalten die Werke von Beda ein Buch *De arithmeticis propositionibus*, worin man zuerst verschiedene Manieren eine Zahl zu errathen findet, die gedacht wird; und sodann eine ziemlich grosse Anzahl von arithmetischen Aufgaben, *ad acuendos juvenes*, wie er sagt, welche die Absicht darthun, die mathematische Bildung aufrecht zu erhalten. Aber man sieht aus den Regeln, deren sich der Verfasser zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks und Vierecks bedient, in welchen beklagenswerthen Zustand dieselbe gerathen war. Wir haben diese Regeln angeführt, als wir von den Werken des Brahmegupta sprachen.

Das Buch *De arithmeticis propositionibus* ist für Alcuin in Anspruch genommen und in dessen Werken mit enthalten. Die Frage über das Eigenthumsrecht ist hier ohne Interesse.

Alcuin, ein Schüler Beda's, war wie dieser ein Wunder von Gelehrsamkeit in seiner Zeit. Wir begnügen uns hier zu sagen, dass er über die sieben freien Künste und im Besondern über Astronomie geschrieben hat. Auf uns sind von seinen Werken nur die Theile gekommen, welche die Grammatik und die Rhetorik behandeln; man erkennt, dass sie den Schriften des Cassiodorus nachgeahmt sind. Die Berühmtheit übrigens, welche Alcuin behalten hat, kommt daher, dass er an der Gründung der Universitäten Paris und Pavia und an den Bestrebungen Carl's des Grossen Theil genommen hat, um dem Weiterdringen der Finserniss, die sich über Europa ausgebreitet hatte, zu widerstehen und das Licht der Wissenschaft wieder anzuzünden.

Aber die Scholastik entstand, und das religiöse Element, welches ihr zur Basis diente, wurde allmächtig und nahm die Geister ausschliesslich ein. So folgte, ein höchst merkwür-

---

7 Vol. in 4., 1782—1799, wo er sich so ausdrückt: *Ma e da osservarsi, cio che non vedo riflettuto ne da matematici, ne da critici, che tale lettera riportata fra le Gerberziane e quella medesima affatto, che si ritrova nelle opere di Beda al principio del libro De numerorum divisione ad Constantinum; ne io voglio decidere se sia da riporsi fra le opere di Gerberto ovver fra quelle di Beda* (T. IV, p. 53).

Aber Andres spricht nur von dem Briefe selbst und nicht von der Abhandlung, welche ihm folgt, eine Abhandlung, die er nur in den Werken des Beda kennt und von der er nicht gewusst hat, dass sie dieselbe ist, als die, welche man dem Gerbert zuschreibt.

Wir wollen endlich noch hinzufügen, dass dieser gelehrte Historiker, der weitläufig die Stelle des Boëtius commentirt hat, um zu beweisen, dass sie sich auf keine Weise auf unser Zahlensystem anwenden lasse (T. IV, p. 41—45), nicht deren Analogie mit der in Rede stehenden Abhandlung *De numerorum divisione* bemerkt.

diger Umstand in der Geschichte! auf die Bemühungen Carl's des Grossen gerade die Epoche der tiefsten Unwissenheit. Sie dauerte beinahe zwei Jahrhunderte.

10tes Jahrhundert.

Während dieser Zeit nennt die Geschichte nicht viel mehre als den Namen Gerbert's (der 999 Papst wurde und 1003 starb) und die einiger seiner Schüler. Dieser Mönch ging, nach dem Vorbilde der Weisen Griechenlands, welche, um sich zu unterrichten, nach Aegypten gingen, ebenfalls um sich auszubilden nach Spanien, dem einzigen Punkt in Europa, wo die vom Orient eingeführten Wissenschaften von den Sarazenen cultivirt wurden. Auf dem Rückwege nach Frankreich verbreitete er mit Eifer seine Kenntnisse. Sie galten für ein Wunder in den Augen seiner Zeitgenossen, so dass er sogar der Magie angeklagt wurde. Aber dieses zeigt, wie ungeheuer damals die Unwissenheit gewesen sein muss, denn man muss doch zugestehen, dass das Werk von Gerbert über die Geometrie und seine Abhandlungen über die Sphäre, über das Astrolabium und über die Sonnenuhren, sich nur auf die elementarsten Materien der Wissenschaft beziehen und nur sehr oberflächliche Kenntnisse zeigen. Der Contrast, welchen diese Werke mit dem vorgerückten Zustande der Wissenschaft in dieser Epoche bei den Arabern von Sevilla und Cordova darbieten, lässt daran zweifeln, ob sie es waren, von denen Gerbert seine Kenntnisse erhielt, wie man sich gewöhnt hat nach dem Vorgange Wilhelms von Malesbury zu wiederholen. Man erkennt darin, besonders in seiner Geometrie, eher eine Nachahmung und einen Commentar der Werke von Boëtius, als einen Widerschein des Wissens und der Methoden der Araber [223]), wovon wir die ersten Spuren in Frankreich erst im 12ten Jahrhundert finden.

---

223) Diese Bemerkung stimmt mit der von Goujet überein, welcher sagt, dass die Reise Gerbert's nach Spanien begründet ist, dass aber der Beweggrund, den man ihr unterlegt, es nicht ist. (*De l'état des sciences en France depuis la mort de Charlemagne jusqu'à celle du roi Robert*, p. 55.)

Andres dagegen, der den Kenntnissen und Arbeiten Gerbert's einen grossen historischen Werth beilegt, schreibt ihnen einen arabischen Ursprung zu, indem er stets annimmt, dass es nicht gerade die Sarazenen waren, welche ihn unterrichteten, sondern vielmehr die spanischen Christen, ihre Schüler, die auch nichts andres als die Wissenschaft und die Methoden der Araber lehren konnten. „*Queste ragioni mi fanno congetturare non senza qualche probabilita, che quel dotto e grand' uomo che fu Gerberto tutto egli si fece sotto la disciplina de' christiani spagnuoli, senza avere avuto bisogno di mendicare il soccorso delle scuole de' Saraceni. Ma quantunque spagnuoli fossero*

Folgendes ist die Analyse dieser Behandlung der Geometrie, welche Bernard Pez in Tom. III, Pars II seines *Thesaurus anecdotorum novissimus* (Augustae Vindelicorum 1721, in fol.) bekannt gemacht hat.

Nachdem er die ersten auf Geometrie bezüglichen Definitionen gegeben hat, lehrt Gerbert die Maasse kennen, von denen die Alten Gebrauch gemacht haben; diese sind die *digitus*, *uncia*, *palmus*, *sexta*, *dodrans* etc. der Römer, von denen man das Verzeichniss in der Geometrie des Boëtius findet. Er bedient sich dieser Maasse im ganzen Verlauf seines Buchs, so wie auch der Zeichen, welche sie repräsentiren und welche auch auf abstracte Weise solche *Brüche*, wie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ etc. ausdrücken. Er gebraucht das Wort *coraustus*, um die obere Basis eines Vierecks zu bezeichnen. Er widmet mehre Kapitel den rechtwinkligen Dreiecken, die er *trianguli pythagorici* nennt und die er in rationalen Zahlen zu construiren lehrt, wenn eine der Seiten gegeben ist. Er wendet dabei theils die bekannten, dem Pythagoras und Plato zugeschriebenen Regeln an, welche ganze Zahlen für die Seiten geben, und theils andre Regeln, welche Brüche geben. Die einen so wie die andern, die beide von derselben Art sind, lassen sich aus den allgemeinen Regeln, die wir in den indischen Werken gefunden haben, ableiten. In Bezug auf diese rechtwinkligen Dreiecke löst Gerbert ein, für jene Zeit merkwürdiges, Problem auf, welches von einer Gleichung des zweiten Grades abhängt; nämlich dieses: wenn die Fläche und die Hypotenuse gegeben sind, die beiden Seiten zu finden. Es sei A die Fläche und c die Hypotenuse, so giebt die Lösung von Gerbert, in eine Formel übersetzt, für die beiden Seiten diesen doppelten Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{c^2 + 4A} \pm \sqrt{c^2 - 4A}\right\}.$$

---

i maestri di Gerberto, arabica pur era la dottrina, ch' ei trasse dalle Spagne e comunico alle Gallie ed all' Italia. La scienza favorita di lui era la matematica; e la matematica, que si sapeva in Ispagna, tutta venive delle scuole e da' libri de' Saraceni. Se vero e, che Gerberto della Spagna alle suuole Europee recasse l'aritmetica arabica, colla quale facili divenivano molte operazioni, che nell' antico metodo troppo erano, imbarazzanti, questa immediatamente, o per mezzo de' maestri spagnuoli rapita fu da lui a Saraceni, come dice Gugliemo di Malesburi." (*Dell' origine, de progressi*, etc., T. I, cap. IX.) — Die Beschaffenheit der Werke Gerbert's erlaubt uns nicht diese Meinung über den Ursprung seiner Kenntnisse zu theilen.

Darauf lehrt er vermittelst des Astrolabiums und vermittelst eines andern Instruments, das er *Horoscop* nennt, die Höhe eines Thurms, die Tiefe eines Brunnens und die Distanz von einem unzugänglichen Gegenstand messen. Sodann berechnet er das Perpendikel in einem Dreieck, dessen Seiten bekannt sind. Er nimmt für diese Seiten die drei Zahlen 13, 14 und 15. Er giebt für die Fläche der regelmässigen Polygone die falschen Formeln der römischen Feldmesser, und löst auch, wie diese, das umgekehrte Problem auf: *wenn die Fläche eines regelmässigen Polygons gegeben ist, dessen Seite zu finden.* Beim Kreise giebt er das Verhältniss $\frac{22}{7}$. Man findet unter den Titeln: *In campo quadrangulo agripennos cognoscere* und *In campo triangulo agripennos invenire*, die falschen Regeln für die Ausmessung der Fläche eines Vierecks und eines Dreiecks, die wir schon bei den Werken des Beda angeführt haben; und Gerbert bedient sich in diesen Beispielen derselben Zahlen, als Beda. Endlich findet man (Cap. 85) die Formel, welche die Summe für die Glieder einer arithmetischen Progression giebt. 224) Die Formel für die Fläche des Dreiecks als Function der drei Seiten steht nicht darin; und man findet darin eine andre für das rechtwinklige Dreieck, die nicht genau ist.

Auf die Geometrie folgt eine kleine Schrift, betitelt: *Gerberti epistola ad Adalboldum de causa diversitatis arearum in trigono aequilatero geometrice arithmeticeve expenso.* Gerbert erklärt, dass die geometrische Formel $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ für die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks genau ist und dass die arithmetische Formel $\frac{a^2+a}{2}$ es nicht ist, sondern nur approximatif. Bei seiner Erklärung begeht Gerbert einen Fehler; denn es ist die Formel $\frac{a^2+a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, welche aus seinem Raisonnement hervorgehen musste, und diese ist wirklich approximatif. Denn wenn man sie homogen

---

224) Villoison sagt, dass in einem sehr alten Manuscript dieses 85ste Kapitel arabische Zahlen enthält. (S. *Analecta graeca*, T. II, p. 153.) Aber wir müssen sagen, dass in den beiden Manuscripten von Gerbert, die sich in der königl. Bibliothek zu Paris (Nr. 7185 und 7377) finden, wir nur römische Zahlen gesehen haben und die Zeichen, durch welche die Lateiner die Brüche ausdrücken. Diese Zeichen sind von Pez in seiner Ausgabe der Geometrie von Gerbert treu wiedergegeben worden.

macht, indem man die Einheit des Längenmaasses, die wir δ nennen wollen, einführt, so wird sie $\frac{a^2 + a\delta}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, und diese nähert sich um so mehr dem genauen Ausdruck $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ für die Fläche des Dreiecks, je kleiner δ ist.

Man sieht aus dieser Analyse der Geometrie von Gerbert, dass sie in der Weise der Schriften von Boëtius und Beda abgefasst ist, und dass man darin nicht den arabischen Ursprung erkennen kann, welchen man so obenhin und ohne Kritik den wissenschaftlichen Kenntnissen des Verfassers zuschreibt.

Es scheint, dass Gerbert viel über die Arithmetik geschrieben hat, besonders über ein Zahlensystem, das von dem damals gebräuchlichen lateinischen verschieden war, und dieses ist hauptsächlich der Grund, weshalb sein Name in der Geschichte der Wissenschaft berühmt geblieben ist. Wir haben bei Gelegenheit der Stelle aus der Geometrie des Boëtius von der Abhandlung *De numerorum divisione*, welche man ihm zuschreibt [225]), gesprochen, und indem wir bemerkten, dass diese Piece sich in den beiden Ausgaben, die man von den Werken des Beda hat, vorfindet, haben wir vermuthet, dass sie diesem letztern angehören könne. Aber Gerbert und seine Schüler haben noch mehre andre Schriften über denselben Gegenstand hinterlassen, welche beweisen, dass sie damals eine bedeutende Kenntniss der Rechnungsverfahren in diesem Zahlensystem hatten, das sie das System des *Abacus* nannten Die Schriften von Gerbert, welche sich grossen Theils in der Bibliothek des Vatican finden, sind betitelt: 1) *Gerberti scholastici Abacus compositus*; 2) *De numeris*; 3) *Regulae Abaci*; 4) *Fragmentum Gerberti regulae de Abaco*; 5) *Gerberti arithmetica.* Die erste Schrift, *Abacus compositus*, existirt noch in vielen andern Bibliotheken. Als Pez in der Bibliothek der Abtei St. Emeran zu Regensburg hieran eine andre Piece angeknüpft fand, unter dem Titel: *G. Liber subtilissimus de Arithmetica*, so schrieb er sie wegen des Anfangsbuchstaben *G* dem Gerbert zu. In diesem Manuscript zu Regensburg führt die Abhandlung über den *Abacus* auch den Namen *Algorismus*;

225) Der erste Herausgeber der Briefe Gerbert's hat nach dem 161sten und letzten Brief die ersten Zeilen dieser Abhandlung angeführt. Der zweite Herausgeber hat zwar diesen Brief beibehalten, aber diese ersten Zeilen unterdrückt.

sie ist an Otto III. gerichtet.[226] Die Bibliothek zu Leyden besitzt auch zwei Manuscripte, die sich von Scaliger und Vossius herschreiben; das eine hat den Titel: *Libellus multiplicationum, in quo epistola Gerberti ad Constantinum de doctrina Abaci*; und das andre: *Gerberti de Divisionibus cum notis ad illas.* (*Catalogus Bibliothecae Universitatis Lugduno-Batavae*, p. 341 et 390.)

In Bezug auf die Abhandlung *De numerorum divisione* ist es höchst wunderbar, dass sie sich unter diesem Titel in keinem der grossen literarischen Depots findet; wenigstens, wollen wir lieber sagen, wird sie unter diesem Titel in keinem Katalog aufgeführt. Dieser Umstand hatte dazu beigetragen, uns annehmen zu lassen, dass diese Abhandlung von Beda sein könnte, indem wir übrigens ganz anerkennen, dass das Rechnungsverfahren, um das es sich handelt, dem Gerbert bekannt war.[227]

Welcher auch der Verfasser desselben sein mag, wir beharren dabei, sie als eine Nachahmung der Stelle de Boëtius über denselben Gegenstand zu betrachten und zu glauben, dass sie sich auf ein Zahlensystem bezieht, das nur in einem Punkte von dem unsrigen verschieden ist, nämlich in der *Anwendung der Null*, welche erst später eingeführt ist und da zugleich gestattet hat, die Columnen zu unterdrücken. Bei dieser Betrachtung würde in Bezug auf den *Abacus* nur die Frage noch zu beantworten sein, ob diese glückliche Neuerung, die Anwendung der Null, eine directe Vervollkommnung des Systems des *Abacus* gewesen ist, oder aber, ob die Europäer sie aus der arabischen Arithmetik im 11ten oder 12ten Jahrhundert entnommen haben.

Mehre Zeitgenossen Gerbert's, welche man als seine Schüler betrachtet, haben auch über die Arithmetik, die bei dem System des *Abacus* in Anwendung kommt, geschrieben. Solche sind Adalboldus, Bischof von Utrecht, Heriger, Abt von Laubes, und Bernelin.

---

226) *Gerberti Abacus seu Algorismus ad Ottonem imperatorem.* (S. *Thesaurus anecdotorum novissimus*, t. I, *Dissertatio isagogica*, p. XXXVIII.)

227) Zwei Exemplare dieser Schrift, welche sich in der königlichen Bibliothek zu Paris unter andern Titeln befinden, führen den Namen Gerbert's, welcher freilich einer spätern Epoche zugerechnet ist. Das erste ist betitelt *Rationes numerorum Abaci* (Manuscr. Nr. 6620) und das zweite *Tractatus de Abaco* (Nr. 7189 A.). Wir nehmen an, dass ein Theil der Manuscripte, deren Namen wir oben angegeben haben, besonders die in der Bibliothek zu Leyden, auch nichts andres sind, als die Abhandlung *De numerorum divisione.*

Von dem erstern ist noch in der Bibliothek des Vatican eine Schrift übrig, unter dem Titel: *Adalboldi ad Gerbertum scholasticum de Astronomia, seu Abaco.* 228) Man findet in dem T. III des *Thesaurus anecdotorum novissimus* von Pez (2, p. 86) eine zweite Schrift von Adalboldus, betitelt: *Libellus de ratione inveniendi crassitudinem sphaerae,* worin er für das Volumen der Kugel die Formel $D^3 . \frac{11}{21}$ angiebt (D ist der Durchmesser), welcher das Verhältniss des Archimedes zu Grunde liegt. In seinem numerischen Calcul bedient sich Adalboldus, so wie Gerbert in seiner Geometrie, der römischen Charaktere, welche die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ u. s. w. ausdrücken.

Heriger commentirt den *Abacus* des Gerbert, in einer Schrift, die sich in der Bibliothek zu Leyden findet, betitelt: *Ratio Abaci secundum divum Herigerum.* 229)

Bernelin hat ein Werk über die Musik, Geometrie und Arithmetik verfasst, das in der Bibliothek des Vatican unter dem Titel: *Bernelini Abaci, Musica, Arithmetica et Geometria* 230), aufgeschrieben ist; und ein andres in vier Büchern, *De Abaco et numeris,* von dem Vignier in seiner *Bibliothèque historiale* versichert, dass der berühmte Jurist Pierre Pithou es besessen habe. 231) Man sieht aus dem

---

228) Montfaucon, *Bibliotheca bibliothecarum manuscriptorum nova*, t. I, p. 87.

229) *Histoire litteraire de la France*, t. 7, p. 206.

230) Montfaucon, *ibid.*, t. I, p. 24: Man sieht auf S. 116, dass die Bibliothek des Vatican noch andre Sachen von demselben Verfasser besitzt, unter dem Titel: *Bernelinus junior de Abaco et alia pluria.*

231) Wir wollen diese Stelle des Vignier anführen, die noch nicht die Aufmerksamkeit auf sich gezogen zu haben scheint, die jedoch eine nicht zu verachtende Wichtigkeit hat; denn sie beweist uns, dass man im 16ten Jahrhundert unsre Ziffern und unser Zahlensystem als abgeleitet betrachtete, wenn auch nicht aus dem System des *Abacus* selbst, so doch wenigstens aus derselben Quelle, als dieser. Diese Stelle unterstützt die Interpretation, welche wir von dem *Abacus* des Boëtius gegeben haben.

„*Gerbert*, sagt Vignier, *eut encore un autre sien compagnon ou disciple ès sciences géométriques et mathématiques nommé Bernelinus, qui composa quatre livres De Abaco et numeris. Desquels se peut apprendre l'origine de Chiffre dont nous usons aujourd'hui ès comptes d'arithmétique. Lesquels livres Savoye Pithou m'a assuré avoir en sa bibliothèque, et recognoistre en iceux un sçavoir et intelligence admirable de la science qu'ils traitent. Et pour ce qu'avec*

T. III der *Histoire littéraire de la France*, geschrieben 1773, dass sich damals ein Exemplar dieses Werks in der Abtei St. Victor zu Paris befand. Die Vorrede hat zum Titel: *Incipit praefatio libri Abaci quem junior Bernelinus edidit Parisiis.* [232]) Vielleicht ist es auch noch diese Behandlung des Abacus, auf welche sich eine andre Piece von Bernelin bezieht, welche sich in der Bibliothek zu Leyden nach dem *Abacus* des Gerbert findet, betitelt: *Scolica* (wahrscheinlich *Scholia*) *Bernelini Parisiis ad Amelium suum edita de minutiis.*

Man citirt noch einen Mönch, mit Namen Halber, welcher zu derselben Zeit auch über den *Abacus* des Gerbert geschrieben hat. (*Histoire littéraire de la France*, t. 7, p. 138.)

Es würde von grossem Nutzen sein für die Aufklärung der historischen Fragen, die sich auf den Ursprung unsrer Arithmetik und auf deren Einführung in Europa, und besonders auf dieses System des *Abacus* beziehen, welches eine wichtige Stelle in der Literär-Geschichte des 10ten Jahrhunderts einnimmt und welches wahrscheinlich nur nach einigen Jahrhunderten der Vergessenheit, aus den Werken des Boëtius und einiger Andrer aus derselben Zeit[233]), die es selbst aus der Schule des Pythagoras erhielten, wie Boëtius sagt[234]) aufgefrischt war, — es würde von grossem Nutzen sein, sag'

---

ceux là furent encore fort renommés au même temps en la France plusieurs autres grands personnages, à cause de leur grand sçavoir ès mêmes sciences philosophiques et mathématiques, comme, etc." (*Bibliothèque historiale*, 3 Vol., in fol., Paris 1588; Vol. II, p. 642.)

232) Es existirt in der Abtei St. Victor eine andre Abhandlung über *Abacus*, welche Montfaucon unter dem Titel: *Radulphi Laudunensis de Abaco*, aufführt. (*Bibl. bibl.* T. II, p. 1374.)

233) Wir sind z. B. geneigt zu glauben, dass Victorius, ein Mathematiker aus der Zeit des Boëtius, auch über dieses System geschrieben oder wenigstens Rechnungen hinterlassen hat, die sich darauf beziehen; und dass es in Bezug hierauf geschieht, dass Gerbert und seine Schüler oft den Calcul des Victorius und seine Kürze citiren, denn es scheint nicht, dass dieses von dem neuen Oster-Canon zu verstehen sei, den Victorius berechnet hat.

234) Es finden sich nicht selten in der Geschichte der Wissenschaft Ideen, Principien, selbst Theorien, die auf diese Weise mehre Male und in längern Zwischenräumen erschienen und verschwunden sind, bis sie einen dazu vorbereiteten Boden fanden, um darin feste Wurzel zu fassen und sich darin eine dauernde Existenz zu sichern. Die sternförmigen Polygone liefern uns ein Beispiel ähnlicher Unterbrechungen. Zuerst in der Schule des Pythagoras betrachtet, sodann während zehn Jahrhunderten vergessen, ersteht das *sternför-*

ich, wenn man von Gerbert und seinen Schülern die verschiedenen Werke, deren Titel wir oben angegeben haben, bekannt machen möchte, und wenn man in den Bibliotheken von Manuscripten auf ähnliche Schriften, die sich bestimmt darin finden müssen, seine Aufmerksamkeit richtete.

11tes Jahrhundert. Im 11ten Jahrhundert hat sich Hermann Contractus durch verschiedene Schriften über Mathematik einen Namen gemacht, unter denen sich eine über die Quadratur des Zirkels und eine über das Astrolabium befindet. Dieses letztere, in zwei Büchern, welche von der Construction und dem Gebrauch des Astrolabiums handeln, ist in T. III des *Thesaurus novissimus* von Pez gedruckt. *Wallis* sagt in seiner Geschichte der Algebra, dass eine Stelle in einem *alten* Manuscript der *Bibliotheca Bodleiana* ihn zu der Meinung berechtige, dass Hermann Contractus unser Zahlensystem gekannt *habe*; und er stellt ihn nach Gerbert an die Spitze der andern, die über diesen Gegenstand geschrieben haben. 235)

---

mige Fünfeck in der Geometrie des Boëtius; nochmals sechs Jahrhunderte vergessen, verdankt diese Theorie ihr neues Leben dem Campanus; ein Jahrhundert darauf erzeugt sie die Theorie der *ausspringenden* Polygone; noch zwei Jahrhunderte später scheinen der Name und die denkwürdigen Arbeiten Kepler's dieser Theorie eine glänzende und dauernde Rolle zu sichern; dennoch fällt sie in ein gänzliches Vergessensein während zwei Jahrhunderten zurück, um endlich eine unvergängliche Existenz zu erlangen, welche ihr durch die analytischen Betrachtungen gesichert wird, die sie mit der Theorie der gewöhnlichen Polygone vereinen.

235) *Hujusce Hermanni mentionem reperio in quodam Bibliothecae Bodleianae MSO, ubi dicitur quod ab Hermanno et Prodocimo didicerint Abacum, hoc est (alio nomine) Algorismum.*

Hermann Contractus gilt in den Augen einiger Historiker, besonders Brucker's, dafür, dass er vorzüglich die arabische Sprache cultivirt und die ersten lateinischen Uebersetzungen des Aristoteles geliefert habe.

Indem aber Jourdain zu der Quelle dieser Meinung zurückgeht, so glaubt er, dass sie irrig, oder wenigstens nicht gerechtfertigt ist; er glaubt, dass die Schrift über das Astrolabium von Hermann nicht eine Uebersetzung eines arabischen Werks, sondern vielmehr aus schon veröffentlichten Materialien zusammengesetzt ist. (*Recherches sur l'âge et l'origine des traductions latins d'Aristote*, p. 156.)

Ich stelle dieses Urtheil von Jourdain mit der von Wallis angeführten Thatsache zusammen, weil man daraus eine Folgerung zieht, die der schon öfters von uns ausgesprochenen Meinung günstig ist, dass nämlich alle Schriften über den *Abacus*, so wie die des Gerbert und seiner Schüler, aus derselben Quelle fliessen, als die des Boëtius, und dass sie nicht direct aus arabischen Werken hervorgehen, welche von Sarazenen Spaniens entlehnt sind.

Das 12te Jahrhundert zeichnet sich durch einige Anstrengungen gegen die allgemeine Unwissenheit aus. Mehre Europäer verliessen, nach dem Beispiele Gerbert's, ihr Vaterland, um sich in der Ferne zu unterrichten. Man unterscheidet unter ihnen Adhelard oder Athelard und Gerard von Cremona. Der erstere besuchte Spanien, Aegypten und Arabien, und übersetzte bei seiner Rückkehr mehre Werke aus dem Arabischen, worunter sich die Elemente Euclid's befinden. Diese ist die erste Uebersetzung, welche man in Europa von diesem Werk gehabt hat. Man kannte es bis dahin nur in einem sehr beschränkten und mit der Aussprache einiger Sätze sich begnügenden Auszug, welchen Boëtius in dem ersten Buch seiner Geometrie gegeben hatte. Adhelard hatte mit seiner Uebersetzung noch Commentare über die Sätze des Euclid verbunden. Dieses Werk ist Manuscript geblieben. 236) *12tes Jahrhundert.*

Jourdain schreibt dem Adhelard ein Werk über das Astrolabium und eine Lehre vom *Abacus* zu. 237) (*Recherches sur les traductions d'Aristote*, p. 100.)

Gerard von Cremona (1114—1187) ging auf längere Zeit nach Toledo, um dort das Arabische zu lernen und

---

236) Es findet sich in der Bibliothek der Dominicaner von St. Marcus zu Florenz unter dem Titel: *Euclidis Geometria cum Commento Adelardi*; und in der *Bibl. Bodleiana* unter diesem: *Euclidis elementa cum scholiis et diagrammatis latine reddita per Adelardum Bathoniensem.* Die königliche Bibliothek zu Paris besitzt auch eine Copie (Nr. 7213 der lateinischen Manucripte). Ein andres, das dem Regiomontanus gehört hat, befindet sich in der Bibliothek zu Nürnberg.

237) Wir wissen nicht, auf welche Autorität sich Jourdain bei dieser Lehre vom *Abacus* stützt, auch nicht, ob sie genau auf dem System des *Abacus* von Boëtius und Gerbert beruht. Dieser historische Punkt ist von grosser Wichtigkeit, weil alle Arbeiten Adhelard's zum Zweck haben, die philosophischen und mathematischen Werke der Araber bekannt zu machen, indem er den bedeutenden Vorzug derselben vor den Lehren der Scholastik jener Zeit anerkannte; und wir wären geneigt zu glauben, dass, wenn er über Arithmetik geschrieben hat, es über die Arithmetik der Araber gewesen sein möchte, welche auf demselben Princip vom *Stellenwerth* der Ziffern, als das System des Abacus beruhte, und sich, nach unsrer Meinung, davon nur durch den Gebrauch der Null unterschied. Vielleicht bildete das Werk des Adhelard den Uebergang von dem System des Abacus zu dem der Araber und zeigte die Identität beider Systeme, von denen das zweite nichts desto weniger sich leichter anwenden liess und das erste ersetzt hat, indem es den Namen *Algorismus* annahm. Dieses Werk von Adhelard könnte daher sehr werthvoll sein, indem es vielleicht die noch nicht gelöste Frage über den wahren Ursprung des, seit fünf oder sechs Jahrhunderten gebräuchlichen, Zahlensystems auflöst.

zahlreiche Uebersetzungen zu machen, die er in sein Vaterland brachte. Sie erstrecken sich über alle Theile der Wissenschaften, die unter den Mauren Spaniens blühten. Man bemerkt darunter den Almagest des Ptolemäus, den *Tractatus de crepusculis* von Alhazen und das Buch *de scientiis* von Alfarabius.[238]) Jourdain glaubt, dass man dem Gerard von Cremona auch das Werk über die Perspective von Alhazen zu verdanken hat. (*Recherches critiques sur les traductions d'Aristote*, p. 128.) Sollte ein Werk über Arithmetik, welches sich in der *Bibl. Bodleiana* unter dem Titel *Algorismus magistri Gerardi in integris et minutiis*[239]) findet, auch von dem Gerard von Cremona sein, der in der That, indem er aus Spanien einen Theil der wissenschaftlichen Kenntnisse der Araber herüberbrachte, nicht ihr geistreiches Zahlensystem hat vernachlässigen können, wenn es nicht schon denen, die sich dem Studium der Wissenschaft widmeten, hinlänglich bekannt war. Wir wären geneigt es zu glauben, wenn wir die grosse Anzahl von Autoren des folgenden Jahrhunderts beachten, die über dies Zahlensystem geschrieben haben oder die sich desselben in ihren Werken bedienten.

Drei andre Männer, Zeitgenossen des Adhelard und Gerard von Cremona, bemühten sich auch, die bei den Arabern verbreiteten mathematischen Werke bekannt zu machen. Diese sind Plato von Tivoli (*Plato Tiburtinus*), der Jude Johann von Sevilla, bekannt unter dem Namen *Johannes Hispalensis*, und Rudolph von Brügge (*Brughensis*).

Der erste übersetzte aus dem Arabischen die Sphärik des Theodosius, um das Jahr 1120 (gedruckt 1518); aus dem Ebräischen eine Behandlung der Geometrie des Savosarda[240]), und verschiedene andre Werke.

---

238) Fabricius hat ein erstes Verzeichniss der Uebersetzungen, welche dem Gerard von Cremona zugeschrieben werden, geliefert. (*Bibl. med. et infimae lat.*, t. 3, p. 115.) Jourdain gab ein zweites, beinahe doppelt so starkes. Das Werk von Alfarabius ist darin nicht mitbegriffen. Es ist Libri, welcher es in einem Manuscript der königlichen Bibliothek unter dem Titel fand: *Liber Alfarabii de scientiis, translatus a magistro Gherardo Cremonensi, in Toleto, de arabico in latinum.* (*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, p. 172.)

239) Heilbronner, *Historia matheseos*, p. 601.

240) *Liber Embadorum a Savosarda judaeo in hebraico compositus, et a Platone Tiburtino in Latinum sermonem translatus.* (In Bibliotheca S. Marci Dominicorum Florentiae.) Libri muss in dem zweiten Bande seiner *Histoire des sciences mathématiques* eine Analyse dieses wichtigen Werks geben.

Johannes Hispalensis übersetzte die astronomischen Elemente des Alfraganus (im Jahr 1142, nach G. J. Vossius und mehren andern Autoren) und verschiedene Werke über Astrologie, wozu ein Werk von Albumasar gehört, das sich als Manuscript in der *Bibl. Magliabecchi* findet, unter dem Titel: *Liber introductorii majoris in magisterio scientiae Astrorum, editione Albumazar et interpretatione Johannis Hispalensis ex arabico in latinum.* Diese Uebersetzung scheint im Jahr 1171 verfertigt zu sein, denn sie schliesst mit diesen Worten: *scriptus est liber iste anno domini nostri Jesu Christi* 1171. Sie ist deshalb von Werth, weil sie astronomische Tafeln mit arabischen Ziffern enthält. [241]) Es sind vielleicht die ältesten, welche ein bestimmtes Datum haben. Johannes Hispalensis hat auch ein Werk über arabische Arithmetik unter dem Titel *Algorismus* hinterlassen. Es ist dieses das älteste Werk über Arithmetik, welches diesen Namen führt, den wir in allen Werken des 12ten Jahrh. wieder finden. Dieses Werk fängt so an: *Incipit prologus in libro Algorismi de practica Arithmeticae, qui editus est a Magistro Johanne Hispalensi.* Es ist sehr vollständig und umfasst die sieben Operationen: Addition, Subtraction, Duplation, Mediation, Multiplication, Division und Wurzelausziehung, zuerst für ganze Zahlen, sodann für Brüche. Unmittelbar hinterher und mit derselben Schrift findet man unter dem Titel: *Excerptiones de libro qui dicitur Gebra et Mucabala* [242]), ein Stück der Algebra, das davon einen Theil zu bilden scheint. Es ist dieses die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades. Man löst darin mehre solche Aufgaben auf, wie folgende: Welche ist die Zahl, die hinzu addirt zur zehnfachen Wurzel 39 giebt? Welche ist die Zahl, die zu 9 addirt gleich dem Sechsfachen ihrer Wurzel ist?

Dieses Werk, das bis jetzt unbekannt geblieben zu sein scheint, ist auch von Werth [243]), da es das älteste bekannte Werk über arabische Arithmetik und Algebra ist. Man hat bisher das des Leonhard von Pisa als das älteste betrachtet.

Dem Rodolphus von Brügge verdankt man die Bekanntschaft mit dem Planisphärium des Ptolemäus, welches er aus

---

241) Targioni, *Relazioni di alcuni Viaggi*, etc., t. II, p. 67.

242) Das Manuscript sagt *Exceptiones de libro qui dicitur Gleba et Mutabilia*, dieses kommt aber wahrscheinlich von einem Irrthum des Abschreibers.

243) Die Abschriften davon müssen sehr selten sein, denn die Manuscripten-Kataloge führen keine an.

dem Arabischen übersetzte, das selbst wieder eine Uebersetzung war, commentirt durch einen Autor, der Molsem genannt wird. Der griechische Text ist nicht auf uns gekommen. Das Werk des Rodolphus Brughensis wurde zum ersten Mal 1507 gedruckt, am Schlusse der Geographie des Ptolemäus (Rom, in fol.); darauf 1536. [244]) Commandin gab davon 1558 eine correctere Uebersetzung, begleitet von einem Commentar, der zum grossen Theil eine allgemeine Behandlung der Perspective ist; ein Werk in einem leichten geometrischen Stil geschrieben, wie man ihn im Allgemeinen in den zahlreichen Werken über Perspective aus dem 16ten und 17ten Jahrhundert nicht findet.

13tes Jahrhundert. Das 13te Jahrhundert bezeichnet eine neue Aëra in der Geschichte der Wissenschaft. Es bereitet ihre Wiederherstellung vor, indem es die Kenntniss des arabischen Zahlensystems, der Algebra und mehrer wichtigen Werke aus der griechischen Schule verbreitet. Diese Epoche ist reich an Schriftstellern; man findet in ihr Jordan Nemorarius, Leonard Fibonacci von Pisa, Sacro Bosco, Campanus Novarriensis Italus, Albertus Magnus, Vincent de Beauvais, Roger Baco, Vitellio, deren Namen berühmt geblieben sind und dem Mittelalter zur Ehre gereichen.

Campanus übersetzte die 13 Bücher der Elemente Euclid's und die beiden, welche man dem Hypsiclis zugeschrieben hat, aus einem arabischen Text, und fügte einen Commentar hinzu. [245]) Dieses Werk ist dasjenige, wodurch die

---

244) Nebst dem Planisphärium des Jordan und verschiedenen andern, auf Astronomie bezüglichen Stücken, unter dem allgemeinen Titel: *Sphaerae atque astrorum coelestium ratio, natura et motus*; Valderus, Basileae 1536, in 4.

Delambre hat in seiner *Histoire de l'astronomie ancienne* (t. 2, p. 456) der lateinischen Uebersetzung des Rodolphus Brughensis das Datum 1544 statt 1144 gegeben. Dieser Irrthum ist der Grund, weshalb dieser berühmte Astronom sich wunderte, dass eine Uebersetzung, die 1544 gemacht wurde, sich in einem Werk befindet, das 1536 gedruckt ist.

245) Einige Historiker glauben, dass dieses Werk des Campanus kein andres ist, als die Uebersetzung des Adhelard, zu welcher Campanus den Commentar hinzufügte. Andres drückt sich hierüber so aus: *Sei (Campano) non tradusse come si dico comunemente; certo illustro con comenti l'Euclide, tradotto primo dall' Arabo in Latino dall' Inglese Atelardo Gotho, come ha fatto vedere il Tiraboschi (Dell' origine, de progressi, e dello stato attuale d'ogni litteratura*, Par. 1, Cap. IX). Der folgende Titel eines handschriftlichen Exemplars von Euclid des Campanus, welches sich in der königlichen Bibliothek zu Paris, unter Nr. 7213, befindet, bestätigt diese Meinung: *Euclidis philosophi socratici incipit liber Elemen-*

Kenntniss der Geometrie in Europa verbreitet wurde. Es ist zum ersten Mal 1482 gedruckt und hat mehre Auflagen erlebt. Noch lange Zeit nach dem Wiederaufleben der Wissenschaften stand es in grossem Ansehn, und der Commentar des Campanus wurde stets von den Geometern, die über die Elemente der Geometrie schrieben, zu Rathe gezogen, so von Zamberti, Lucas de Burgo, Peletier du Mans, Clavius etc.; nicht weniger auch von den Algebraisten, die von den incommensurabeln Grössen handelten, so wie Stiefels in der *Arithmetica integra.*

Bei Gelegenheit der Stelle aus Boëtius, in der wir das sternförmige Fünfeck wahrzunehmen geglaubt haben, haben wir gesagt, dass diese Figur ausdrücklich von Campanus betrachtet ist, in seinem Commentar zum 32sten Satz des ersten Buchs von Euclid, und dass Bradwardin, im folgenden Jahrhundert, hiervon die Idee seiner ausspringenden Polygone entnommen hat, wovon er eine ziemlich weitläufige Theorie gegeben hat.

Am Ende des vierten Buchs findet man zwei Sätze von Campanus [246]), von denen der erste die Trisection des Winkels zum Gegenstand hat, und der zweite die Einbeschreibung des regelmässigen Neunecks in den Kreis. Der zweite hängt von dem der Trisection des Winkels ab. Die Auflösung, welche Campanus dafür giebt, ist wegen ihrer Einfachheit merkwürdig; sie reducirt sich in der Praxis auf die Construction einer Conchoide des Nicomedes. Das Princip dabei ist dieses: Um den Scheitel des Winkels als Mittelpunkt beschreibe man mit einem beliebigen Radius einen Kreisbogen, der die beiden Schenkel des Winkels in den beiden Punkten a und b schneidet; auf dem ersten Schenkel errichte man als Perpendikel einen halben Durchmesser und durch den Punkt b ziehe man eine Gerade so, dass der Theil derselben, welcher zwischen diesem Halbmesser und der Peripherie liegt, gleich dem Halbmesser ist; und endlich ziehe man durch den Scheitel des Winkels eine Parallele mit dieser Geraden, so wird diese Parallele die Trisection des Winkels vollführen.

Campanus sagt nicht, wie man die Richtung dieser Geraden bestimmt, welche von einem Punkt der Peripherie aus-

---

torum artis geometricae translatus ab Arabico in Latinum per Adelardum Gothum Bathoniensem, sub commento Magistri Campani Novarriensis. (MS. aus dem 14ten Jahrhundert.)

246) In der Ausgabe von 1537 (Basel, in fol.), die alle auf uns gekommenen Werke des Euclid enthält, stehen diese beiden Sätze am Ende des Bandes.

geht und deren, zwischen dem Durchmesser und dem andern Theil der Peripherie liegendes Stück, dem Radius gleich sein soll. Vielleicht war dieses ein Problem, wovon er an einer andern Stelle die Lösung gegeben hat. Man sieht, dass sie sich, wie wir gesagt haben, durch die Conchoide des Nicomedes ausführen lässt. Dieses Problem hat gegen das Ende des 17ten Jahrhunderts einige Berühmtheit erlangt, weil es, nebst zwei andern, in dem *Journal des Savans* (August 1676) öffentlich aufgestellt, von Viviani in seinem Werke: ***Enodatio problematum universis geometris propositorum a Cl. et R. D. Claudio Comiers, Canonico Ebredunensi, collegialis ecclesiae de Ternant Praeposito dignissimo. Praemissis, horum occasione, tentamentis variis ad solutionem illustris veterum problematis de anguli trisectione*** (Florentiae 1677, in 4.) gelöst wurde. Viviani zeigt durch einen sehr einfachen geometrischen Beweis, dass die drei Punkte, in denen die Conchoide den Kreis schneidet und welche den drei Lösungen für das Problem der Trisection entsprechen, auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen.

Man weiss, dass die Theilung der Linie in das äussere und mittlere Verhältniss bei der Theorie der incommensurabeln Quantitäten eine grosse Rolle spielt, im 10ten Buch Euclid's, im 30sten und in der Theorie der regulären Körper. Die zahlreichen Eigenschaften dieser Theilung einer Geraden sind dem Campanus nicht entgangen, er bezeichnet sie als wunderbare und solche, die sich aus einem Princip ableiten, das der Aufmerksamkeit der Philosophen würdig ist.[247]) Dieses ist die Theilung, welche Lucas de Burgo ***proportio divina*** nennt, in seinem Werke, das zum Titel hat; ***Divina proportione*** etc., und wovon er dreizehn ***effetti*** oder Nützlichkeiten aufzählt. Heut zu Tage sind diese Eigenschaften wenig bekannt, weil man in der Theilung einer geraden Linie in das mittlere und äussere Verhältniss nichts Andres sieht, als die Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades, die alle diese Eigenschaften in sich schliessen muss. Dieses ist aber nur wahr für diejenigen, die rein analytisch sind, die merkwürdigsten und zahlreichsten jedoch sind gerade die, welche aus geometrischen Betrachtungen enstehen.

---

247) *Mirabilis itaque est potentia lineae secundum proportionem habentem medium duoque extrema divisae. Cui cum plurima philosophantium admiratione digna conveniant, hoc principium vel praecipuum ex superiorum principiorum invariabili procedit natura, ut tam diversa solida tum magnitudine tum basium numero, tum etiam figura, irrationali quadam symphonia rationabiliter conciliet.* (Lib. XIV, Prop. 10.)

Sie verdienten es, dass man von Neuem alle darauf bezüglichen Sätze zusammenstellt, so wie es einige Geometer in Bezug auf die harmonische Theilung einer Geraden gethan haben.[248]) Dieses würde gewiss eine Sammlung von interessanten Sätzen sein, welche zu neuen Entdeckungen über denselben Gegenstand und zu ähnlichen sehr allgemeinen Relationen führen würden.[249])

Campanus citirt in einer Note, die auf den ersten Satz des 14ten Buchs (des ersten von den beiden des Hypsicles) folgt, den Aristäus und Apollonius, dass sie folgenden Satz bewiesen haben: *Die Oberflächen der regulären, in dieselbe Kugel eingeschriebenen Dodekaëder und Ikosaëder verhalten sich unter einander, wie die Volumina dieser Körper.* Das Werk des Aristäus, sagt er, war betitelt: *Expositio scientiae quinque corporum*, und das des Apollonius hatte zum Gegenstand die *Vergleichung des Dodekaëders und des Ikosaëders.* Zu Anfang des 10ten Satzes in demselben Buch, welches genau der angeführte ist, spricht Campanus auch noch die Namen Aristäus und Apollonius aus. Die Werke dieser beiden berühmten Geometer des Alterthums sind nicht auf uns gekommen; und vielleicht waren sie auch dem Campanus unbekannt, welcher sie nur dem Hypsicles nachsprach, der sie beinahe mit denselben Worten zu Anfang des zweiten Satzes seines ersten Buches anführt. In seiner Vorrede hatte Hypsicles schon weitläufig von Apollonius und von seinem Werk *De dodecahedri et Icosa-*

---

248) De Billy, *Tractatus de proportione harmonica*, Paris 1658, in 4. — Saladini, *Della proporzione armonica.* Bologna 1761, in 8.

249) Z. B. die Theilung der Geraden in das mittlere und äussere Verhältniss reducirt sich darauf, zwischen zwei gegebenen Punkten A und B einen solchen dritten Punkt C zu finden, dass man hat $\overline{AC}^2 = AB.CB$; ein leichtes Mittel, diese Aufgabe zu verallgemeinern, besteht darin, sie als aus einer andern abgeleitet zu betrachten, in welcher man nur Einen Punkt der gegebenen Geraden in die Unendlichkeit übergehend annimmt. Es sei J dieser Punkt; der gesuchte Punkt C wird, in Bezug auf die drei gegebenen Punkte A, B, J, der Gleichung:

$$\overline{CA}^2 . \overline{JB}^2 = CB.CJ.BA.JA.$$

genügen müssen. In der That, wenn man den Punkt J in der Unendlichkeit annimmt, reducirt sich diese Gleichung auf die obige erste Gleichung.

Diese Gleichung hat das Merkwürdige, dass in ihr jeder der darin eingehenden Punkte dieselbe Rolle in Bezug auf die drei andern spielt, und dass, welcher von diesen vier Punkten auch in die Unendlichkeit verlegt wird, die resultirende Gleichung immer die Theilung einer Geraden in das mittlere und äussere Verhältniss ausdrückt.

hedri in eadem sphaera descriptorum comparatione gesprochen.] Es scheint, dass man im Allgemeinen nur auf diese Stelle geachtet hat, denn man citirt gewöhnlich nur das Werk des Apollonius und nicht das des Aristäus, und ich finde nur bei Ramus, dass er diesen letztern zu denjenigen rechnet, die über die fünf regulären Körper geschrieben haben. Die Geschichtsschreiber der Mathematik sprechen von ihm nur in Bezug auf die fünf Bücher der *Elementa conica* und in Bezug auf seine *Loca geometrica*, von denen Viviani, wie man weiss, eine Wiederherstellung versucht hat.

Uebrigens ist es nicht wunderbar, dass Aristäus über die fünf regulären Körper geschrieben hat, denn diese Theorie wurde von den Griechen sehr cultivirt und stand bei ihnen in grossem Ansehn seit den ältesten Zeiten der Wissenschaft. Pythagoras bildete daraus das Princip seiner Cosmogonie, in welcher die fünf regulären Körper den vier Elementen und dem Universum entsprechen [250]), weshalb man sie die fünf *Weltfiguren* (*figurae mundanae*) nannte. [251]) Plato nahm diese Ideen an [252]) und bildete auch diese Theorie aus [253]), von der man gewöhnlich annimmt, dass Theätetus, einer seiner Schüler, zuerst darüber geschrieben hat. [254]) Hernach findet man dann Aristäus, ferner Euclides, Apollonius und Hypsicles. [255]) Dieser letztere citirt in

---

250) Der Kubus repräsentirt die Erde; das Tetraëder das Feuer; das Oktaëder die Luft; das Ikosaëder das Wasser, und das Dodekaëder das Universum. (Plutarch, *Placit. philos.*, Lib. XI, Cap. 6.)

251) Proclus, *Commentarius in Euclidem*, Lib. XI, Cap. 4. — Kepler, *Harmonices mundi*, liber secundus, p. 58.

252) Timaeus, Par. III. — Plutarch, *Platonicae quaestiones.*

253) Pappus, *Collectiones mathematicae*, Lib. V, nach der XVII. Proposition. — Proclus, *in Euclidem*, Lib. XI, Cap. 4.

254) *Theaetetus*, *Atheniensis*, *Archytae sodalis*, *Geometrica auxit*, *primusque de quinque solidis tractavit*, *ut Laertius et Proclus produnt.* (Heilbronner, *Historia matheseos*, p. 149.)

255) Man ist nicht einig über die Zeit, in welcher Hypsicles gelebt hat. Die Einen setzen ihn in das zweite Jahrhundert unsrer Zeitrechnung und die Andern in das zweite Jahrhundert vor Ch. G., bald nach Apollonius. Diese zweite Epoche haben wir angenommen, als wir von Euclid sprachen; wir sagten dort, dass Hypsicles etwa 150 Jahre nach ihm auftrat.

Dieses war die Meinung von Bernardin Baldi, in seiner *Cronica di matematici*, p. 37, und von Vossius, welcher glaubte, dass Hypsicles um die Zeit des Ptolemäus Lathyrus gelebt hat, und Isidorus magnus, sein Lehrer, von dem er in seinen beiden Büchern spricht, unter Ptolemäus Physkon. Dieser Isidorus magnus könnte nach Vossius derselbe sein, den Plinius in seiner Geometrie anführt. (Vossius, *de scientiis mathematicis*, p. 328.)

seinen beiden Büchern seinen Lehrer, den Isidor magnus, von dem er das gelernt hat, was er über diesen Gegenstand weiss. Diese fünf regulären Körper haben in Folge der pythagoräischen und platonischen Ideen eine so grosse Rolle im Alterthum gespielt, dass man sie als das endliche Ziel betrachtete, für welche das Studium und die Wissenschaft der Geometer bestimmt waren. [256])

Pappus berichtet uns [257]), dass Archimedes gesucht hat, diese Theorie zu erweitern, und dass, da er nicht mehr als fünf reguläre Polyëder bilden konnte, er eine andre Gattung erdacht hat, welche man *semiregularia* nennt; ihre Seitenflächen waren, wie bei den fünf ersten regelmässige Polygone, aber nicht alle unter einander gleich. Diese neuen Körper waren ihrer Zahl nach dreizehn. Pappus gab von ihnen eine sehr deutliche Beschreibung, welche Kepler im zweiten Buch seiner ***Harmonices mundi*** reproducirt hat, indem er die darauf bezüglichen Figuren gab. Die Historiker übergehen diese Arbeit des Archimedes mit Stillschweigen, und es ist wahr, dass sie, ihrer Natur nach, weit unter den andern Entdeckungen dieses grossen Mannes stehen. Es wäre für das Genie des Archimedes würdiger gewesen, weil er in dieser Theorie der regulären Figuren über Euclid und die andern Geometer hinausgehen wollte, die neuen *sternförmigen* Polyëder zu erschaffen, welche Poinsot beschrieben hat und welche die wahre Erweiterung bilden, deren diese alte und berümte Theorie fähig war.

Wir kommen auf Campanus zurück. Lucas Gauricus, ein neapolitanischer Astronom und Astrolog, hat zu Anfang des 16ten Jahrhunderts unter dem Namen dieses Geometers ein Werk ***De tetragonismo, seu Quadratura circuli*** [258])

Der gelehrte Mediciner Mentel, in der Vorrede seiner lateinischen Uebersetzung des kleinen astronomischen Werks von Hypsicles, betitelt: *Anaphoricus, sive de Ascensionibus*, Paris 1657, in 4.; und neuerlich Delambre (*Histoire de l'astronomie ancienne*, t. I, p. 246) und Franchini (*Saggio della storia delle matematiche*, p. 146) haben Hypsicles auch um das Jahr 146 v. Chr. gesetzt. Aber Fabricius (*Bibliotheca graeca*, t. II, p. 91) und nach ihm Weidler, Heilbronner, Montucla und Lalande lassen ihn im zweiten Jahrhundert unserer Zeitrechnung geboren werden.

256) *Nihil in antiqua Geometria speciosius visum est quinque corporibus ordinatis, eorumque gratia Geometriam, ut ex Proclo, initio, dictum est, inventam esse veteres illi crediderunt.* (Ramus, *Scholarum mathematicarum*, Lib. XXX.)

257) *Collectiones mathematicae*, Lib. V, nach dem 17ten Satz.

258) *Tetragonismus, id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boëtium, mathematicos perspicacissimos adinventa.* Venetiis 1503, in 4.

bekannt gemacht; und später haben einige Autoren wiederholt, dass Campanus über die Quadratur des Zirkels geschrieben habe. Aber das Werk, um das es sich handelt, bezeichnet nur die Unwissenheit seines Verfassers und ist durchaus unwerth, den Namen des berühmten Interpreten Euclid's zu führen. Der Verfasser nimmt zur Grundlage seiner Quadratur $\frac{22}{7}$ als das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser, *„secundum quod plerique mathematici scripserunt et juxta physicam veritatem"*; und indem er durch einige Zwischen-Proportionen geht, schliesst er, dass die Seite des Quadrats, welches der Fläche des Kreises gleich ist, 5 und $\frac{1}{2}$ mal der siebente Theil des Durchmessers ist. So dass, wenn D der Durchmesser ist, die Fläche des Kreises $\frac{D^2}{4} \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^2$, statt $\frac{D^2}{4} \cdot \left(\frac{22}{7}\right)^2$ sein würde.

Sacro Bosco verdankt eine lange Berühmtheit seinem Werk *De sphaera mundi*, welches ein Auszug aus dem Almagest des Ptolemäus ist und welches 400 Jahre hindurch in den Schulen zum Unterricht in der Astronomie gedient hat. Zum ersten Mal 1472 zu Ferrara gedruckt, hat es seitdem wenigstens funfzig Auflagen erlebt. Viele der berühmtesten Autoren, wie Purbach, Regiomontanus, Elias Vinet, Clavius u. a. haben es durch Noten oder Commentare erläutert.

Aber es ist hier wichtig zu bemerken, um sich eine richtige Idee von dem damaligen Zustand der Wissenschaft zu machen, dass dieses Werk nur die elementarsten Begriffe aus dem Ptolemäus enthält; es lehrt die Kreise der Kugel kennen, die Phänomene der täglichen Bewegung und sagt einige Worte über die Finsternisse. Erst zwei Jahrhunderte später ging man in der Kenntniss des Almagest einen Schritt weiter, indem Purbach die Theorie der Planeten erklärte, welche der wichtigste und schwierigste Theil davon ist.

Sacro Bosco hat unter dem Titel *De Algorismo* ein in Versen geschriebenes Werk über Arithmetik hinterlassen. Dieses ist unsre jetzige Arithmetik [259]): Sacro Bosco schreibt sie den Indern zu. Er theilt sie in 9 Theile, nämlich: Nu-

259) Man hat aus derselben Zeit noch ein andres Werk über Arithmetik, auch in lateinischen Versen geschrieben, von Alexander von Villedieu. (Vossius, *De scientiis mathematicis*, p. 40. — Dounou, *Histoire littéraire de la France*, t. XVI, p. 113.)

meration, Addition, Subtraction, Mediation[260]), Duplation[261]); Multiplication, Division, Progression und Extraction der Quadrat- und Kubikwurzel. Sehr lange Zeit hindurch waren die Werke über Arithmetik aus diesen neun Kapiteln zusammengesetzt; man findet dieselben noch in Werken des 16ten Jahrhunderts.

Man hat von Sacro Bosco einige Schriften über Astronomie, in denen die Rechnungen mit arabischen Ziffern ausgeführt sind. Diese Piecen und der Tractat über den Algorismus sind Manuscript geblieben. Die Ziffern des Sacro Bosco sind die unsrigen, man verfolgt sehr leicht in den Manuscripten des 14ten und 15ten Jahrhunderts und selbst in mehren Werken aus der ersten Zeit der Buchdruckerkunst die kleinen allmähligen Veränderungen, welche ihnen endlich die gegenwärtige Gestalt gegeben haben.

Dem Jordan Nemorarius verdankt man:

1. Ein Werk der Arithmetik in zwei Büchern, welches eine Behandlung der Eigenschaften der Zahlen ist, nachgeahmt denen des Nicomachus und Boëtius. Dieses Werk wurde mit dem Commentar des Faber Stapulensis im Jahr 1496 gedruckt; seitdem erschienen von ihm noch mehre andre Ausgaben.
2. Eine Behandlung der praktischen Arithmetik, im arabischen Stil, betitelt *Algorismus*, welche Manuscript geblieben ist.
3. Ein Werk über das Planisphärium, welches 1507, 1536 und 1558 mit dem des Ptolemäus gedruckt ist. In diesem Werk findet man zum ersten Mal in ihrer ganzen Allgemeinheit die schöne Eigenschaft der stereographischen Projection bewiesen, welche die Grundlage der Construction des Planisphärium ist, dass nämlich *jeder Kreis sich als Kreis projecirt.* Ptolemäus hat dieses Theorem nur für gewisse Lagen des Kugelkreises bewiesen, weil er, indem er *überall Klarheit und Leichtigkeit suchte,* wie Proclus im Xten Buch seiner Hypotyposis sagt, in seine Werke nichts Andres einführte und darin nichts Andres bewies, als die geometrischen Sätze, die ihm unumgänglich nothwendig waren.

---

260) Division durch Zwei.

261) Multiplication durch Zwei. Diese Operation und die Mediation werden in den Werken des 16ten Jahrhunderts unter den allgemeinen Regeln der Multiplication und Division mitbegriffen, so dass diese Werke nur sieben Kapitel statt neun enthalten. (S. die *Summa de Arithmetica* von Lucas de Burgo.)

Ptolemäus bildet die Projection auf der Ebene des Aequators, indem das Auge im Pol ist, Jordan auf der Tangenten-Ebene, die durch den zweiten Pol an die Kugel gelegt ist. Später sind Maurolycus und andre Geometer ihm gefolgt. Wir bemerken diese geringen Unterschiede zwischen dem Werke des Jordan und dem des Ptolemäus, weil sie für jene Zeit wirkliche Neuerungen waren, welche die ersten Schritte des Untersuchungs- und Erfindungsgeistes waren, der sich im 13ten Jahrhundert so selten findet, wo der Verstand noch genug zu thun hatte, sich die von den Arabern überlieferten Kenntnisse anzueignen.

Die Benennung der *stereographischen* Projection, welche man der von Ptolemäus bei seinem Planisphärium angewandten Projection gegeben hat, ist die neuere; sie leitet sich von Aguilon her, der sie in seiner Optik vorschlug und anwandte.[262]

Die stereographische Projection besitzt eine bemerkenswerthe Eigenschaft, die darin besteht, dass *der Winkel zweier Kreise auf der Kugel gleich ist dem Winkel der beiden Kreise in der Projection.* Dieses schöne Theorem ist weder von Ptolemäus noch von Jordan bemerkt.[263] Das älteste Werk, so viel Delambre weiss, in dem sich dasselbe findet, ist das über Navigation von Robertston (1754). (S. *Traité d'astronomie*, t. III.)

Es giebt ein Manuscript *De triangulis* von Jordan.[264]

Er hat auch drei Bücher *De geometria* geschrieben, von denen Vossius glaubt, dass sie sich in der Bibliothek des Vatican finden müssen[265], und welche auch die Bibliothek von Leipzig besessen hat.[266]

---

262) *Aguilonii Opticorum libri sex.* Paris 1613, in fol.
„Quare tametsi stereographices nomine nusquam vocatum hoc projectionis genus reperimus; quia tamen nec alio quidem ullo solitum est appellari, placuit hoc nomen usurpare, quod nobis in praesenti visum est ad rem ipsam quam maxime accomodatum" (Praefatio.)

263) Wir haben in unsrer fünften Epoche gesagt, dass die stereographische Projection noch eine andre sehr schöne Eigenschaft besitzt, die sich auf die Bestimmung des Mittelpunkts eines Kreises in der Perspective bezieht; und dass die Principien dieser Projection, übertragen auf die Oberflächen des zweiten Grades, heut zu Tage eine Methode der Aufsuchung in der rationellen Geometrie bilden.

264) Dieses Werk findet sich in der Bibliothek der Dominikaner zu Florenz (Montfaucon, *Bibl. bibl.*); in der der Stadt Basel (Haenel, *catalogi*, etc.), und in der königlichen Bibliothek zu Paris (Nr. 7378, A.).

265) *De scientiis mathematicis*, p. 333.

266) C. Gesner, *Bibliotheca universalis*, etc., t. II, fol. 77.

Ramus schreibt ihm den Beweis der eleganten Formel für die Fläche des Dreiecks, als Function der drei Seiten, zu. 267) Wir wissen nicht, in welchem Werk Jordan sie gegeben hat; Venturi hat sie in dem Werke *De triangulis* nicht gefunden. 268) Dieser Beweis ist derselbe, als der, welchen Leonhard von Pisa in demselben Jahrhundert in seiner praktischen Geometrie gegeben hat. Er scheint arabischen Ursprungs zu sein, denn er findet sich in dem Werke der drei Geometer, der Söhne von Musa ben Schaker und in dem des Juden Savosarda.

Jordan hat auch über die Optik und über die Mechanik geschrieben. 269)

Albertus magnus, der so genannt wurde, wie Montucla sagt, entweder wegen seines Ansehns, oder weil sein Eigenname, der *Grott* ist, in der Sprache seiner Zeit *gross* bedeutet, hat über Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik geschrieben. Diese Werke sind nicht auf uns gekommen. Er war durch seine Gewandtheit in der Mechanik berühmt. Auch besass dieser ausserordentlich fruchtbare Schriftsteller eine ausgedehnte Kenntniss der arabischen Werke.

Roger Baco, eines der kräftigsten Genies aus dem Mittelalter, nimmt den ersten Rang unter denen ein, welche die allgemeine Wiedergeburt der Wissenschaften beförderten. Er trug hauptsächich zu den Fortschritten der Mathematik bei, indem er in mehren seiner Werke 270) den Rang zeigte, den diese in der Gesammtheit der menschlichen Kenntnisse einnimmt, und die Hülfe, welche sie bei allen wissenschaftlichen Untersuchungen, deren Grundlage sie ist, leisten kann. Seine Optik enthält, wie Jedermann weiss, gelehrte Bemerkungen und reelle Entdeckungen in der Theorie und die Erfindung mehrer Instrumente, die vom grössten Nutzen geworden sind.

Seine Kenntnisse in der Astronomie liesen ihn die Fehler des Kalenders erkennen, dessen Reformation er vornahm. Der Kalender, den er berechnete und der Manuscript geblieben ist, zeichnet sich durch seine Richtigkeit und durch den Gebrauch der arabischen Ziffern aus, welche dieselben sind, als die des Sacro Bosco.

---

267) *Scholae mathematicae*, nach dem XXXIsten Buch.

268) *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica.* Commentario II; del Traguardo, cap. XXX.

269) *Jordani de ponderibus propositiones XIII et demonstrationes.* Norimbergae 1531, in 4.

270) *Specula mathematica.* — *Opus majus*, 4ter, 5ter und 6ter Theil.

Vitellio hat ein gelehrtes Werk über die Optik hinterlassen, das dem des Arabers Alhasen nachgebildet ist und das, besonders für die Epoche, in der es erschien, durch die Principien der Geometrie aus der griechischen Schule, auf denen es beruht, bemerkenswerth ist.

Das ganze erste Buch ist der Geometrie gewidmet. Der Verfasser stellt darin die Sätze zusammen, von denen er häufig in der Folge Gebrauch machen will und die sich nicht in den Elementen des Euclid befinden. Einige sind aus den Kegelschnitten des Apollonius entnommen, die Vitellio citirt; andre, die sich auf die harmonische Theilung einer geraden Linie beziehen, sind in der Weise derjenigen, die man im siebenten Buch der mathematischen Sammlungen von Pappus findet; andre endlich sind von solcher Art, wie man sie in dem Werk *De inclinationibus* von Apollonius findet. Aber es geschieht weder von diesem Werk, noch von dem des Pappus Erwähnung.

Indem Vitellio die Elemente des Euclid und die Kegelschnitte des Apollonius, mit denen er vertraut zu sein scheint, citirt, zeigt er uns einer Seits, dass eine andre Uebersetzung des Euclid, als die damals noch zu neue des Campanus, in Europa schon gebräuchlich war, und andrer Seits, dass auch das berühmte Werk der *Conica* schon bekannt war. Man hat geglaubt, dass es erst 200 Jahre später, um die Mitte des 15ten Jahrhunderts, wo Regiomontanus eine Ausgabe beabsichtigte [271]), angefangen habe bekannt zu werden.

Ein andrer Schriftsteller, Peccam, Erzbischof von Canterbury, ein Zeitgenosse des Vitellio, hat auch ein Werk über die Optik hinterlassen; es ist aber weniger gelehrt, als das des polnischen Geometers.

Vincent von Beauvais ist kein origineller Autor; aber sein *speculum mundi*, ein ungeheures Werk, das den Namen einer *Encyclopädie des* 13*ten Jahrhunderts* erhalten hat, verdient angeführt zu werden, da es eine Idee von dem Zustand giebt, in welchem die Wissenschaften sich in dieser Epoche befanden, wenn man darunter nicht immer die Fortschritte mitbegreift, die sie in diesem Jahrhundert selbst gemacht haben. Man findet in diesem Werk Auszüge aus Euclid, Aristoteles, Vitruvius, der bis dahin im Mittelalter unbekannt gewesen zu sein scheint, aus Boëtius, Cassiodorus, Isidorus von Sevilla, Alfarabius, Avicenna und verschiedenen andern arabischen Autoren.

---

271) Montucla, *Histoire des mathématiques*, t. I, p. 248.

Vincent von Beauvais sagt, dass Alfarabius [272]) acht mathematische Wissenschaften unterscheidet: Arithmetik, Geometrie, Perspective, Astronomie, Musik, Metrik oder die Wissenschaft vom Gewicht und Maass, und die Wissenschaft des Geistes (d. i. Metaphysik). Es sind hier nicht mehr als sieben Wissenschaften; die achte, welche ausgelassen ist, ist die Algebra, welche Alfarabius nach der Arithmetik gesetzt hat. Vincent von Beauvais spricht nicht weiter davon; was auf die Vermuthung führt, dass damals die Algebra kaum in Frankreich eingedrungen war, oder wenigstens, dass sie nur einem kleinen Kreise von Mathematikern bekannt war.

Unser Zahlensystem ist nebst der Null sehr klar auseinandergesetzt, unter dem Titel *Algorismus*. Die Geometrie reducirt sich auf Definitionen und auf einige elementare Begriffe; was uns beweist, das die Gegenstände, worauf sich die gelehrten Werke von Sacro Bosco, Campanus, Jordan, Vitellio beziehen, noch ganz neu waren, und dass die Kenntnisse davon nicht bis zu Vincent von Beauvais gedrungen war.

Wenn wir bei unsrer Prüfung der Schriftsteller aus dem 13ten Jahrhundert die chronologische Ordnung hätten befolgen wollen, so würden wir ohne Zweifel mit Fibonacci, gewöhnlich Leonhard von Pisa genannt, angefangen haben, da sein *Liber Abbaci* das Datum 1202 führt. Aber dieses Werk hat einen solchen Einfluss auf die Richtung der mathematischen Wissenschaft im 15ten Jahrhundert gehabt, dass wir es ausdrücklich von denen absondern wollten, von denen wir bisher gesprochen haben. Diese gehören der griechischen Schule an, obgleich sie durch die Vermittelung der Araber und in deren Sprache in Europa Eingang gefunden haben. Die des Leonhard von Pisa dagegen scheinen uns indischen Ursprungs zu sein, obgleich sie auch durch die Hände der Araber gegangen sind. Hieraus entspringt der Charakter, der sie von den andern unterscheidet.

Leonhard Fibonacci reiste, wie man weiss, nach dem Orient; und auf seiner Rückreise liess er ein Werk über Arithmetik und Algebra erscheinen, das mit den Worten anfängt: *Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filio*

---

272) Alfarabius war einer der berühmtesten Araber des 10ten Jahrhunderts, besonders als Geometer und Astronom. In dem Verzeichniss seiner zahlreichen Werke bemerkt man eines, dessen Titel, *Nilus felicitatum, seu disciplinarum mathematicarum Thesaurus*, den ganzen Werth zeigt, den man der Ausbildung in der Mathematik beilegte.

Bonacci Pisano, in anno 1202. Die Arithmetik ist unser gegenwärtiges System mit der Null; Fibonacci schreibt es den Indern zu:

„*Novem figurae Indorum hae sunt*

VIIII, VIII, VII, VI, V, IIII, III, II, I.
9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.[273])

cum his itaque novem figuris et cum hoc signo 0 *quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus*, etc." [274])

Das Werk über Algebra, welches Fibonacci, so wie die Araber, *Algebra et Almucabala* nennt, geht bis zur Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades und einiger andern, die sich darauf reduciren. Es ist eine Nachahmung desjenigen, von Mohammed ben Musa behandelten Theils der Algebra, der elementar und bei den Arabern im 9ten Jahrhundert populär war. Fibonacci macht darin Anwendungen von dieser Wissenschaft auf die Geometrie; und es ist dieses das erste Beispiel und zugleich, bei den europäischen Mathematikern, der Ursprung für die Einführung der Algebra in die Beweise und Speculation der Geometrie. Diese Ver-

---

273) Diese Ziffern sind ähnlich denen des Sacro Bosco, welche viele andre Autoren in ihren Werken angeführt haben. (S. besonders Heilbronner und Montucla.) Uebrigens haben die arabischen Ziffern, welche man in einer grossen Zahl von lateinischen Manuscripten des 13ten und 14ten Jahrhunderts findet, immer dieselbe Form.

274) Man sieht, dass beinahe alle Autoren des 13ten Jahrhunderts, Fibonacci, Jordan, Sacro Bosco, Vincent de Beauvais, Alexander von Villedieu, Roger Baco, über das arabische, oder vielmehr indische Zahlensystem geschrieben haben. Dieses beweist offenbar, dass unter den Mathematikern dieses System schon seit langer Zeit bekannt war und von ihnen gebraucht wurde; und dass die Untersuchungen für die genaue Zeitbestimmung seiner Einführung in Europa, wofür die Ehre weder dem Fibonacci noch irgend einem andern der genannten Schriftsteller zugeschrieben werden kann, bis über das 13te Jahrhundert hinaus zurückgehen müssen. Man kann in der That nicht glauben, dass die Schriftsteller des vorhergehenden Jahrhunderts, welche zahlreiche Uebersetzungen von den Hauptwerken der Araber aus Spanien herüberbrachten, nicht ihr Zahlensystem gekannt haben sollten, sowohl an und für sich, als auch weil es durchaus nothwendig war, um ihre astronomischen Tafeln und andern Werke zu übersetzen, solche wie die von Arzachel, Alfraganus u. A.

Und in der That, wir haben schon ein Werk über den *Algorismus* angeführt, welches von Gerard von Cremona zu sein scheint, und ein andres von Johannes Hispalensis. Diese beiden Schriftsteller haben im 12ten Jahrhundert gelebt.

einigung der beiden Wissenschaften, die bei den Griechen so geschieden waren, bildet den eigentlichen Charakter des Werkes von Fibonacci, worin sie nicht allein in Anwendung gebracht wird, sondern worin es ausdrücklich als zur Natur dieser beiden Wissenschaften gehörend ausgesprochen wird, dass sie sich gegenseitig unterstützen müssen; denn in der Vorrede sagt Fibonacci: *Et quia arithmetica et geometriae scientia sunt connexae, et suffragatoriae sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina, nisi inserantur geometrica quaedam, vel ad Geometriam spectantia*; und er fügt hinzu, dass oft die Regeln und Verfahrungsarten der Algebra ihre Evidenz und ihre Beweise aus geometrischen Figuren und Betrachtungen ableiten. Darauf kündigt der Verfasser an, dass er über das, was die Geometrie betrifft, weitläufiger in einem Buche über die praktische Geometrie, das er verfasst habe, sprechen werde.

Dieses in acht Kapitel getheilte Werk ist betitelt: *Leonardi Pisani de filiis Bonacci Practica Geometriae, composita anno MCCXX.* Es ist Manuscript geblieben, eben so wie das Werk über Algebra. Bernardin Baldi berichtet uns, dass Commandin eine Ausgabe dieses Werks über Geometrie vorbereitet habe, dass er aber, ohne seine Absicht erreicht zu haben, gestorben sei. 275) Eduard Bernard, ein gelehrter englischer Geometer und Astronom des 17ten Jahrhunderts, wollte die Behandlung der Algebra in dem siebenten Bande der herrlichen Sammlung, die er von den Werken der alten Mathematiker vorbereitet hatte, mit aufnehmen. 276)

---

275) *Cronica de' matematici*, p. 89.

276) Diese Sammlung sollte 14 Bände enthalten; das Verzeichniss der Werke, welche darin aufgenommen werden sollten, findet sich in der *Bibliotheca graeca* von Fabricius (Lib. III, cap. 23).

Im 6sten Bande, der für die Algebra bestimmt war, bemerkt man folgenden Titel für ein Werk von Thebit ben Corah, welcher den innigen Zusammenhang zeigt, den die Araber zwischen der Algebra und der Geometrie aufstellten, und der den eigenthümlichen Charakter ihrer Mathematik bildete: *Thebeti tractatus de veritate propositionum algebricarum demonstrationibus Geometricis adstruenda, cum aliis tractatibus egregiis, quae Gebricam artem spectant.* Arabice et latine.

Die ungeheuren und kostbaren Materialien, die von Ed. Bernard vorbereitet waren, sind nach seinem Tode in die *Bibl. Bodleiana* gekommen. Man muss sich wundern, dass ein so schönes und nützliches Unternehmen nicht ausgeführt worden ist, und zwar in einem Lande, in dem die Wissenschaften so oft noble und grossartige Unterstützung gefunden haben.

Fibonacci hat auch eine Abhandlung über die *Quadratzahlen* hinterlassen, welche nach dem, was man darüber aus den Stellen in der *Summa de arithmetica* etc. von Lucas de Burgo und in der Arithmetik von Cardan, wo sie citirt wird, urtheilen kann, sich auf die unbestimmte Analysis des ersten und zweiten Grades bezog. Die Formeln, welche diese beiden Geometer anwenden, sind von denen des Diophantus verschieden und sind dieselben, als die, welche man in den indischen Werken findet, nur stets mit der Ausnahme, dass sie nicht so schwierige und so allgemeine Aufgaben lösen, als man in den indischen Werken findet. Wir müssen diese Abhandlung des Fibonacci als eine Kopie irgend eines arabischen Werkes betrachten, das selbst wieder aus denen der Inder entlehnt war.

Im Allgemeinen also hatten die Schriften des Fibonacci, der im 16ten Jahrhundert das Vorbild und das Fundament für Lucas de Burgo, Cardan und Tartalea waren, einen rein arabischen und im Grunde indischen Ursprung. Es ist daher, worauf wir zurückkommen müssen, eine irrthümliche Meinung, dass wir unser Wisssen und unsre Fortschritte in der Wissenschaft direct und ausschliesslich den Griechen zu verdanken haben.

Die Werke von Fibonacci sind noch nicht edirt, obgleich man gegenwärtig ihre ganze Wichtigkeit erkennt; die Manuscripte davon sind sehr selten und die Abhandlung über die Quadratzahlen ist schon seit 60 Jahren verloren gegangen. Dasselbe Loos wird den Werken über Algebra und Geometrie zurückbleiben, wenn der Druck nicht bald für die Aufbewahrung dieser für die Geschichte der Wissenschaft bei den Europäern so wichtigen Denkmäler sorgt.[277])

---

277) „Diejenigen, welche sich nicht speciell mit historischen Untersuchungen beschäftigt haben, können sich gar keine Vorstellung machen, wie viele kostbare Manuscripte zu Grunde gerichtet sind, selbst noch in den letzten Zeiten..... Nach so strafbarer Nachlässigkeit, wie darf man da noch von der Vernichtung der Manuscripte im Mittelalter sprechen? Aus Furcht, in den Augen der Nachwelt für Barbaren zu gelten, musste man schon in einer solchen Zerstörung innehalten." (*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, p. X.)

Wir hielten es für Pflicht, diesen Ausspruch Libri's anzuführen, und wünschen, dass er ein vielfaches Echo finde. Aber man fühlt, dass die Pflicht, die er auferlegt, nicht die der einfachen Privatleute ist, sondern vielmehr die der Regierungen, welche zu den Fortschritten der Wissenschaft und zur Entwickelung der menschlichen Einsicht beizutragen geneigt sind. Der Druck einiger Manuscripte, an welche sich ein wissenschaftliches und historisches Interesse knüpft, selbst die Uebertragung einiger fremden Werke in die Nationalsprache, wäre ihrer Seits eine nützliche und würdige, übrigens

Das 14te Jahrhundert erscheint in der Geschichte des Mittelalters mit weniger Glanz als das 13te, weil in der That die neuen und wichtigen Erzeugnisse, welche die Namen von Fibonacci, Sacro Bosco, Campanus, Jordan, Vitellio, Roger Baco berühmt machten, im Stillen überdacht und studirt zu werden verlangten, um vollständig begriffen zu werden und ihre Früchte zu tragen. Jedenfalls scheint uns das noch zu wenig bekannte 14te Jahrhundert seine Bestimmung erfüllt zu haben. Die mathematischen Studien wurden weiter ausgebildet und reducirten sich nicht auf blosse Reproduction oder Nachahmung einiger arabischen Werke; es wurden die ersten Anstrengungen gemacht, um die erlangten Kenntnisse anzuwenden und darüber hinauszugehen; die Geister wurden auf die Lectüre der griechischen Texte und auf die schnelle und allgemeine Bewegung vorbereitet, welche im nächsten Jahrhundert die Erneuerung der Wissenschaften hervorbrachte.

14tes Jahrhundert.

Das erste Drittheil des 14ten Jahrhunderts bietet uns einen Mann dar, der durch seine Kenntnisse in der Philosophie, in der Mathematik, in der Theologie und in der arabischen Literatur eine bedeutende Berühmtheit erlangt hat, Thomas von Bradwardin, Bischof von Canterbury. Wir haben schon die gelehrte Theorie der ausspringenden Polygone erwähnt, die dieser Geometer aus dem einfachen Datum des Sternfünfecks von Campanus erdacht hat. Diese Theorie war wirklich eine neue Auffassung, welche dem 14ten Jahrhundert Ehre macht. Sie findet sich, wie wir gesagt haben, in einem Werk unter dem Titel: *Geometria speculativa*, welches 1496 gedruckt ist und später noch mehre Auflagen erlebt hat.[278]

---

auch wenig kostspielige Unterstützung der Arbeiten von Männern, die sich dem Studium widmen.

Eine zweite Maassregel, die zu nehmen wäre, um die Vernichtung der literarischen Seltenheiten (solche z. B wie die Productionen des 17ten Jahrhunderts, die täglich verschwinden) zu vermeiden, wäre die Errichtung einer speciell für die Wissenschaft bestimmten Bibliothek, gewisser Maassen eine hisorische Bibliothek, worin sich Jahrhunderte hindurch alle Erzeugnisse des Wissens und des Genies vereinigt finden, und die ein Vereinigungspunkt sein müsste, wohin jeder es für Pflicht und für eine Ehre hielte, seine kleinen eigenen Arbeiten hinzuliefern, welche man jetzt verloren gehen lässt, weil man nicht weiss, wohin man sie bringen soll, um sie nützlich zu machen und ihnen eine dauernde Existenz zu sichern.

278) In einem Manuscript der königl. Bibl. (Nr. 7368, Kopie aus dem 14ten Jahrh.) findet sich eine Piece, die im Katalog betitelt ist: *Fragmentum elementorum Geometriae*, worin wir Stellen aus der Geometrie von Bradwardin erkannt haben. Die Theorie der ausspringenden Polygone steht auch darin, aber unter den Figuren findet

Dieses Datum von 1496 scheint die Geschichtschreiber Bernardin Baldi, Heilbronner und Montucla zu dem Irrthum verleitet zu haben, dass sie ihn an das Ende des 15ten Jahrhunderts setzen; und es ist dieses vielleicht der Grund, weshalb man bisher auf sein Werk nicht geachtet hat; denn das Verjüngen hierbei um mehr als anderthalb Jahrhunderte heisst das Verdienst bedeutend verringern. Für die Zeit, in der es geschrieben wurde, scheint es uns merkwürdig zu sein, und zwar nicht allein wegen der Theorie der ausspringenden Polygone, sondern auch noch wegen mehres Anderm, worunter man einige Sätze über die isoperimetrischen Figuren bemerkt.

Die Analyse dieses Werks ist folgende:

Sein zweiter Titel ist: *Breve Compendium artis Geometriae a Thoma Bravardini ex libris Euclidis, Boëtii et Campani peroptime compilatum.* Der Verfasser hätte auch Archimedes und Theodosius nennen müssen, welche er oft citirt und aus denen er Mehres entlehnt, und zwar aus dem Buch *De quadratura circuli* des erstern und aus den *Sphaericis* des andern.

Das Werk zerfällt in vier Theile:

Der erste enthält die Definitionen, Axiomata und Postulata, welche zu Anfang der Elemente Euclid's stehen; und die Theorie der ausspringenden Polygone.

Der zweite Theil behandelt die Dreiecke, die Vierecke, den Kreis und die isoperimetrischen Figuren, von denen, wie Bradwardin bemerkt, Euclid in seiner Geometrie nicht gesprochen hat. Aber man weiss, dass in der Schule des Pythagoras diese Theorie entworfen wurde, und dass Zenodorus, ein Schüler dieses Philosophen, über diesen Gegenstand eine Schrift hinterlassen hat, welche dazu bestimmt war, die gewöhnliche Meinung, als hätten Figuren von gleichem Umfang auch gleichen Inhalt, zu bekämpfen. Dieses Werk, das älteste von den auf uns gekommenen geometrischen Werken der Griechen, ist von Theon in seinem Commentar zum Almagest aufbewahrt.[279]) Pappus hat diese Materie auch im Anfang des fünften Buchs seiner mathematischen Sammlungen behandelt. Bradwardin sagt nicht, ob diese Sätze, welche

---

man nur das Fünfeck der zweiten Gattung und das Siebeneck der dritten Gattung, welche, wie in dem gedruckten Werk, Fünfeck der *ersten Ordnung* und Siebeneck der *zweiten Ordnung* genannt sind. Die andern ausspringenden Polygone sind nicht dargestellt.

279) Clavius hat es in seinem Commentar über die Sphäre des Sacro Bosco reproducirt.

er beweist, aus diesem Werke oder aus dem Almagest entnommen sind, oder aber ob er sie selbst erfunden habe. Die Sätze sind diese:

Erster Satz. — *Unter allen isoperimetrischen Polygonen ist dasjenige, welches die grösste Anzahl von Winkel hat, seiner Fläche nach das grösste.*

Zweiter Satz. — *Unter allen isoperimetrischen Polygonen, mit gleicher Anzahl von Winkeln, ist dasjenige das grösste, welches gleiche Winkel hat.*

Dritter Satz. — *Unter allen isoperimetrischen Polygonen, die eine gleiche Anzahl von Seiten und unter einander gleiche Winkel haben, ist dasjenige das grösste, welches gleiche Seiten hat.*

Vierter Satz. — *Unter allen isoperimetrischen Polygonen ist der Kreis die grösste.* Der Verfasser fügt hinzu, dass *die Kugel dieselbe Eigenschaft unter den Körpern besitzt.*

Der dritte Theil des Werks handelt von den Proportionen und der Flächenausmessung des Dreiecks, des Vierecks, der Polygone und des Kreises.

Bradwardin sagt, dass die Fläche des Kreises einem Rechteck gleich ist, dessen Seiten die halbe Peripherie und der halbe Durchmesser sind. Er schliesst diesen Satz aus dem des Archimedes, welcher derselbe ist, nur mit andern Worten, und den er, ohne Beweis, aus dem Buche *De quadratur circuli* entlehnt, wo er so ausgesprochen ist: *Irgend ein Kreis ist einem rechtwinkligen Dreieck gleich, dessen eine Kathete gleich dem Radius des Kreises und dessen andre Seite gleich der Peripherie desselben Kreises ist.* Bradwardin fügt hinzu, dass das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser $\frac{22}{7}$ ist; „*hoc ut habetur ab eodem Archimenide*[280]) *in praedicto libello* (*De quadratura circuli*)."

Der vierte Theil handelt von den Figuren dreier Dimensionen, von den Oertern, von den körperlichen Winkeln, von den fünf regulären Körpern und von der Kugel.

Das Buch über die Kugel ist eine Sammlung von verschiedenen Sätzen über Kreise, die auf dieser Oberfläche gezogen sind, von denen Bradwardin sagt, dass er sie aus dem *Liber sphaericorum* des Theodosius entnommen habe.

Endlich findet man noch eine kleine besondre Schrift über die Quadratur des Zirkels, betitelt: *Tractatus de qua-*

280) Bradwardin nennt Archimedes *Archimenides.*

dratura circuli editus a quodam archiepiscopo ordinis fratrum minorum. Diese Schrift stimmt genau mit der überein, welche Gauricus dem Campanus zuschrieb. Nach dem, was wir gesagt haben, wird man vermuthen, dass sie ebensowohl den Namen des Bradwardin, als den des Campanus führen darf.

Eine Idee des Bradwardin, die Frucht des ersten Schimmers der platonischen Philosophie, welche anfing, in Europa Eingang zu finden, verdient bemerkt zu werden. Dieser Schriftsteller nämlich versuchte zuerst die geometrische Methode auf die Theologie anzuwenden, und verbreitete so den ersten Keim zu dem Unabhängigkeitssinn, der sich bald in den Klöstern und Seminarien fühlbar machte und der im nächsten Jahrhundert von einem andern Kirchenfürsten, dem Nicolas von Cusa, einem platonischen Philosophen, noch mehr cultivirt, das Joch der Scholastik aus dem Mittelalter von sich abschüttelte und auf die neuere Philosophie hinarbeitete.

Wir fahren in der Geschichte des 14ten Jahrhunderts fort. Zu Anfang dieses Jahrhunderts hat Pediasimus über Geometrie und Geodäsie geschrieben; der Mönch Barlaam hat ein Werk über Arithmetik und eines über Algebra in sechs Büchern hinterlassen; das letztere unter dem Titel *Logisticae libri VI,* in griechischer Sprache[281]), obgleich der Autor ein Italiener war, der aber im Orient gelebt hatte, um die griechische Sprache zu erlernen. Eine lateinische Uebersetzung von dem Werke über Algebra ist 1752 (Strassburg, in 8.) gedruckt, darauf 1606 (Paris, in 4.) mit Scholien von Jean Chamber. Das Originalwerk ist vielleicht das älteste Werk über Algebra, das auf uns gekommen ist, wenn man das von Fibonacci abrechnet, welches mehr als ein Jahrhundert älter ist.

Killingworth hat astronomische Tafeln und eine Schrift über den Algorismus hinterlassen.

Simon von Bredon hat den Almagest des Ptolemäus[282]) commentirt und über Arithmetik geschrieben.

---

281) Indem Delambre von demjenigen Buch in diesem Werk Rechenschaft giebt, welches sich auf die astronomischen Rechnungen bezieht, stellt er den Verfasser vor Beda, indem er stets sagt, dass er die Epoche nicht genau wisse, in der er gelebt. Diese Unachtsamkeit ist eigenthümlich, denn Barlaam ist auch noch in der literärischen und politischen Geschichte des 14ten Jahrhunderts eine berühmte Person.

282) Ed. Bernard hatte dieses Werk in den VIIIten Theil seiner oben erwähnten Sammlung mit aufgenommen. Er hatte es betitelt: *Super demonstrationes aliquas Almagesti: Opus perdoctum.*

Isaac Argyrus, ein griechischer Mönch, hat astronomische Tafeln berechnet und mehre Werke geschrieben: über das Astrolabium; über Arithmetik, ***De extractione radicis quadraticae quadratorum irrationalium***; über die Geodäsie, ***Compendium geodaesiae seu de dimensione locorum methodus brevis et tuta***; und über verschiedene Theile der Geometrie, ***De inventione quadrangularium laterum***; ***Theoremata de triangulis***; ***De dimensione triangulorum aliarumque figurarum***; ***De figuris non rectangulis ad rectangulas reducendis.***

Keine von diesen Schriften ist gedruckt, und wir bedauern, nicht angeben zu können, welches ihr Object war oder was sie für die damalige Zeit, in der sie erschienen, Neues und Nützliches darboten. Ed. Bernard hatte eine von ihnen, griechisch und lateinisch, unter dem Titel ***De figurarum transmutatione***, in seine Sammlung der alten Autoren mit aufgenommen.

Paolo di Digomari, bekannt unter dem Namen ***Paolo dell' Abbaco***, hat über die Algebra, die Geometrie und die Astronomie geschrieben, und war auch ein ausgezeichneter Literator, der neben seinen berühmten Zeitgenossen Dante und Petrarca genannt zu werden verdient.

Montucla stellt in das 14te Jahrhundert Biagio di Parma, der über Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Optik schrieb und der ein für seine Zeit ausgezeichneter Mann war. Lucas de Burgo citirt ihn unter einigen neuern Autoren, die ihm bei der Abfassung seiner ***Summa de Arithmetica*** etc. von Nutzen gewesen sind. Aber er stellt ihn unmittelbar nach Leonard von Pisa und vor Sacro Bosco und Prosdocimo von Padua, was uns zu dem Glauben veranlasst, dass er ihn in das 13te Jahrhundert setzt; denn sonst beobachtet er die chronologische Ordnung in seiner Anführung der Autoren. Diese sind unter den ältern, Euclid und Boëtius, und unter den neuern, Leonard von Pisa, Biagio von Parma, Sacro Bosco und Prosdocimo von Padua.

Dieser letztere lebte am Ende des 14ten Jahrhunderts und zu Anfang des 15ten; er berechnete astronomische Tafeln und schrieb ein Buch ***De algorithmo***, von dem Montucla annimmt, dass er darin die Algebra behandelt habe (***Histoire des Mathématiques***, t. II, p. 716). Dieses Werk ist aber wahrscheinlich eine einfache Behandlung der praktischen Arithmetik, so wie alle die, welche denselben Namen des Algorismus führen; um so mehr, da Bernardin Baldi den Prosdocimo nur in der Art citirt, dass er über die Arithmetik und nicht über die Algebra geschrieben hat. Das Werk ***De algorithmo*** wurde übrigens 1483 gedruckt, und ist vielleicht

das erste Werk über unser Zahlensystem, welches durch den Druck bekannt geworden ist. Das *Compendium arithmetices Boëtii* von Faber Stapulensis ist zwar 1480 gedruckt, aber dieses Werk bezieht sich nur auf die speculative Arithmetik oder auf die Theorie der Zahlen, welche unabhängig von der Darstellungsart der Zahlen ist, indem sie sich nur einiger bedient, um alle andern auszudrücken. [283])

Cossali führt, in seiner Geschichte der Algebra [284]), mehre andre Italiener an, die über diese Wissenschaft im 14ten Jahrhundert geschrieben haben. Man sieht daraus, dass Wilhelm von Lunis die Algebra des Mohammed ben Musa unter dem Titel *La regola dell' algebra* übersetzt hat. Wir haben, als wir von der Geometrie bei den Arabern sprachen, gesagt, dass man im 13ten und 14ten Jahrhundert mehre andre lateinische Uebersetzungen von diesem Werk gehabt hat, von denen die eine durch Libri in dem ersten Bande seiner *Histoire des sciences mathématiques* reproducirt ist.

Die Astronomie war die im 14ten Jahrhundert am meisten cultivirte Wissenschaft; die meisten der damaligen Atronomen haben Schriften über das Astrolabium hinterlassen. Wir haben diese aber nicht hier zu nennen, weil sie nicht besonders über Geometrie geschrieben zu haben scheinen.

Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass sich die mathematische Wissenschaft bei den Christen im Mittelalter sehr langsam vom 8ten bis zum 14ten Jahrhundert gebildet hat: zuerst waren es nur oberflächliche Begriffe, die ursprünglich von den Griechen entlehnt und von Boëtius, Cassiodorus und Isidorus von Sevilla übertragen wurden, und hernach wirklich gelehrte Werke, die man um das 12te Jahrhundert aus Spanien zog und aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzte. Dieser scheinen aber heut zu Tage, nach dem, was wir davon angeführt haben, eine sehr geringe Anzahl gewesen zu sein; denn nachdem wir die Uebersetzungen des Euclid, Theodosius, Ptolemäus, Alhazen, Mohammed ben Musa

283) Das Werk *De algorithmo* von Prosdocimo scheint uns von Interesse zu sein, weil es die Meinung von Wallis über die Bedeutung der Worte *abacus* und *algorismus* bestätigt, von denen er glaubt, dass in den letzten Zeiten des Mittelalters das letzte das erstere ersetzt habe. Da Wallis in einem Manuscript der *Bibl. Bodleiana* gelesen hatte, dass Hermann Contractus und Prosdocimo über den *abacus* geschrieben hätten, so fügt er hinzu, dass dieses, mit anderm Namen, *algorismus* oder arabisches Zahlensystem bedeute. Der Titel des Werks von Prosdocimo, den Wallis nicht kannte, rechtfertigt vollkommen seine Meinung.

284) *Storia critica dell' origine, trasporto e primi progressi in Italia dell' Algebra.* Parma 1797, 2 Vol. in 4.

gefunden hatten, haben wir aus einigen Stellen in der Optik nur vermuthet, dass die Kegelschnitte des Apollonius bekannt gewesen sind, wir haben aber keine Uebersetzung dieses wichtigen Werks anführen können, eben so wenig als von denen des Archimedes, Hero, Menelaus, Pappus, Serenus, Proclus. Indessen können wir nicht glauben, dass die Werke dieser griechischen Geometer, von denen es vielfache arabische Uebersetzungen giebt, bei den Christen Europa's im 12ten und 13ten Jahrhundert nicht gleichzeitig mit den Elementen Euclid's sollten Eingang gefunden haben. Und in der That giebt es lateinische Uebersetzungen von einigen derselben. [285]) Aber ihre Seltenheit und das Stillschweigen über die Geometer, welche deren Verfasser gewesen sind oder welche sich ihrer bedient haben, beweisen, dass diese Werke wenig bekannt waren, und dass sich die mathematische Wissenschaft am Ende des 14ten Jahrhunderts noch in ihrer Kindheit befand, im Vergleich mit dem blühenden Zustand, den sie seit den ersten Zeiten der alexandrinischen Schule bei den Griechen und seit dem 11ten Jahrhundert bei den Arabern erreicht hatte. [286])

15tes Jahrhundert.

Im 15ten Jahrhundert aber, welches die Zeit der allgemeinen Wiedergeburt der Wissenschaften und Künste in Europa ist, erhielten die mathematischen Wissenschaften einen neuen und fruchtbringenden Impuls, der schnell die grossen Fortschritte vorbereitete, welche sie im folgenden Jahrhundert machen sollten. Dieser Impuls wurde durch die Kenntniss der griechischen Werke hervorgerufen, die man zum ersten Mal in ihrer Originalsprache studirte und von denen man sogleich Uebersetzungen vorbereitete, welche die Geometrie des Euclid, Archimedes, Apollonius und andrer grossen Schriftsteller des Alterthums bekannt machen sollten.

Diese ersten Schritte waren schon ein bemerkenswerther Fortschritt in dem Studium der Wissenschaft, welcher allein

---

285) Besonders in dem Manuscript der königl. Bibliothek, betitelt *Mathematica* (Suppl. lat. Nr. 49, in fol.). Libri hat in seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, T. I, p. 265, das Verzeichniss der Werke gegeben, die sich in diesem Bande finden.

286) Man mus gewiss allgemein zugestehen, dass wir nur sehr unvollständig die Geschichte des Mittelalters kennen, welche man bisher vernachlässigt hat, indem man seit dem 15ten Jahrhundert einzig mit dem Studium der Literatur und den Wissenschaften der Griechen beschäftigt war, welche unvergleichlich gehaltvollere Quellen für die Begründung unsrer Kenntnisse uns darboten.

hinreichen würde, den Ruhm des 15ten Jahrhunderts zu begründen. Zu gleicher Zeit aber wurde ein andres, den Kenntnissen der Griechen gewisser Maassen fremdes Element, die indische Algebra, welche seit 300 Jahren in Europa ohne Beachtung darnieder gelegen hatte, von Neuem wieder angeregt; ihre Anwendung wurde gezeigt und ihre Wichtigkeit ins gehörige Licht gesetzt. Die Verbindung zwischen ihr und der Geometrie, welche Fibonacci vorgeschrieben hatte, war nicht mehr eine unfruchtbare Idee, sondern ein, schon in die Praxis übergegangenes Princip. Einige Originalwerke endlich, die ersten Ergebnisse des Genies und die ersten Anwendungen der von den Griechen und Arabern entlehnten Kenntnisse, tragen noch zu dem Ruhme des 15ten Jahrhunderts bei. Hiezu kommt noch, dass die Erfindung der Buchdruckerei, in der Mitte dieses Jahrhunderts, den Anstrengungen des menschlichen Geistes, der früher durch die Seltenheit und Mangelhaftigkeit der Manuscripte gehemmt und zurückgestossen wurde, ausserordentlich zu Hülfe kam. Diese denkwürdige Entdeckung war gewisser Maassen die Ergänzung zu einem andern grossen Ereigniss des 15ten Jahrhunderts, der Eroberung von Constantinopel, wodurch Europa die Künste, die Literatur, die Philosophie und die Wissenschaften des alten Griechenlands erhielt. [287])

Wir wollen noch schnell die Geometer durchgehen, welchen man die ersten Arbeiten verdankt, von denen sich unsre Fortschritte in der Wissenschaft herschreiben.

An ihrer Spitze findet man Purbach und vor Allen seinen berühmten Schüler Regiomontanus.

Der erste ist besonders als Astronom und als Verfasser der *Theoricae Planetarum* [288]) bekannt. Dieses Werk war eine Fortsetzung der Sphäre von Sacro Bosco, bestimmt, die Kenntniss des Almagest von Ptolemäus zu vervollständigen, den Purbach von der Rechnung und von den geometrischen Beweisen befreit hatte. Sodann unternahm Purbach eine, neuerlich durch den Cardinal Bessarion nach Europa gebrachte Uebersetzung des geometrischen Theils dieses Werks

---

287) Mehre andre gleichzeitige Ereignisse, wie die Entdeckung Amerika's, des Cap der guten Hoffnung, Ostindiens, welche die Vervollkommnung der Astronomie, der Optik und der Geometrie veranlassten, trugen auch zur allgemeinen Thätigkeit des Geistes und zu der kräftigen Anregung bei, welche die Ausbildung der Wissenschaft in dieser Epoche erhielt.

288) Die *Theoricae Planetarum* wurden zuerst gedruckt 1488 zu Venedig, in 4., 28 Jahre nach dem Tode des Verfassers; darauf noch sehr oft, und meisten Theils mit Commentaren, wieder gedruckt.

von Ptolemäus. Diese Uebersetzung, an deren Vollendung ihn ein zu früher Tod hinderte, wurde von Regiomontanus fortgesetzt und erschien 1496 zu Venedig unter dem Titel: *Ptolemaei Alexandrini astronomorum principis in magnam constructionem Georgii Purbachii, ejusque discipuli Johannis de Regiomonte astronomicon epitoma.* Venetiis 1496, in fol.

Die beiden gelehrten Uebersetzer führten in die trigonometrische Rechnung des Ptolemäus die *Sinus* statt der *Chorden* ein, so wie es Albategnius und nach ihm die andern arabischen Schriftsteller gethan hatten; aber sie behielten den Ausdruck $\frac{\text{sinus}}{\text{cosinus}}$ bei, und wandten nicht die Tangente an, welche schon vor 500 Jahren Ibn Jounis und Abu 'l Wefa in die Trigonometrie eingeführt hatte. Später erdachte sie Regiomontanus auf seinem eignen Wege, und bildete dafür eine Tafel, die unter dem Namen *Tabula foecunda* bekannt ist.

Regiomontanus ist einer der merkwürdigsten Männer, welche die Geschichte der Mathematik aufzuweisen hat. Die Universalität seiner Kenntnisse, die ausserordentliche Fruchtbarkeit seines Geistes und die grosse Zahl seiner Productionen lassen ihn uns als den eigentlichen Wiederhersteller der Wissenschaft in Europa betrachten. Diese Productionen umfassen, eines Theils, die hauptsächlichsten Werke der grossen Geometer aus der Alexandrinischen Schule, Euclides, Archimedes, Apollonius, Menelaus u. s. w., welche Regiomontanus zuerst in ihrer Originalsprache gelesen und von ihnen correctere Uebersetzungen geliefert hat, als die sind, welche von den Arabern herkommen; und andern Theils enthalten sie die eigenen Entdeckungen von Regiomontanus. Unter diesen zeichnet sich besonders sein Tractat *De triangulis omnimodis libri quinque* (Nürnberg 1533, in fol.) aus, welcher eine vollständige Behandlung der ebenen und sphärischen Trigonometrie ist. Die beiden ersten Bücher sind für die rechtwinkligen Dreiecke bestimmt; sie enthalten eine Menge von Aufgaben, die zum ersten Mal erschienen. Es handelt sich immer darum, aus irgend welchen drei gegebenen Stükken eines Dreiecks die andern zu bestimmen. So z. B. wurden in der siebenten Aufgabe des zweiten Buchs der Umfang und zwei Winkel eines Dreiecks gegeben; in der zwölften Aufgabe desselben Buchs die Basis, die Höhe und das Verhältniss der beiden andern Seiten. Regiomontanus sagt, dass dieses Problem noch nicht geometrisch gelöst worden ist. [289])

---

289) Die Lösung dieser Aufgabe durch die reine Geometrie bietet keine Schwierigkeit dar, und ich weiss nicht, weshalb Regiomonta-

Und er wendet dabei die Algebra an, welche er *ars rei et census* nennt, wodurch er auf eine Gleichung des zweiten Grades geführt wird, und er fügt hinzu: *quod restat praecepta artis edocebunt.* 290) Man sieht hieraus, dass Regiomontanus die Kenntniss der Algebra besessen hat, welche er entweder aus dem Werk des Leonard von Pisa, das er in Italien benutzen konnte, oder aus den Uebersetzungen der Algebra von Mohammed ben Musa sich erworben hatte; und hierüber darf man sich gar nicht wundern, denn ein so umfassender und durchdringender Geist, wie der des Regiomontanus, konnte eine so herrliche und so nützliche Erfindung, die zu den werthvollsten Geschenken der Araber gehört, nicht ignoriren; aber diese Stelle bietet auch deshalb ein Interesse dar, weil sie beweist, dass schon um die Mitte des 15ten Jahrhunderts die Kenntniss der algebraischen Regeln unter den Mathematikern allgemein verbreitet war. Und in der

---

nus geglaubt hat, dabei nothwendig die Algebra anwenden zu müssen. In der That, nach der Aufgabe befindet sich der Scheitel des Dreiecks zuerst auf einer Geraden, die mit der gegebenen Basis parallel ist, und sodann auf einer Kreisperipherie, welche der geometrische Ort für alle Punkte ist, deren Entfernungen von den beiden Endpunkten der Basis in dem Verhältniss der beiden Seiten stehen.

Dieser Satz war den Alten bekannt: Pappus spricht ihn als einen von denjenigen aus, welche sich in dem zweiten Buch der *Loca plana* von Apollonius finden, und Eutocius hat ihn im Anfang seines Commentars zu den Kegelschnitten dieses Geometers bewiesen, um ein Beispiel von *geometrischen Oertern* zu geben, die den Alten zur Auflösung von Aufgaben dienlich waren. Er findet sich in dem *Traité des connues géométriques* des Arabers Hassan ben Haithem (Lib. I, Prop. 9). Bei den Neuern finden wir ihn in dem Buch *De proportionibus numerorum*, *motuum* etc. von Cardan; sodann in einem Werke von Alexander Anderson (s. unsre Note III über die Porismen); in den *Discorsi e dimostrazioni matematiche* etc. von Galiläi (p. 39); in den *Locis planis* von Apollonius, wiederhergestellt von Fermat, Schooten und A. Simson; in der *Dioptrica* von Huygens, und in vielen andern Werken. Legendre hat ihn in seine Elemente der Geometrie aufgenommen.

290) Wenn die Basis 20, das Perpendikel 5 und das Verhältniss der beiden Seiten $^3/_5$ ist, so nimmt Regiomontanus die Differenz der beiden durch das Perpendikel gebildeten Segmente der Grundlinie als unbekannt an, und kommt durch geometrische Betrachtungen zu der Gleichung 20 *census plus* 2000 *aequales* 680 *rebus*, d. h. $20 \cdot x^2 + 2000 = 680 \cdot x$.

Im 23sten Problem, worin es sich um die Construction eines Dreiecks handelt, von dem man die Differenz zweier Seiten, das Höhenperpendikel und die Differenz der durch dasselbe gebildeten Segmente der Basis kennt, wendet Regiomontanus auch die Regel *rei et census* an. Wir haben, bei Gelegenheit der Geometrie der Inder, gesagt, dass sich dieses Problem in dem *Lilavati* des Bhascara aufgelöst findet.

That schrieb Regiomontanus, der noch häufig von der Regel *rei et census* Gebrauch macht, in den Briefen, welche der berühmte Bibliograph De Mur bekannt gemacht hat[291]), an den Astronomen Blanchinus, er glaube, dass er mit dieser Kunst sehr vertraut wäre[292]); und dieser bedient sich auch wirklich derselben in seinen Antworten an Regiomontanus.

Die Bücher III, IV und V handeln von den sphärischen Dreiecken.

Das dritte Buch ist in der Weise der *Sphaerica* von Menelaus. Das vierte Buch enthält eine vollständige Trigonometrie, und das fünfte verschiedene Aufgaben, welche zum ersten Mal aufgelöst werden. Man bemerkt darin einen Satz, der einer, schon den Griechen bekannten, Eigenschaft der ebenen Dreiecke entspricht, nämlich: *Der Bogen des grössten Kreises, welcher den Scheitelwinkel eines sphärischen Dreiecks halbirt, bildet auf der Basis zwei Segmente, deren Sinus sich unter einander verhalten, wie die Sinus der beiden andern drüberstehenden Seiten.*

Regiomontanus hat ein Werk über praktische Arithmetik geschrieben, das er *Algorismus demonstratus* nennt. Dieses ist das Werk, welches Schoner unter dem Titel *Algorithmus demonstratus* drucken liess, indem er also das Wort *algorismus* in *algorithmus* umwandelte, weil er glaubte, dass das Werk des Regiomontanus, von dem er eine Abschrift gefunden hatte, von diesem Geometer *algorithmos* betitelt worden sein müsse, da dieses Wort, wie er sagt, von dem Griechischen ἀριθμὸς herkommt, das nur von den Sarazenen umgeändert wäre. Schoner wusste also nicht, dass das Wort *algorismus* schon seit mehren Jahrhunderten, wie man aus den Werken des Sacro Bosco, Vincent von Beauvais u. A. sieht, dazu bestimmt war, unser Zahlensystem zu bezeichnen[293]); und dass es also mit Absicht geschah, dass Regiomontanus es anwandte. Dieses Werk, welches wir schon

---

291) In dem ersten Bande seiner Sammlung, betitelt: *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae.* Norimbergae 1786, 2 Vol. in 8.

292) *Sed nunc eam eligi quam vobis arbitror familiarissimam, per artem videlicet rei et census quod quaerebatis absolvendo*, p. 94 im ersten Bande der angeführten Sammlung.

293) Die alte von Clichtoveus unter dem Titel, *Opusculum de praxi numerorum, quod algorismum vocant*, bekannt gemachte Piece und einige andre, die Manuscript geblieben sind (von denen zwei in der Bibliothek der Ste Genevieve, und eines, *französisch*, in der Bibliothek des Arsenals vorhanden sind), sagen, dass das Wort *algorismus* von dem Namen eines Philosophen *Algus* herkomme. Aber man findet keinen Beweis für diesen Ursprung.

mehrmals zu citiren Gelegenheit hatten, ist in Einer Hinsicht, wovon wir noch nicht gesprochen haben, merkwürdig: er wendet nämlich stets *Buchstaben* an, in Stelle der Zahlgrössen nach dem Gebrauche jener Zeit; und diese abstracten Zeichen, welche die Form der neuern mathematischen Wissenschaft ausmachen, werden selbst zur Erklärung des Zahlensystems und zum Beweise der Regeln aus der praktischen Arithmetik gebraucht. Wenn nicht ein zu frühzeitiger Tod den Regiomontanus in der ersten Periode seiner so glanzvollen Laufbahn dahingerafft hätte, so würden wir ihm vielleicht die grosse Entdeckung Vieta's zu danken haben.

In der vorhin angeführten Briefsammlung finden wir eine trigonometrische Lösung der Aufgabe, *aus vier gegebenen Seiten ein Viereck zu construiren, das einem Kreise eingeschrieben werden könne.* Wir haben, bei Gelegenheit der indischen Geometrie, eine historische Notiz über dieses Problem gegeben, mit dem sich mehre Geometer des 16ten Jahrhunderts beschäftigt haben.

Wir wollen nicht von den andern Werken des Regiomontanus sprechen, deren Zahl sehr beträchtlich ist, von denen aber, unglücklicher Weise, die meisten unedirt geblieben sind. Das Verzeichniss derselben findet sich in mehren Werken, von denen wir aber, als die vollständigsten, nur die *Historia matheseos* von Heilbronner und die *Historia astronomiae* von Weidler anführen.

Man wird beim Anblick dieses Verzeichnisses um so mehr erstaunen, da der Verfasser in einem Alter von 40 Jahren der Wissenschaft entrissen wurde und da er während seines kurzen Lebens hauptsächlich mit astronomischen Beobachtungen und Berechnungen beschäftigt war, da er ferner dreissig Jahre umfassende Ephemeriden berechnet hat, und zwar zu einer Zeit, wo dem Rechner noch die Unterstützung der Logarithmen fehlte, da er endlich ein gewandter Mechaniker war und eine Druckerei dirigirte: man wird erstaunen und es begreiflich finden, dass Ramus ihn zu demselben Range erhebt, welchen die grossen Genies der Griechen behaupten. [294])

Der Kardinal Nicolas von Cusa, dessen Werke zwar vielfache Fehlschlüsse enthalten, wodurch ihnen gegenwärtig aller Werth genommen ist, gehört dennoch zu denjenigen Männern, welche am meisten zu der Wiederherstellung der

---

294) *Norimberga tum Regiomontano fruebatur: mathematici inde et studii et operis gloriam tantam adepta, ut Tarentum Archyta, Syracusae Archimede, Bizantium Proclo, Alexandria Ctesibio, non justius quam Noriberga Regiomontano gloriari possit.* (*Scholae mathematicae*, lib. 2, p. 62.)

Wissenschaft beigetragen haben. Er erkannte ihren Werth an und verbreitete sie, indem er sie in allen seinen Schriften, selbst in denen, die sich auf Theologie bezogen, anzuwenden suchte. Er befolgte darin das Beispiel, welches anderthalb Jahrhunderte zuvor durch Bradwardin gegeben war.

Man citirt übrigens Nicolas von Cusa in Bezug auf die Quadratur des Zirkels, wo er die erste Idee gehabt hat, einen Kreis auf einer geraden Linie fortrollen zu lassen. Man hat in dieser Idee die ersten Spuren der Cycloide zu sehen geglaubt, und Wallis bemüht sich, den Ursprung dieser, im 17ten Jahrhundert so berühmt gewordenen Curve bis auf Nicolas von Cusa zurückzuführen; wobei er ihm vorwirft, dass er sie für einen Kreisbogen gehalten habe. Es scheint aber Nichts in dem Werke des Kardinals anzudeuten, dass er an die Betrachtung einer Curve gedacht habe, welche durch einen Punkt der Kreisperipherie, die sich auf einer Geraden bewegt, erzeugt wird; und der Kreisbogen, den er beschreibt, dient uns nur zur Bestimmung desjenigen Punkts in der Geraden, in welchen der Punkt, der am Anfang in der Geraden lag, nach einer vollen Umdrehung des Kreises, hinfallen muss. Es scheint uns glaublich, dass er durch mechanische Versuche die Principien seiner Construction gefunden habe.[295])

Der Kardinal von Cusa ist in der Geschichte dadurch berühmt geblieben, dass er die Principien der platonischen Philosophie angenommen, und vorzüglich weil er die Ehre hat, zuerst unter den Neuern das System des Pythagoras über die Bewegung der Erde um die Sonne wieder angeregt zu haben, welches seitdem mit mehr Erfolg durch Copernicus und Galiläi wiederholt ist.

Das 15te Jahrhundert liefert uns zwei berühmte Maler, Albrecht Dürer und Leonard da Vinci, welche auch zu den gelehrtesten Geometern ihrer Epoche gezählt werden müssen.

---

295) Die mathematischen Schriften des Nicolas von Cusa bilden den dritten Theil seiner sämmtlichen Werke, die 1514 zu Paris, in fol., und 1565 zu Basel, in fol., gedruckt sind. Sie bestehen aus folgenden Stücken: 1) *De geometricis transmutationibus*; 2) *De arithmeticis complementis*; 3) *De mathematicis complementis*; 4) *De quadratura circuli*; 5) *De sinibus et chordis*; 6) *De una recti curvique mensura*; 7) *Complementum theologicum figuratum in complementis mathematicis*; 8) *De mathematica perfectione*; 9) *Reparatio calendarii*; 10) *Correctio tabularum Alfonsi*; 11) *Alia quaedam ex Gaurico in Cusam adjecta.*

Der grösste Theil dieser Schriften bezieht sich auf die Quadratur des Kreises, welche Nicolas von Cusa beständig beschäftigt zu haben scheint. In dem Buch *De mathematicis complementis* spricht der Verfasser von den Kegelschnitten und lehrt sie in der Ebene beschreiben.

Der erstere hat ein Werk über Geometrie geschrieben, das für Architekten und Maler bestimmt war. Ursprünglich war es deutsch geschrieben und wurde später lateinisch unter folgendem Titel, der zugleich den Gegenstand des Werkes bezeichnet, herausgegeben: *Institutionum geometricarum libri quatuor, in quibus lineas, superficies et solida corpora ita tractavit, ut non matheseos solum studiosis, sed et pictoribus, fabris aerariis ac lignariis, lapicidis, statuariis, et universis demum qui circino, gnomone, libella, aut alioqui certa mensura opera sua examinant, sint summe utiles et necessarii.*

In dem ersten Buch lehrt Albrecht Dürer verschiedene krumme Linien beschreiben; man findet darin mehre ebene Schraubenlinien, die cylindrischen, sphärischen und conischen, die Beschreibung der Ellipse durch die Verlängerung der Ordinaten eines Kreises in einem constanten Verhältniss, oder auch indem man sie als den Schnitt eines geraden Kegels, den der Verfasser *Pyramide* nennt, betrachtet. Er lehrt auch die beiden andern Kegelschnitte, die Hyperbel und die Parabel beschreiben. — Dieses Werk ist eines der ältesten bei den Neuern, welche die Kegelschnitte behandelt haben.

Man findet auch in diesem ersten Buch die Beschreibung durch Punkte, der Epicycloide, welche durch einen Punkt in der Ebene eines Kreises beschrieben wird, der auf einer festen Peripherie fortrollt.

Im zweiten Buch findet man die Einbeschreibung der Polygone in den Kreis und verschiedene andre regelmässige Figuren, welche durch Kreisbögen gebildet werden; darauf eine Quadratur des Kreises und die Art verschiedene Polygone zusammenzufügen, um eine ebene Fläche vollständig auszufüllen; man findet aber nicht die sternförmigen Polygone darin. Nachdem er die Construction eines in den Kreis eingeschriebenen Fünfecks gegeben hat, die sich im ersten Buch des Almagest von Ptolemäus findet, lehrt Dürer ein regelmässiges Fünfeck über einer gegebenen Seite construiren; und diese Construction hat das Merkwürdige, dass sie sich mit einer einzigen Oeffnung des Zirkels ausführen lässt; aber sie ist nur approximatif, und die Figur, welche den Namen *Fünfeck des Dürer* beibehalten hat, hat nicht lauter gleiche Winkel [296]), so wie J. Bapt. de Benedictis [297]) und Cla-

---

296) Jeder von den Winkeln eines wirklich regelmässigen Fünfecks ist $= 108^0$. In dem Fünfeck des Albrecht Dürer sind zwei Winkel $= 107^\circ\ 2^1$, zwei andre $= 108^0\ 22^1$ und der fünfte $= 109^0\ 12^1$.

297) *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum Liber*; Turin 1585, in fol.

vius [298]) im folgenden Jahrhundert bewiesen haben. Wegen ihrer Leichtigkeit jedoch ist die Construction von Dürer von den meisten Architekten angewandt worden.

Das dritte Buch handelt von Körpern, von Säulen und Pyramiden von verschiedener Form, und von den Linien, welche man in den Künsten auf ihren Oberflächen zieht; von der Construction der Sonnenuhren und von der der Buchstaben des Alphabets.

Im fünften Buch giebt der Verfasser die Beschreibung der fünf regulären Körper und mehrer andern Körper, welche durch regelmässige Polygone, die aber nicht alle unter einander gleich sind, gebildet werden, wie die dreizehn halbregulären Körper des Archimedes. Sodann findet man mehre Auflösungen für die Verdoppelung des Würfels und endlich eine Abhandlung über die Perspective, worin Dürer das erste bekannte Instrument ausgedacht hat, die Perspective mechanisch auf Glas oder auf transparenter Leinwand zu bilden. Dieses ist übrigens die Partie, um derentwillen das Werk von Dürer in der Geschichte der Mathematik citirt wird.

Leonard da Vinci, einer der grössten Maler Italiens, gehörte zu den seltenen Genies, welche mit gleicher Leichtigkeit alle Gegenstände der menschlichen Kenntniss bearbeiten und deren Name sich in der Geschichte jeder von ihnen findet. Er cultivirte hauptsächlich die Mathematik und die Wissenschaften, welche davon abhängen, so wie die Physik, die rationelle und praktische Mechanik, die Hydrostatik, die Musik u. s. w., überzeugt, wie er sagt, *dass es keine Gewissheit in solchen Wissenschaften gebe, in denen man nicht irgend einen Theil der Mathematik anwenden kann, oder welche nicht auf irgend eine Weise davon abhängen.* Eine Wahrheit, die noch in unsern Tagen zu wenig gefühlt wird, ungeachtet der Fortschritte, welche der menschliche Verstand seit drei Jahrhunderten gemacht hat.

Leonard da Vinci hat zahlreiche Manuscripte hinterlassen, in denen sich seine neuen Ansichten und seine Speculationen über alle Theile der mathematischen Wissenschaft vertheilt finden; sie sind aber unglücklicher Weise noch nicht untersucht worden, und sind bis auf den heutigen Tag noch übrig geblieben, ohne irgend eine Frucht zu tragen. Venturi, der gelehrte Professor von Bologna, wollte die wichtigsten Partien daraus bekannt machen, und zwar in drei Abhandlungen, welche sich auf die Mechanik, die Hydraulik und die Optik beziehen sollten. Leider ist aber dieses Un-

298) *Geometria practica*, lib. VIII, prop. 29.

ternehmen ohne Ausführung geblieben. Man verdankt nur Venturi die Kenntniss einiger abgerissenen Fragmente der physikalisch-mathematischen Werke von Leonard da Vinci.[299] Aus dem ersten, betitelt: *De la descente des corps graves combinée avec la rotation de la terre*, sieht man, dass der berühmte Maler die Idee der Bewegung der Erde annimmt, welche schon einige Jahre zuvor von Nicolas von Cusa ausgesprochen war, dessen Werke aber noch nicht bekannt gemacht waren.

Wir wollen uns nicht weiter über die physikalisch-mathematischen Arbeiten des Leonard da Vinci ausbreiten. Es giebt aber eine Erfindung von ihm in der Mechanik, welche wir hier anführen müssen, da sie sich wesentlich auf die Geometrie bezieht und da wir sie als den ersten Keim einer Theorie betrachten, die seitdem wenig cultivirt ist und die nichts desto weniger die Aufmerksamkeit der Geometer verdient. Wir wollen von der ovalen Drehscheibe sprechen, welche Lomazzo, ein Schüler von Vinci, diesem mit folgenden Worten zuschreibt: *„Vinci war auch der Erfinder der ovalen Drehscheibe, ein bewunderungswürdiges Werk, welches ein Schüler des Melzi den Denis, Bruder des Maggiore, gelehrt, der sich heut zu Tage desselben mit vieler Geschicklichkeit bedient."* (Lomazzo, *Trattato della Pittura*, p. 17.)

Aber es scheint uns, dass die ovale Drehscheibe, auf welche die Geometer nur wenig Aufmerksamkeit gewandt haben, weil man dabei keine mathematische Theorie findet, auf einer durchaus neuen Idee beruht, die sich auf die Beschreibung der Curven bezieht; und dass diese Idee zu einer neuen Speculation in der Geometrie Veranlassung geben dürfte.

Bisher hat man die Curven nur dadurch beschrieben, dass ein beweglicher Stift dieselbe auf einer festen Ebene verzeichnete: Vinci fasste ihre Beschreibung in umgekehrter Weise auf, d. h. vermöge eines festen Stifts, der seinen Weg auf einer beweglichen Ebene verzeichnete. Dieses ist das, was die ovale Drehscheibe leistet, welche zur Beschreibung einer Ellipse dient.

Welche Bewegung muss man also einer beweglichen Ebene mittheilen, um eine Ellipse zu erhalten? Dieses ist die Frage, die sich Leonard da Vinci hat vorlegen müssen. Sie war, wie man sieht, von ganz neuer Art; und dieser be-

---

299) *Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Leonard da Vinci, avec fragmens tirés de ses manuscrits.* Paris, an V, in 4.

rühmte Maler hat unter den unendlich vielen Lösungen, deren sie fähig ist, die unbestritten einfachste aufzufinden gewusst; sie reducirt sich darauf, der beweglichen Ebene die Bewegung eines Winkels von constanter Grösse mitzutheilen, dessen beide Schenkel durch zwei feste Punkte gleiten. Für die Geschichte der Wissenschaft wäre es von Interesse, die geometrischen Betrachtungen zu kennen, welche zu diesem schönen Resultat geführt haben.

Ungeachtet des Interesses, welches diese Aufgabe, als neues und allgemeines Mittel der Curvenbeschreibung betrachtet, hätte haben müssen, nicht allein für die Künste, sondern auch als rein geometrische Speculation, so hat sie doch bis jetzt fast noch keinen Fortschritt gemacht. Wenn unsre historischen Forschungen über diesen Gegenstand uns nicht zu einem Irrthum verleiteten, so glauben wir, dass nur ein einziger Geometer, der berühmte Clairaut, darauf seine Aufmerksamkeit gewandt hat, der 1740 in der Academie der Wissenschaften ein Memoire hierüber vorlas. Nachdem er die neue Beschreibungsart der Curven, wozu die ovale Drehscheibe das einzige bekannte Beispiel lieferte, angedeutet hat, sagt Clairaut, dass er zuerst angenommen habe, die auf dieser Scheibe beschriebene Curve müsse eine Kreisconchoide sein, dass er aber bald erkannt habe, sie sei eine wirkliche Ellipse des Apollonius. Sodann macht er zwei Anwendungen von dieser neuen Erzeugungsart der Curven. Bei der ersten nimmt er an, dass der Kreis auf einer Geraden rollt, und bei der zweiten, dass der Kreis auf einem andern Kreise rollt. Ein fester Stift bezeichnet seinen Weg auf der Ebene des beweglichen Kreises, und dieser Weg bildet eine Curve, deren Gleichung Clairaut sucht. Seine Lösung ist durchaus analytisch, und die Gleichungen, auf die er kommt, enthalten selbst Integrationen, die noch nicht ausgeführt sind. In einem einzigen Fall verschwinden die Integrale, und man erkennt die Spirale des Archimedes.

In geometrischer Hinsicht hat Clairaut diese Aufgabe ganz unangetastet gelassen; d. h. die verschiedenen geometrischen Eigenschaften dieser Beschreibungsart der Curven, ihre Beziehungen zu der gewöhnlichen Beschreibung durch einen beweglichen Punkt und die Art, Eine Beschreibungsweise für die andre zu substituiren, um dieselbe Curve zu erzeugen, sind noch neue Fragen.

Diese Fragen scheinen uns, sowohl in theoretischer Hinsicht, als wegen ihrer Anwendungen auf die Künste, zu verdienen, dass sie in die Speculationen der Wissenschaft eingehen. Wir werden in einer andern Schrift darauf zurückkommen. Für den Augenblick verweisen wir auf Note

XXXIV, worin sich einige Entwickelungen über diese Theorie finden, die ein sehr merkwürdiges Beispiel der *Dualität* darbietet. Wir begnügen uns hier hinzuzufügen, dass aus dieser Theorie, ohne Rechnung, folgt, dass die Curven, für welche Clairaut sehr complicirte algebraische Ausdrücke gefunden hat, die ihn nur die Natur einer einzigen unter ihnen, die archimedische Spirale, erkennen lassen, ganz einfach Epicycloiden sind. Die Einen können durch einen beweglichen Punkt beschrieben werden, welcher fest mit einer geraden Linie verbunden ist, die auf einer Kreisperipherie fortrollt; und die Andern durch einen Punkt der Ebene eines Kreises, der auf einem festen Kreise fortrollt.

J. Verner war nicht ein Schriftsteller von so ausgebreitetem und fruchtbarem Geiste, als Leonard da Vinci und Regiomontanus, die beiden grössten Männer des 15ten Jahrhunderts, die wir genannt haben. Aber, als einfacher Geometer betrachtet, scheint er uns unmittelbar nach Regiomontanus gestellt werden zu müssen. Seine Werke sind nicht eine Nachahmung oder Reproduction griechischer Werke, wie es in der ersten Zeit der Ausbildung der Wissenschaft gewöhnlich war, sondern sie sind die Frucht der eignen Ideen des Autors und tragen neben dem Stempel der Originalität auch den einer ausgezeichneten und soliden Geometrie.

In einem Buch, das 1522 gedruckt ist, handelt Verner von den Kegelschnitten, von der Verdoppelung des Würfels und von dem Problem des Archimedes, eine Kugel durch eine Ebene in zwei Theile von gegebenem Verhältniss zu theilen. 300) Ein vierter Theil des Werkes ist der Astronomie gewidmet. 301) Wir haben schon in unsrer dritten Epoche von einem kleinen Werke über die Kegelschnitte gesprochen, welches ausser dem Vortheil, in Europa zuerst erschienen zu sein, auch noch den hat, auf einer Methode zu beruhen, die von der der Alten verschieden war. Verner betrachtet die Kegelschnitte am Kegel und bedient sich der Eigenschaften

300) Eutocius hat, in seinem Commentar über das zweite Buch der Kugel und Cylinder, die von Dionysidorus und Diocles gegebenen Auflösungen dieses Problems angeführt.

301) *Libellus super viginti duobus elementis conicis. — Commentarius, seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi ejus problematis quod cubi duplicatio dicitur. — Commentatio in Dionysidori problema, quo data sphaera plano sub data ratione secatur. Alius modus idem problema conficiendi ab eodem Vernero novissime compertus, demonstratusque. — De motu octavae sphaerae tractatus duo, ut et summaria enarratio theoricae motus octavae sphaerae.* Norimbergae 1522, in 4.

dieses Körpers, um daraus auf eine sehr leichte Art die dieser Curven abzuleiten. Eine rationelle Methode, die auch, 50 Jahre später, von Maurolicus angewandt wurde, und auf der hernach die Arbeiten von Desargues, Pascal und De La Hire beruhen.

Verner hat noch mehre andre Schriften verfasst, die aber nicht erschienen sind. Heilbronner giebt ihr Verzeichniss in seiner Geschichte der Mathematik (p. 515). Man findet darunter eine Abhandlung über die sphärischen Dreiecke, in fünf Büchern, und eine andre, über die Anwendung der Trigonometrie auf die Astronomie und Geographie; eine Abhandlung über Arithmetik und eine über Gnomonik, und ein Werk, betitelt *Tractatus resolutorius qui prope pedisequus existit libris Datorum Euclidis*, welches, nach diesem Titel, sich auf die geometrische Analyse der Alten zu beziehen scheint. Vielleicht war es, als Fortsetzung der *Data* des Euclides, eine Art von Porismen. (S. unsre Meinung über diesen Gegenstand in der Note III.) Wir wären sehr begierig, dieses Werk von Verner kennen zu lernen.

Es bleibt uns noch übrig, von Lucas Paccioli zu sprechen, der allgemein unter dem Namen Lucas de Burgo bekannt ist. Sein Hauptwerk gehört an das Ende des 15ten Jahrhunderts und kann als der Ursprung der italienischen Schule betrachtet werden, aus welcher Cardan und Tartalea hervorgingen, und die so mächtig dazu beigetragen hat, der Mathematik die neue Form zu geben, welche sie bei ihrer Wiedergeburt annahm und welche aus der Vereinigung der indischen Algebra mit der Geometrie der Griechen hervorging. Dieses Werk ist betitelt: *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita.* Es wurde zuerst 1494 durch Paganino de Paganinis von Brescia gedruckt und 1523 nochmals aufgelegt. Wir haben schon häufiger Gelegenheit gehabt, es zu citiren, und den Einfluss zu bemerken, den es auf die Erneuerung der Wissenschaft gehabt hat; wir wollen uns daher hier darauf beschränken, eine kurze Analyse von demselben zu geben, und auch dieses würden wir unterlassen, wenn das Werk weniger selten und mehr bekannt wäre.

Es zerfällt in zwei Haupttheile; der eine, der sich auf die Wissenschaft des Calculs bezieht, umfasst die Arithmetik und Algebra, und der andre handelt von der Geometrie. Die Werke, von denen der Verfasser anführt, dass er dieselben bei der Abfassung des seinigen benutzt habe, sind die von Euclid, Boëtius, Leonard von Pisa, Giordano Biagio von Parma, Sacro Bosco und Prosdocimo von Padua.

Der erste Theil ist eine vollständige Abhandlung über die speculative Arithmetik, welche die Eigenschaften der Zahlen betrachtet, und über die praktische Arithmetik.

Die speculative Arithmetik ist in der Weise der Werke des Nicomachus, Theon, Boëtius und Jordan Nemorarius. Sie wird aber von einem Abschnitt über die Quadratzahlen beschlossen, der sich nicht in diesen Werken findet und der höchst merkwürdig ist. Es ist eine Reihe von Aufgaben, die heut zu Tage zu der unbestimmten Analytik des zweiten Grades gehören. Lucas de Burgo giebt von ihnen die Lösung, aber ohne Beweis; er entlehnt sie, wie er sagt, aus dem Werk über Quadratzahlen von Leonard von Pisa, worin sie *durch geometrische Betrachtungen und an Figuren* bewiesen sind. Diese Auflösungen, besonders die, welche sich auf die Gleichung $x^2 + y^2 = A$ bezieht, sind von denen des Diophantus verschieden und sind dieselben, als die, welche man in den indischen Werken findet und welche im letzten Jahrhundert von Euler erdacht sind, wie wir schon bei Gelegenheit der Geometrie des Brahmegupta gesagt haben.

Die praktische Arithmetik fängt mit der Auseinandersetzung des Zahlensystems an, „von dem", sagt Lucas de Burgo, „nach Einigen die Araber die ersten Erfinder sind, weshalb auch diese Kunst *abaco* genannt wird, um *el muodo arabico* auszudrücken; Andre aber", fügt er hinzu, „leiten dieses Wort aus dem Griechischen ab."[302]) Man findet darin die vier Fundamental-Operationen der Arithmetik [303]), die

302) Diese Stelle zeigt uns, dass man seit der Zeit des Lucas de Burgo über den Ursprung unsres Zahlensystems nicht sicher gewesen ist. Die Bedeutung, welche wir dem von Boëtius gebrauchten Wort *abacus* beigelegt haben, berechtigt uns, die zweite Vermuthung des Lucas de Burgo anzunehmen, d. h. das Wort *abaco* als aus dem Griechischen abgeleitet zu betrachten. Dem sei aber wie ihm wolle, diese Stelle verdient bei den Untersuchungen über den Ursprung unsres Zahlensystems in Betracht gezogen zu werden.

303) Der Verfasser giebt für jede Operation verschiedene Verfahrungsarten an. Unter denen der Multiplication findet sich eine indische Methode, die Ganesa in seinem Commentar zum Lilavati des Bhascara gegeben hat und die darin besteht, dass man, von dem Produkt jeder Ziffer des Multiplicandus in jede Ziffer des Multiplicators, die Ziffern der Einer und der Zehner abgesondert in die beiden dreieckigen Felder eines Quadrats schreibt. Diese geistreiche Methode, auf welcher die der *Neper'schen Stäbe* beruht, scheint im Mittelalter und im 16ten Jahrhundert gebräuchlich gewesen zu sein; denn man findet sie in mehren Manuscripten (s. die Nr. 7378 A. und 7352 der Manuscripte in der königlichen Bibliothek zu Paris) und in mehren gedruckten Werken, von denen wir das *Compendion de lo abaco* von Pellos, die *Arithmetica practica* von Orontius Finaeus,

Theorie der Progressionen und die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, arithmetisch und geometrisch; sodann die Rechnung mit Brüchen; die Regula de tri; die Regula falsi, welche der Verfasser, nach Leonard von Pisa, Regel des Helcataym nennt und die er den Arabern zuschreibt, denen sie aber von den Indern zugekommen ist; und die commerzielle Arithmetik, welche mit einer grossen Zahl von Aufgaben und Beispielen behandelt ist. Dieser Theil des Werks ist von vielen deutschen Schriftstellern, in der ersten Zeit des 16ten Jahrhunderts, nachgeahmt worden.

Indem Lucas de Burgo zur Algebra übergeht (***Distinctio octava***), betrachtet er sie als denjenigen Theil der Wissenschaft des Calculs, der für die Arithmetik und für die Geometrie am nothwendigsten ist. Er sagt, dass man sie meistentheils ***Arte maggiore*** oder Regel der ***Cosa*** oder ***Algebra e Almucabala*** nennt. Da dieses Werk das erste über Algebra ist, das gedruckt worden, und das man gewöhnlich als dasjenige betrachtet, welches die Geometer in diese Wissenschaft eingeführt hat, so ist es wesentlich zu bemerken, dass Lucas de Burgo die Algebra nicht als eine neue Kunst darstellt, sondern vielmehr als eine schon seit langer Zeit ganz allgemein (*del vulgo*) bekannte Sache. Dieses stimmt mit der Bemerkung überein, welche wir gemacht haben, als wir von dem Werk des Regiomontanus Rechenschaft gaben, der auch von der Algebra als von einer bei den Geometern ganz gebräuchlichen Methode spricht. Man kann daraus schliessen, dass seit dem 13ten Jahrhundert, wo die Algebra durch Fibonacci [304]) und durch die damals veranstalteten Uebersetzungen des Werks von Mohammed ben Musa in Europa eingeführt wurde, diese Wissenschaft ununterbrochen cultivirt worden ist.

---

die *Arithmetica practica* von Peverone und die *Scholae mathematicae* von Ramus anführen. Libri hat sie auch in einem chinesischen Werke gefunden. (*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, p. 341.)

304) Wir sind mit der angenommenen Meinung einverstanden, indem wir wiederholen, dass Fibonacci zu Anfang des 13ten Jahrhunderts zuerst die Algebra in Europa einführte; wir glauben jedoch, dass man schon wenigstens seit einem Jahrhundert einige Kenntniss von dieser Wissenschaft hatte; und wir gründen diese Meinung auf die früher angeführte Thatsache, dass im 13ten Jahrhundert Johannes Hispalensis unter dem Titel *Algorismus* ein Werk über Arithmetik geschrieben hat, welchem sich beigefügt findet die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades, ausgezogen, wie er sagt, aus dem Buche *De Gebra et Mucabala*.

Lucas de Burgo beweist zuerst die Regel von den Zeichen, er lehrt die arithmetischen Operationen bei irrationalen Grössen und beweist den grössten Theil der Sätze aus dem 10ten Buch der Elemente Euclid's, welches eine ausgedehnte Theorie dieser Quantitäten enthält. Sodann geht er zu den Gleichungen des zweiten Grades über, bei denen er drei Fälle unterscheidet, so wie wir bei Gelegenheit der Algebra des Mohammed ben Musa bemerkt haben. Er sagt, dass mehre andre Gleichungen von höherm Grade auf diese zurückgeführt werden können. Er betrachtet Gleichungen, welche die unbekannte Grösse, ihr Quadrat und ihre vierte Potenz enthalten, wobei er acht Fälle unterscheidet, die sich, mit den gegenwärtigen Symbolen, auf folgende Art ausdrücken lassen:

$$x^4 = a, \qquad x^4 + ax = bx^2,$$
$$x^4 = ax, \qquad x^4 + a = bx^2,$$
$$x^4 = ax^2, \qquad x^4 + ax^2 = b,$$
$$x^4 + ax^2 = bx, \qquad x^4 = a + bx^2. \quad \text{305)}$$

Er lehrt die drei ersten und die drei letzten auflösen; die vierte und fünfte aber, sagt er, sind *unmöglich*. In der That lassen sie sich nicht auf den zweiten Grad reduciren, sondern nur auf den dritten. Dieses beweist, dass zur Zeit des Lucas de Burgo die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grad noch unbekannt war.

Diesen ersten Theil des Werks (Arithmetik und Algebra) beschliessen die Regel der Gesellschaftsrechnung und eine Menge von Aufgaben, die sich auf Handelsoperationen und selbst auf die doppelte Buchhalterei beziehen.

An vielen Stellen wendet Lucas de Burgo geometrische Betrachtungen an, um seine Regeln des Calculs zu erläutern; er beweist auf diese Weise die Regula falsi, die Regel wegen der Zeichen in der Algebra, und die Formeln zur Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grad. Umgekehrt sehen wir im zweiten Theil des Werks, der von der Geometrie handelt, dass Lucas de Burgo vielfältig die Algebra gebraucht.

---

305) Lucas de Burgo spricht seine Gleichungen in gewöhnlicher Sprache aus; nur zur Abkürzung bedient er sich der Buchstaben *p* und *m*, um *plus* (*piu*) und *minus* (*meno*) zu bezeichnen. Er gebraucht das Wort *egal*, aber nicht das Zeichen =. Er nennt die Unbekannte *cosa*, ihr Quadrat *censo*, und ihre vierte Potenz *censo de censo*; die bekannte Grösse nennt er *il numero*, so dass er z. B. die letzte Gleichung so ausspricht: *censo de censo equale a numero e censo.*

Diese Abhandlung umfasst ziemlich vollständig die Elemente der Geometrie. Sie beruht zum Theil auf den Elementen Euclid's; da si sich jedoch in vieler Hinsicht hiervon unterscheidet, so wollen wir ihre Analyse geben. Der Verfasser theilt sie in acht Theile, aus Rücksicht, wie er sagt, auf die acht Seligkeiten (*a reverentia de le* 8 *beatitudine*).

In dem ersten, welcher von den dreiseitigen und vierseitigen Figuren handelt, findet man den grössten Theil der Sätze, die den Gegenstand des 1sten, 2ten und 6ten Buchs bei Euclid ausmachen. Der Verfasser beweist, nach Art der Inder, dass die Fläche des Dreiecks dem Produkt aus der Grundlinie und der halben Höhe gleich ist; er beweist die Formel für die Fläche, als Function der drei Seiten, so wie Fibonacci und die drei arabischen Brüder, Mohammed, Hamet und Hasen, in ihrem Werk *Verba filiorum Moisi filii Schaker.* Er lehrt das Perpendikel in einem Dreieck berechnen und bedient sich dabei des Theorems von den beiden Segmenten, welche dasselbe auf der Basis bildet. Er giebt von diesem Theorem einen sehr merkwürdigen geometrischen Beweis. Es handelt sich darum, nachzuweisen, dass die Differenz der Quadrate über den beiden Seiten des Dreiecks gleich ist der Differenz der Quadrate über den Segmenten, welche das Perpendikel auf der Basis bildet; oder auch, dass die Summe der beiden Seiten, multiplicirt mit ihrer Differenz, gleich ist der Basis, multiplicirt mit der Differenz ihrer Segmente. Lucas de Burgo construirt eine Figur, in welcher sich die geometrischen Ausdrücke der vier Factoren finden, welche diese Gleichheit bilden; und aus der Vergleichung zweier ähnlichen Dreiecke schliesst er, dass das erste Produkt gleich dem zweiten ist. Dieser Beweis ist sehr elegant und elementar, weil er nur den Satz von dem Quadrat der Hypotenuse anwendet. Er ist von Tartalea in seinem *General Trattato di Numeri e Misure* (4ter Th., fol. 8) reproducirt.

In dem zweiten Theil wird folgendes Problem auf mehre Arten aufgelöst: Wenn die drei Seiten eines Dreiecks gegeben sind und wenn man auf zweien derselben zwei Punkte annimmt, die Länge der geraden Linie zu finden, welche diese beiden Punkte verbindet.

Der dritte Theil behandelt die Fläche des Vierecks und andrer Polygone; es werden darin mehre Aufgaben über das Rechteck auf algebraischem Wege aufgelöst, indem sich Lucas de Burgo der Formeln bedient, welche er zuvor für die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades gegeben hat.

Der vierte Theil enthält die Sätze, die im dritten Buch des Euclid vorkommen, und die Ausmessung des Kreises. Der Verfasser beweist das Verhältniss $\frac{22}{7}$, so wie Archimedes, durch die Einbeschreibung des Polygons von 96 Seiten; und lehrt die Chordentafel bilden, welche von Ptolemäus im ersten Buch des Almagest gegeben ist.

Der fünfte Theil behandelt die Theilung der Figuren nach gegebenem Verhältniss. Es ist dieses derjenige Theil der Geometrie, welcher den Gegenstand in dem Werke ***De superficierum divisionibus*** von Mahomet Bagdadin bildet, das man als eine Nachahmung eines Werks von Euclid oder als das Eigenthum dieses Geometers selbst betrachtet. Lucas de Burgo vervollständigt diese Materie, indem er auch die Theilung des Kreises nach gegebenen Bedingungen behandelt.

Der sechste Theil bezieht sich auf die Volumina der Körper und enthält die Sätze aus dem 11ten Buche Euclid's.

Der siebente Theil handelt von verschiedenen Instrumenten, welche in der Praxis dazu dienen, bei dem blossen Anblick die Dimensionen der Körper zu messen.

Der achte Theil endlich ist eine Sammlung von hundert Aufgaben aus der Geometrie, die meistentheils durch die Algebra gelöst sind, begleitet von einer Abhandlung über die fünf regulären Körper.

Einige von den Aufgaben, die zu diesen hundert Problemen gehören, sind folgende:

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks und seine Fläche gegeben sind, die dritte Seite zu finden.

Wenn die Fläche und die Differenz zweier Seiten eines Rechtecks gegeben sind, dessen Seiten zu finden.

Es sei a^2 die Fläche und d die Differenz der beiden Seiten, so nimmt Lucas de Burgo für die grössere Seite *cosa piu* $\frac{d}{2}$ d. h. $x + \frac{d}{2}$, und für die zweite *cosa meno* $\frac{d}{2}$ oder $x - \frac{d}{2}$ an. Dann hat man unmittelbar zur Bestimmung der Unbekannten die Gleichung:

$$x^2 - \frac{d^2}{4} = a^2, \quad \text{also } x = \sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2},$$

woraus sich die Werthe für die beiden Seiten ergeben.

Diese Auflösung ist einfacher, als wenn man direct als Unbekannte die beiden Seiten annimmt, was zu folgenden zwei Gleichungen führt:

$$yz=a^2,\ y-z=d,$$

und zu der Endgleichung des zweiten Grades:

$$y^2-dy=a^2.$$

In dem ersten Theil seines Werks hat Lucas de Burgo andre Beispiele von ähnlichen Kunstgriffen der Rechnung gegeben, welche zeigen, dass in gewissen Grenzen die Algebra schon seit langer Zeit ausgebildet und vervollkommnet war. Wenn man z. B. zwei Zahlen verlangt, für welche die Summe ihrer Quadrate gleich 20 und ihr Produkt gleich 8 ist, so wählt Lucas de Burgo nicht die beiden Gleichungen $x^2+y^2=20$ und $xy=8$, welche auf eine Gleichung des vierten Grades führen, die sich auf den zweiten reducirt, sondern er macht es besser: er nimmt die Summe der beiden Unbekannten $(x+z)$ zur ersten gesuchten Zahl und ihre Differenz $(x-z)$ zur zweiten [306]; so dass man unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$x^2+z^2=10 \text{ und } x^2-z^2=8$$

erhält, woraus sich ergiebt:

$$x^2=9 \text{ und } z^2=1;\ x=3,\ z=1.$$

Die Zahlen sind also 4 und 2.

Diese Auflösung ist wegen ihrer Eleganz und Einfachheit denen ähnlich, welche wir in den indischen Werken bemerkt haben.

Den Durchmesser eines Kreises zu finden, welcher einem Dreieck eingeschrieben ist, wenn von diesem die Seiten bekannt sind.

In ein Dreieck zwei gleiche Kreise einzuschreiben, die sich unter einander und jeder zwei Seiten berühren.

In einen gegebenen Kreis 3, oder 4, oder 5, oder 6 andre unter sich gleiche Kreise einzuschreiben, die alle den gegebenen Kreis berühren, und ausserdem so liegen, dass der erste den zweiten, der zweite den dritten, der dritte den folgenden u. s. w. berührt.

---

306) Lucas de Burgo nennt die erste Unbekannte *cosa* und die zweite *quantita*. Er sagt, die Alten nannten diese *cosa seconda*, aber die Neuern nennen sie einfach *quantita*. (*Distinctio octava*; *tractatus sextus*.)

Den Durchmesser eines Kreises zu finden, der einem Dreieck umgeschrieben ist, wenn von diesem die Seiten gegeben sind.

Wenn die Fläche eines Dreiecks gegeben ist, von dem man weiss, dass die zweite Seite die erste um eine Einheit und die dritte Seite die zweite ebenfalls um eine Einheit übertrifft, die Seiten des Dreiecks zu finden.

Wenn die Fläche des Dreiecks 84 ist, so bestimmt Lucas de Burgo seine Seiten durch eine Gleichung des vierten Grades, die sich wie eine quadratische lösen lässt; er findet als Seiten die Zahlen 13, 14 und 15.

Wenn man in den Scheiteln eines Dreiecks drei Perpendikel auf seiner Ebene errichtet, so verlangt man in dieser Ebene den Punkt zu bestimmen, der gleich weit von den Endpunkten der drei Perpendikel entfernt ist.

Wenn ein Dreieck gegeben ist, so verlangt man den Durchmesser des Kreises, der zwei Seiten berührt und dessen Mittelpunkt in der Grundlinie liegt.

In allen diesen Aufgaben sind die Data Zahlen und ihre Lösungen sind algebraisch, indem sie meistens von Gleichungen des zweiten Grades abhängen.

Eben so sind in den ersten Theilen des Werks, welche die Elemente der Geometrie bilden, die Figuren immer durch Zahlen ausgedrückt, als wenn es sich um eine besondre Anwendung eines Theorems handelte. Um z. B. die Formel zu beweisen, welche die Fläche des Dreiecks als Function der drei Seiten giebt, nimmt der Verfasser das Dreieck *ABC*, dessen Seiten 13, 14 und 15 sind, und bedient sich immer im Verlauf seines Raisonnements dieser Zahlen in Stelle der Seiten, welche die Griechen auf eine abstracte Weise anwenden, indem diese sie *AB*, *BC*, *CA* bezeichnen. Diese Methode war von den Arabern entlehnt, welche sie von den Indern erhielten; sie wurde ausschliesslich von allen Geometern des 16ten Jahrhunderts befolgt; von Cardan, Stifels, Tartalea, J. B. Benedictis, Memmius, Commandin, Clavius, Stevin, Ad. Romanus, Ludolph van Ceulen u. s. w., bis Vieta den Gebrauch der Buchstaben in die Algebra einführte. Wir werden weiterhin den Grund zu dieser Verfahrungsart, die Vortheile, die sie darbietet, und die bedeutenden Nachtheile, die daraus entstehen, anführen.

Lucas de Burgo hat noch zwei andre Werke hinterlassen, die auch angeführt zu werden verdienen, die aber nicht dieselbe Wichtigkeit haben, als das, wovon wir so eben den Inhalt angegeben haben. Das erste ist betitelt: *Lucae Pa-*

cioli divina proportione, opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria: ove ciacun studioso di philosophia, prospettiva, pictura, sculptura, architectura, musica e altre matematiche, soavissima, sottile e admirabile dottrina consequira e delectarassi con varie questione di secretissima scientia. Venetiis 1509, in 4. Der Verfasser nennt *proportio divina* die Theilung einer Geraden in das mittlere und äussere Verhältniss, von der er viele Eigenschaften nachweist und verschiedene Anwendungen auf die Künste macht. Das andre Werk von Lucas de Burgo bezieht sich auf die regelmässigen Polygone und Polyëder und auf die wechselseitige Einbeschreibung der einen in die andern; es hat zum Titel: *Libellus in tres partiales tractatus divisus quorumcunque corporum regularium et dependentium active perscrutationis*; Venedig 1508, in 4. Der Verfasser macht in diesen beiden Werken über Geometrie noch häufigen Gebrauch von der Algebra.

Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass die Werke des Lucas de Burgo, verglichen mit denen der griechischen Geometer, einen eigenthümlichen Charakter darbieten, der sie wesentlich von diesen unterscheidet: dass sie nämlich auf einer beständigen Vereinigung der Algebra mit der Geometrie beruhen. Und dieser Charakter ist beinahe allen mathematischen Schriften des 16ten Jahrhunderts eigen. Da die Werke des Lucas de Burgo die ersten gedruckten unter denjenigen sind, welche die Vorschriften der Algebra und ihre Anwendung auf die Geometrie gelehrt haben, so hat man sie allgemein als den alleinigen Ursprung der neuen Form der mathematischen Wissenschaft im Anfang des 16ten Jahrhunderts und deren immensen Fortschritte seitdem betrachtet. Es ist in der That nicht zweifelhaft, dass die beiden italienischen Geometer Cardan und Tartalea ihre Kenntnisse und die Methode der *Summa de Arithmetica* etc. von Lucas de Burgo, den sie oft citiren, zu verdanken haben. Aber man hat Grund zu glauben, dass, zumal in Deutschland, einige andre Werke einen andern Brennpunkt bildeten und dieselben Principien der Algebra und der Anwendung der Algebra auf die Geometrie verbreitet haben. Man schliesst darauf aus dem gelehrten Werk von Stifels, dass 1544 unter dem Titel *Arithmetica integra* (Nürnberg, in 4.) erschienen ist, worin sich die Elemente der Algebra und eine Menge auf diesem Wege aufgelöste Aufgaben der Geometrie finden, so wie in der *Summa* des Lucas de Burgo. Und dies Werk von Stifels bietet einen solchen Unterschied von diesem dar, dass man darin eine tiefere Kenntniss und eine ältere Ausbildung der algebraischen Wissenschaft, so wie auch einige Annähe-

rung an die abstracte Form, die sie seitdem angenommen hat, erkennt. Man findet z. B. die Zeichen + und — und das Wurzelzeichen √ darin; die Unbekannte und ihre Potenzen sind auch durch Symbole, statt durch die Worte *cosa, censo, cubo, censo de censo* etc. ausgedrückt; wenn mehre Unbekannte sind, so werden die zweite, dritte, vierte u. s. w. durch die Buchstaben *A, B, C* etc. dargestellt [307]); das Princip der Mehrheit der Wurzeln einer Gleichung, welches Lucas de Burgo verkannt hat, ist förmlich ausgedrückt und bewiesen [308]); und was die belehrende Anwendung der Algebra auf die Geometrie betrifft, so sind die Beispiele, welche Stifels davon giebt, ausserordentlich zahlreich: man bemerkt darin besonders alle Sätze aus dem 13ten Buch des Euclid, welche sich sehr leicht durch die Gleichungen des zweiten Grades behandeln lassen. Dieses Werk ist freilich beinahe um ein halbes Jahrhundert später, als das des Lucas de Burgo, und man könnte glauben, dass die von uns angedeuteten Unterschiede die Frucht von der Ausbildung, während dieses halben Jahrhunderts, der von Lucas de Burgo selbst gegebenen Principien wären. Aber dieses Werk von Stifels ist in Allem, was sich auf diesen algebraischen Theil bezieht, nur eine Nachahmung der Werke zweier andern deutschen Algebraisten, Adam Risen und Christoph Rudolff, welche er oft und besonders den zweiten mit dem grössten Lobe citirt. Man hatte schon von diesem letztern ein deutsches Werk über Algebra, gedruckt 1522 unter dem Titel *Die Coss*, von dem in Italien eine lateinische Uebersetzung veranstaltet wurde, die noch unter den Manuscripten der königl. Bibliothek vorhanden ist (Nr. 7365, in 4, unter den latein. Manuscripten), unter dem Titel: *Arithmetica Christophori Rodolphi ab Jamer, e germanica lingua in latinam a Christophoro*

307) S. lib. III, cap. 6, betitelt *De secundis radicibus*.

Es ist das erste Beispiel von dem Gebrauch der *Buchstaben*, um in den Gleichungen die Unbekannten der Aufgabe darzustellen. Es wurde von Peletier in seiner *Algèbre* (1554) und von Buteon in seiner *Logistica* (1559) befolgt. Es ist höchst eigenthümlich, dass eine so glückliche Idee, welche in die Rechnung eine wirklich so evidente Leichtigkeit brachte, nicht von Cardan und Tartalea erfasst ist. Es ist dieses einer der auffallendsten Beweise für die Macht der Gewohnheit, selbst bei den erhabensten Geistern.

308) *Sunt autem aequationes quaedam, quibus natura rerum hujus modi dedit habere duplicem radicem, videlicet majorem et minorem: id quod plane docebo atque demonstrabo.* (*Arithmetica integra*, fol. 243.) Späterhin fügt der Verfasser hinzu, dass die Gleichung nicht mehr als zwei Wurzeln haben könne: *plures autem duabus nulla aequatio habebit.* fol. 244.

Auvero, Petri Danesii mandato, Romae anno Christi 1540 *conversa.*

Wir haben in diesem Werk die merkwürdigen Fortschritte der Algebra und ihre Anwendungen auf die Geometrie erkannt, die wir in dem Werke Stifels angeführt haben. Man findet noch in einigen kleinen Behandlungen der Arithmetik, welche in den ersten Jahren des 16ten Jahrhunderts in Deutschland erschienen sind, Beispiele von der Anwendung der Regeln des Calculs auf Aufgaben der Geometrie; so wird in einem *Algorithmus de integris et minutiis* (Leipz. 1507) die Regula falsi auf diese Aufgabe angewandt: Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck der eine Schenkel des rechten Winkels und die Summe der beiden andern Seiten gegeben sind, diese Seiten zu finden. Wir erinnern endlich, dass seit dem 15ten Jahrhundert Regiomontanus und der Astronom Blanchinus in der Praxis der algebraischen Regeln sehr bewandert waren und dass der erstere in seinem Werk *De triangulis* davon Gebrauch gemacht hat, um Aufgaben der Geometrie zu lösen.

Wir glauben also mit Bestimmtheit sagen zu können, dass die Algebra seit den ersten Zeiten der Erneuerung der Wissenschaft in Europa ausgebildet und besonders auf die Aufgaben der Geometrie angewandt ist, und dass der Charakter der Mathematik im 16ten Jahrhundert, der aus dieser innigen Vereinigung der Algebra mit der Geometrie entspringt, sich sogar vor dem Erscheinen des Werks von Lucas de Burgo herausstellt, dass aber dieses, weil es zuerst auf dem Wege des Drucks bekannt wurde, sich am meisten verbreitete und den grössten Einfluss auf die Fortschritte der Mathematik und auf die Richtung, die sie einschlug, gehabt hat.

Die Grenzen dieser unsrer Schrift, welche wir schon weit überschritten haben, gestatten uns nicht, eine Analyse von den Werken des Cardan, Tartalea, J. B. Benedictis [309]) und

---

309) J. B. Benedictis wendet in seinem Werk: *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*; Taurini 1585, in fol., beständig geometrische Betrachtungen an, um Regeln der Arithmetik und Algebra zu beweisen oder zu verificiren. Ein vortreffliches Beispiel dieser Methode ist folgendes. Der Verfasser stellt sich eine Aufgabe mit drei unbekannten Grössen vor, die sich durch die drei Gleichungen $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$ darstellen lässt. Er löst sie algebraisch, und um die Ausdrücke, welche er für die Unbekannten gefunden hat, zu verificiren, stellt er diese geometrische Betrachtung an: *Man bilde ein Dreieck, dessen Seiten die drei Zahlen* a, b *und* c *sind, und beschreibe darin einen Kreis, der die drei Seiten tangirt, so werden die Segmente, welche durch*

einiger andern Geometer des 16ten Jahrhunderts zu geben, bei denen wir gerne den Weg dieser Wissenschaft, der sich damals so sehr durch seine Form von dem der Griechen unterschied, aufgesucht und verfolgt und die Fortschritte bestimmt hätten, bis zu den Arbeiten des Vieta herab, welcher eine neue, ausserordentlich glückliche Transformation mit ihr vornahm, die nothwendig war, um der Geometrie in ihrer ganzen Ausdehnung die Unterstützung zu sichern, welche ihr die Wissenschaft des Calculs gewähren konnte.

---

die Berührungspunkte auf den Seiten gebildet werden, die Werthe der drei Unbekannten x, y, z *sein*; woraus man unmittelbar schliesst, dass die Werthe dieser Unbekannten sind: $x=\frac{a+c-b}{2}$ u. s. w., wie sie die Rechnung gegeben hat. (S. p. 82.)

Benedictis construirt geometrisch, wie man es gegenwärtig thut, die positive Wurzel der Gleichung $x^2+ax=b^2$. Es ist wahr, dass er sich nicht gerade diese Gleichung vorlegt, sondern dass er unmittelbar die Aufgabe ausdrückt, welche jene auflöst und welche diese ist: *Wenn zwei Linien* a *und* b *gegeben sind, so verlangt man daraus eine solche dritte* x *zu finden, dass man hat* $(x+a)x=b^2$. (S. p. 368.) Dieses ist vielleicht das erste Beispiel für die geometrische Construction einer Gleichung des zweiten Grades. Denn die Probleme, welche Euclid gelöst hat (*Prop.* 28 u. 29 im sechsten Buch der Elemente und 84, 85, 86 und 87 der *Data*), obwohl sie, in die Algebra übersetzt, endlich auf eine Gleichung des zweiten Grades führen, unterscheiden sich doch, durch ihre geometrische Aussprache, wesentlich von einer algebraischen Aufgabe.

Die Werke von Cardan und Tartalea, die unendlich höher stehen, als das von J. B. Benedictis, machen auch beständig von der Algebra in der Geometrie und von der Geometrie in der Algebra Gebrauch. Die Principien einer innigen Vereinigung dieser beiden Wissenschaften sind zu förmlich ausgesprochen und die Beispiele davon sind zu zahlreich, als dass wir noch nöthig hätten bei diesem Gegenstand länger zu verweilen.

Ausser dem algebraischen Theil der Werke von Tartalea, welcher der sechste Theil seines Werks *Tractatus generalis de numeris et mensuris* ist, hat dieser Geometer noch ein andres Werk über Algebra unter dem Titel *Algebra nova* verfasst, welches nicht erschienen, dessen Verlust aber sehr zu bedauern ist. In dem fünften Theil seines *Tractatus generalis* (fol. 88) giebt Tartalea die Lösung einer Aufgabe über das *maximum*, deren Beweis sich in diesem Werk über Algebra finden musste. Diese Aufgabe ist für jene Zeit merkwürdig: es soll die Zahl 8 in zwei solche Theile zerlegt werden, dass ihr Produkt, multiplicirt durch ihre Differenz, ein *maximum* ist. Die Lösung von Tartalea ist ganz allgemein und dieselbe, welche die Regeln der gegenwärtigen Infinitesimalrechnung geben. *Man nehme*, sagt er, *das Quadrat von* 8, *füge dazu den dritten Theil dieses Quadrats und ziehe die Quadratwurzel aus dieser Summe, so wird diese die Differenz der beiden gesuchten Zahlen sein.* Die Wahl der Unbekannten, die Differenz der beiden Theile der gegebenen Zahl, ist sehr glücklich und zeigt von einer tiefen Kenntniss der Wissenschaft.

Wir müssen aber diese neue Form, welche die Geometrie angenommen hat, genau anführen, da diese gerade den ungeheuern Unterschied ausmacht, der zwischen den Werken des 17ten und denen des 16ten Jahrhunderts stattfindet und woraus die bedeutenden Fortschritte entsprangen, welche die Wissenschaft seitdem gemacht hat.

Die Geometrie im Laufe des 16ten Jahrhunderts unterscheidet sich in Einer Hinsicht wesentlich von der der Griechen, nämlich darin, dass sie nur mit numerischen Datis operirt, so wie wir schon bei unsrer Analyse der Werke des Lucas de Burgo gesagt haben. Es war dieses eine natürliche Folge von der innigen Vereinigung dieser Wissenschaft mit der Algebra, eine Vereinigung, die nur bei numerischen Datis möglich war; denn die Algebra war damals nur eine höhere, ausschliesslich numerische Arithmetik, welche sich von der gewöhnlichen Arithmetik wesentlich nur durch den Gebrauch der Regel von den Zeichen und durch den Mechanismus der Gleichungen unterschied; sie war nicht eine Wissenschaft der abstracten Symbole, wie Vieta sie unter dem Namen *Logistica speciosa* darstellt. Die Operationen und die Kunstgriffe des Calculs, welche die Beweise vereinfachten und welche die von allen griechischen Geometern ausschliesslich gebrauchten geometrischen Betrachtungen ersetzten, waren also im 16ten Jahrhundert nur möglich, wenn die Geometrie an numerischen Beispielen gebildet wurde. Dieses ist bis auf Vieta geschehen, wie man es in allen Werken dieser Periode sieht, die für die Geschichte der Wissenschaft eine der merkwürdigsten ist. Man sieht aber, dass auf diese Weise die Geometrie die Reinheit der Form, so wie auch den Charakter der Allgemeinheit und Abstraction verloren hat, an die sich die Alten anschlossen und welche dieser Wissenschaft anzugehören schienen. Und wenn dieses in einer Hinsicht reelle Vortheile hatte, so hatte es auch in andrer Hinsicht sehr üble Folgen, da einer Seits der Geist, der mit Zahlen operirte, die Objecte, welche sie darstellten, aus den Augen verlor, und weil man andrer Seits bei der Ausführung der Rechnung den Gang und den Faden des Raisonnements verlor. Auch sind die geometrischen Beweise in den Werken des 16ten Jahrhunderts sehr schwierig zu lesen.

Die Geometrie der Griechen erlitt also eine wirkliche Verschlechterung, aber eine sehr glückliche Verschlechterung, weil sie Vieta in diesem Zustand erhalten musste, um seine grosse Idee der Buchstabenalgebra darauf anzuwenden und ihr so ihre ganze ursprüngliche Reinheit und Abstraction wiederzugeben, während sie nichts desto weniger alle Vortheile, die sie durch den Calcul überkommen konnte, beibehielt.

Aber es ist sehr merkwürdig, dass man, um zu diesem grossen Resultat, zu dieser Vervollkommnung der griechischen Geometrie zu gelangen, durch diesen Zustand der Verschlechterung gehen musste, der dieser Wissenschaft ihren Charakter der Abstraction und Allgemeinheit raubte und sie zum Range concreter und numerischer Operationen herabsteigen liess.

Diese Betrachtungen können uns das 15te und 16te Jahrhundert als solche betrachten lassen, welche in der Geschichte der Geometrie eine Epoche der Vorbereitung und des Uebergangs bezeichnen, worin sich die neue Form, welche die Mathematik angenommen hat, herausarbeitete; und wir müssen hinzufügen, dass die Inder und Araber einen grossen Theil an dieser Umformung und Vervollkommnung hatten, weil sich der Keim davon in ihrem Princip der Anwendung der Algebra auf die Geometrie findet, welches sie selbst in ihren Arbeiten vieler Jahrhunderte entwickelt haben.

Zusätze.

Seite 20.

Hero von Alexandrien, ein Schüler des berühmten Mechanikers Ctesibius, und selbst berühmt durch sein Werk über Pneumatik und durch verschiedene andre mechanische Erfindungen, um deren willen er in dem achten Buch der mathematischen Sammlungen von Pappus erwähnt wird, war auch in der Geometrie ausgezeichnet. Eutocius hat uns seine Auflösung des Problems von den beiden mittlern Proportionalen aufbewahrt und hat aus dem einen seiner Werke, *περὶ μετρικῶν*, die arithmetische Regel für die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl entlehnt. Proclus citirt ihn als den Verfasser neuer Beweise für verschiedene Sätze der Elemente, wo er nur drei Axiome Euclid's zulässt[1]); und Gregor von Nazianz (J. 328 — 389) erhebt ihn zu dem Rang der grössten Geometer des Alterthums. (*Oratio* 10.)

Die Werke des Hero waren zahlreich, sie sind aber grössten Theils entweder nicht auf uns gekommen, oder sie sind unedirt geblieben. Von denen, welche sich speciell auf Geometrie beziehen, sind nur zwei übersetzt und veröffentlicht. Das erste, von dem die Geschichtschreiber der Mathematik, ich weiss nicht weshalb, nicht gesprochen haben, haben wir dem Dasypodius zu verdanken. Es hat zum Titel: *Nomenclatura vocabulorum geometricorum.*[2]) Es ist eine Reihe von Definitionen verschiedener Materien, die den Gegenstand der Geometrie ausmachen. Diese Definitionen sind von Commentarien und Entwickelungen begleitet, die mit Klarheit dargestellt sind.[3])

---

1) *Commentarius in Euclidem*, liber tertius.

2) *Euclidis Elementorum liber primus.* Item *Heronis Alexandrini vocabula quaedam Geometriae antea nunquam edita, graece et latine, per Conradum Dasypodium.* Argentinae 1571, in 8. — *Oratio C. Dasypodii de disciplinis mathematicis.* Ejusdem *Heronis Alexandrini Nomenclaturae vocabulorum geometricorum translatio.* Ejusdem *Lexicon mathematicum, ex diversis collectum antiquis scriptis.* Argent. 1579, in 8.

3) Fabricius (*Bibl. graeca*, lib. 3, cap. 24) und Heilbronner (*Hist. Matheseos*, p. 398) schreiben dieses Werk dem jüngern Hero zu, der im 7ten Jahrhundert unsrer Zeitrechnung zu Constantinopel lebte. Bernardin Baldi rechnet es, so wie Dasypodius, zu den Werken des ältern Hero. S. *Cronica de' matematici*, p. 35.

In seiner Vorrede kündigt Dasypodius an, dass er noch mehre andre Werke von Hero besitze, die er sich vorgenommen habe, bekannt zu machen. Das eine, welches er *Διοπτρικά* nennt, ist das zweite von den auf uns gekommenen geometrischen Werken des Hero. Es ist uns aber erst seit einigen Jahren bekannt. Wir verdanken es dem gelehrten Professor zu Bologna, J. B. Venturi, der es ins Italienische übersetzt hat, unter dem Titel *Il Traguardo*, welcher dem Titel des griechischen Textes *περὶ διόπτρας* entspricht, und es bekannt gemacht hat in seinen Commentarien zur Geschichte und Theorie der Optik. [4]) Dieses Werk ist eine Behandlung der Geodäsie, worin sich, mit Hülfe eines von den Alten *Diopter* genannten Instruments, eine Menge von Aufgaben aus der praktischen Geometrie graphisch aufgelöst finden.

Dieses Werk ist des Namens Hero würdig; es ist ein kostbares Denkmal der griechischen Geometrie und muss seine Stelle gleich nach den Werken des Euclid, Archimedes und Apollonius erhalten. Es füllt eine Lücke aus, die sich in den auf uns gekommenen Schriften des Alterthums findet. Denn da die Alten stets unter dem Namen *Geodäsie* die praktische Geometrie von der eigentlich so genannten Geometrie unterschieden [5]), so mussten sie über diese Geodäsie besonders schreiben; aus der Schule zu Alexandrien ist aber Nichts über diesen Theil der Geometrie auf uns gekommen.

Wir kennen nur das Werk über Geodäsie von Hero dem jüngern, der beinahe acht Jahrhunderte später als der ältere Hero ist. Aber dieses Werk, welches sich auf die einfachsten Operationen, ohne Beweise, reducirt, verdient nicht an der Seite der geometrischen Werke der Griechen zu stehen. Der wichtigste Satz, den man darin bemerkte, war die Formel für die Fläche des Dreiecks, als Function der drei Seiten. Es war das einzige griechische Werk, in welchem sich diese Formel fand, die in Europa seit dem 13ten Jahrhundert so verbreitet war und die arabischen Ursprungs zu sein schien. Sie findet sich aber auch in dem Werke des ältern Hero, wo sie durch eine sehr elegante geometrische Construction bewiesen ist. Wahrscheinlich hat der jüngere Hero sie hieraus entnommen; denn er citirt oft die Werke seines Namensverwandten, so wie die des Archimedes, und ausserdem wählt er, bei der numerischen Anwendung dieser Formel, die Zahlen 13, 14 und 15 zu den Seiten des Dreiecks, welche genau dieselben sind, als bei Hero dem ältern.

Diese drei Zahlen und die in Rede stehende Formel finden sich auch in der Geometrie der Inder und in der der Araber und selbst bei den Lateinern, so wie wir es angeführt haben, als wir von den Werken des Brahmegupta sprachen.

Da das Werk über Geodäsie von dem ältern Hero wenig bekannt st, so wollen wir mehre Aufgaben anführen, die sich darin vermit-

---

4) *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica.* Bologna 1814, in 4. — Dieses Werk besteht aus folgenden vier Theilen:

1) *Considerazioni sopra varie parti dell' ottica presso di antichi;*
2) *Erone il meccanico del traguardo tradotto dal greco ed illustrato con note;*
3) *Dell' iride, degli aloni e de' paregli;*
4) *Appendice intorno al ottica di Tolommeo.*

5) *Si enim in hoc differret solum Geometria a Geodaesia, quod haec quidem eorum est quae sentimus, illa vero non sensibilium est.* (Aristoteles, lib. 2 der *Metaphysik*, cap. 11.)

telst des Instruments, das er *Diopter* nennt, aufgelöst finden. Sie lehren das kennen, was die Geodäsie oder praktische Geometrie bei den Griechen ausmachte, und lassen uns bedauern, dass der Originaltext des Werks von Hero und andre Uebersetzungen, als die von Venturi, noch nicht erschienen sind. [6])

1) Den Unterschied der Höhe zweier, gegenseitig nicht sichtbarer, Punkte zu messen.
2) Eine gerade Linie zwischen zwei, gegenseitig nicht sichtbaren, Punkten zu ziehen.
3) Die Entfernung des Orts, in dem man sich befindet, von einem entfernten Punkt zu finden, zu dem man nicht kommen kann.
4) Die Breite eines Flusses, den man nicht überschreiten kann, zu messen.
5) Die Entfernung zwischen zwei entfernten Punkten zu messen.
6) Von einem gegebenen Punkt ein Perpendikel auf eine Gerade zu fällen, zu der man nicht kommen kann.
7) Die Höhe eines nicht zugänglichen Punkts zu messen.
8) Den Höhenunterschied zweier unzugänglichen Punkte zu messen.
9) Die Tiefe einer Grube zu messen.
10) Einen Berg zu übersteigen, indem man eine gerade Linie verfolgt, welche zwei gegebene Punkte zu beiden Seiten des Bergs verbindet.
11) Durch einen Berg einen Brunnen zu graben, der in eine bestimmte unterirdische Vertiefung ausmündet.
12) Den Umriss eines Ufers zu zeichnen.
13) Dem Terrain die Gestalt eines bestimmten Kugelsegments zu geben.
14) Dem Terrain eine bestimmte Abschüssigkeit zu geben.
15) Ein Feld zu messen, ohne hineinzugehen.
16) Dasselbe in gegebene Theile zu theilen, durch Gerade, die von Einem Punkte ausgehen.
17) Ein Dreieck und ein Trapez nach einem gegebenen Verhältniss zu theilen.

---

6) Venturi nennt drei Bibliotheken, welche das Werk des Hero besitzen; diese sind die zu Paris, Strasburg und Wien; das Exemplar in der letztern ist unvollständig, es ist aber das einzige, welches die Bibliographen anführen; man hat es, nach Lambecius, für ein Werk über Dioptrik gehalten. — (S. Fabricius, *Bibl. graeca*, lib. 3, cap. 24. — Heilbronner, *Hist. math.*, p. 282.)

Venturi hat eine Copie des Exemplars in der königl. Bibliothek, das mit dem von Strasburg verglichen wurde, übersetzt. Das letztere ist wahrscheinlich das Exemplar, welches Dasypodius besessen hat. Was ist aber aus den andern Werken von Hero geworden, die dieser Geometer ebenfalls besessen hat?

Conrad Gesner sagt in seiner *Bibliotheca universalis* (*sive catalogus omnium scriptorum locupletissimus in tribus linguis latina, graeca et hebraica.* Tiguri 1545, fol.), dass der berühmte Diego Hurtado de Mendoza, dem Europa eine grosse Anzahl griechischer Manuscripte verdankt, mehre von Hero gehabt habe (s. fol. 319). Diese befinden sich ohne Zweifel in der Bibliothek des Escurial, wohin die werthvolle Sammlung des Mendoza gekommen ist.

Seite 42.

Der erste Satz im 4ten Buch der mathematischen Sammlungen von Pappus ist eine allgemeine Eigenschaft der Dreiecke, welche der Verfasser als eine Verallgemeinerung des Theorems vom Quadrat der Hypotenuse in den rechtwinkligen Dreiecken darstellt. Man hat noch nicht bemerkt, dass dieser Satz, nur unter einer andern Form, genau die Eigenschaft der Parallelogramme ist, auf der in der Mechanik die Theorie der *Momente* beruht. Diese Eigenschaft wurde erst zu Anfang des letzten Jahrhunderts von Varignon entdeckt, der sie als „Etwas, das dem 47sten Satz aus dem ersten Buch der Elemente Euclid's (dem vom Quadrat der Hypotenuse) ähnlich ist", darstellt und so ausspricht:

Wenn man auf zwei an einander stossenden Seiten eines Parallelogramms und auf der Diagonale, welche von demselben Scheitel als jene ausgeht, Dreiecke construirt, die einen gemeinschaftlichen Scheitel in irgend einem Punkt der Ebene der Figur haben, so ist die Summe oder Differenz der beiden ersten Dreiecke gleich dem dritten Dreieck. (S. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1719.)

Schon lange Zeit vorher hatte Varignon ein andres Theorem über das Parallelogramm bewiesen und in der Mechanik angewandt, das in der neuern Geometrie sehr bekannt und im Grunde kein andres ist, als das erste, nur unter einer sehr verschiedenen Aussprache, nämlich: *Wenn zwei zusammenstossende Seiten eines Parallelogramms und die Diagonale, welche von ihrem gemeinschaftlichen Scheitel ausgeht, auf irgend eine gerade Linie projecirt werden, so ist die Projection der Diagonale gleich der Summe oder Differenz der Projectionen der beiden Seiten.* (S. *Projet d'une nouvelle Mécanique*, in 4, 1687, p. 189.)

Seite 52. §. 3.

Zu den Geometern, welche, Vieta folgend, die Transformationen der sphärischen Dreiecke bildeten, muss man Albert Girard rechnen, welcher in seiner Trigonometrie (gedruckt 1626, ein Jahr früher, als die des Snellius) auch das *reciproke* Dreieck anwendet. Dieser Geometer hat aber unter diesem Wort die vier verschiedenen Dreiecke verstanden, die durch Kreisbögen gebildet werden, deren Pole die drei Scheitel des gegebenen Dreiecks sind; so dass er als die *reciproken* eines gegebenen Dreiecks sowohl das Dreieck des Vieta, als auch das des Snellius betrachtet.

Dieses Werk über Trigonometrie von Albert Girard, das einer Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten beigefügt ist, ist zwar sehr gedrängt, enthält aber dennoch mehre interessante Sachen. Aus der Vorrede sieht man, dass sich der Verfasser mit der *geometrischen Analyse* der Alten beschäftigte, um ihre Werke, deren Titel uns von Pappus überliefert sind, wiederherzustellen; er sagt, dass er nach diesem kleinen Werk über Trigonometrie, „welches er nur als Probe liefere, ein viel grösseres herausgeben werde."

Seite 64. §. 14.

Fermat hat über die *Oerter auf der Oberfläche* geschrieben.

Mersenne sagt es mit diesen Worten: *Omitto locos ad superficiem, cujus isagogem vir idem Cl.* (Fermatius) *amicis communem fecit, et alia quae utinam ab eo tantum impetremus.* (S. *Universae Geometriae mixtaeque mathematicae synopsis*, in 4., 1644, p. 388.)

Seite 78. §. 27.

Wir haben gesagt, dass Desargues die Aufgabe vorgelegt hatte, einen Kegel mit elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Basis in einem Kreise zu schneiden, und dass Descartes davon eine Lösung gegeben hat, die sich auf die Principien seiner analytischen Geometrie stützt. Wir hätten hinzufügen sollen, dass auch Desargues dieses Problem gelöst hat, und zwar vermittelst einer *graphischen Construction* [7]) Wir sehen dies aus der Vorrede zur *Synopsis universae Geometriae* von Mersenne. Desargues führt dieses Problem auf die Aufsuchung der Hauptaxe eines Kegels zurück, d. h. derjenigen, welche die Eigenschaft besitzt, dass eine auf ihr senkrechte Ebene den Kegel in einer Ellipse schneidet, deren Mittelpunkt in dieser Axe liegt. Er construirte diese Axe, indem er zwei Linien anwandte, von denen er beliebig viele Punke bestimmte. Mersenne sagt nicht, welche diese Linien waren; wahrscheinlich waren es die Kegelschnitte.

Nachdem er die Kreisschnitte des Kegels bestimmt hat, bedient sich Desargues derselben, um verschiedene andre Probleme aufzulösen, so wie z. B. den Kegel in einem Kegelschnitt zu schneiden, der einem gegebenen Kegelschnitt ähnlich ist, oder welcher der Bedingung genügt, dass der grösste Winkel, den zwei conjugirte Durchmesser mit einander bilden, eine gegebene Grösse hat.

Desargues löste noch dieses Problem, welches Mersenne das allgemeinste nennt, das man sich über diesen Gegenstand vorlegen kann:

Wenn ein Kegel mit elliptischer, parabolischer oder hyperbolischer Basis und eine schneidende Ebene gegeben sind, ohne Construction der Schnittcurve des Kegels mit dieser Ebene ihre conjugirten Durchmesser zu bestimmen, welche mit einander einen Winkel von gegebener Grösse bilden, so wie auch ihre Tangenten, ihre Ordinaten, ihre Parameter und die andern hauptsächlichsten Linien dieser Curve.

Desargues erwähnt selbst eines Problems von dieser Art, am Ende seines Buchs über die Perspective, welches in dem Werk über

---

7) Archimedes hat dieses Problem für den Fall gelöst, dass der Scheitel des Kegels in einer Ebene liegt, die durch einen Hauptdurchmesser des Kegelschnitts geht und senkrecht auf seiner Ebene steht, was man aus den Sätzen 8 und 9 seines Buchs über *Sphäroide und Conoide* sieht.

Diese Sätze zeigen auch, dass Archimedes, schon vor Apollonius, den schiefen Kegel mit kreisförmiger Basis betrachtet hat; dennoch ist aber Apollonius der erste, der die Theorie der Kegelschnitte auf dem schiefen Kegel untersucht hat.

Perspective, arrangirt von Bosse (1648, in 4., p. 334) enthalten ist, wo er sich so ausdrückt:

Ayant à pourtraire une coupe de cône plate, y mener deux lignes dont les apparences soient les essieux de la figure qui la représente.

Das heisst: wenn ein Kegelschnitt perpectivisch projecirt wird, in seiner Ebene die beiden Geraden zu finden, welche in der Perspective die beiden Hauptaxen der Perspective des Kegelschnitts sind.

Endlich sehen wir noch aus der Vorrede zur *Synopsis* von Mersenne, dass Desargues ein vollständiges Werk über die körperlichen Winkel verfasst hat, worin er diese vier Aufgaben löst:

1) *Wenn die drei ebenen Winkel gegeben sind, die drei Flächenwinkel zu finden;*

2) *Wenn zwei ebene Winkel und ein Flächenwinkel gegeben sind, den dritten ebenen Winkel und die beiden andern Flächenwinkel zu finden;*

3) *Wenn ein ebener Winkel und zwei Flächenwinkel gegeben sind, die beiden andern ebenen Winkel und den dritten Flächenwinkel zu finden;*

4) *Wenn die drei Flächenwinkel gegeben sind, die drei ebenen Winkel zu finden.*

Mersenne fügt hinzu, dass Desargues einen zweiten dreikantigen Winkel bildet, in welchem die ebenen Winkel die Supplemente der Flächenwinkel des ersten sind, und umgekehrt. Hierdurch werden die vier Probleme auf zwei reducirt.

Dieses ist, wie man sieht, der *supplementäre* dreikantige Winkel, welcher dem *supplementären* Dreieck der sphärischen Trigonometrie entspricht, welches Snellius, einige Jahre zuvor, in seinem Werk über Trigonometrie ausgedacht hatte. In Bezug auf die Probleme bilden sie eine graphische Lösung der sphärischen Trigonometrie. Es ist das, was man seitdem die Lösung der dreieckigen Pyramide genannt hat. Sie machen gegenwärtig ein Kapitel in den Behandlungen der beschreibenden Geometrie aus und werden häufig bei den Anwendungen dieser Wissenschaft gebraucht, hauptsächlich beim Schnitt der Steine. (S. *Traité de Géométrie descriptive* von Hachette und das 3te Heft vom 1sten Band der *Correspondance polytechnique.*)

Seite 80. §. 28.

Poncelet hat in der Geometrie dreier Dimensionen folgendes Theorem gegeben, welches dem von Desargues in der ebenen Geometrie entspricht: *Wenn von zwei Tetraëdern die Scheitel, zu je zwei, auf vier in Einen Punkt zusammenlaufenden Geraden liegen, so schneiden sich die Ebenen ihrer Seitenflächen, zu je zwei, in vier Geraden, die in einer Ebene liegen.* (*Traité des propriétés projectives*, Art. 582.)

Dieses Theorem kann auf folgende Art verallgemeinert werden:

Wenn von zwei Tetraëdern die Scheitel zu je zwei auf vier Geraden liegen, welche die Generatrices einer und derselben Beschreibungsart eines Hyperboloids mit Einem Fach sind, so schneiden sich ihre Ebenen in vier Geraden, welche die Generatrices eines zweiten Hyperboloids sind.

Seite 92.

In den Briefen von Descartes findet man viele Stellen, die sich auf Geometrie beziehen. Der Band seiner *Opuscula posthuma* (Amst. 1701, in 4.) enthält auch einige Stücke der Geometrie. Es ist zu bedauern, dass man noch nicht daran gedacht hat, alle diese zerstreuten Stellen zu sammeln und sie in die zahlreichen Ausgaben, die man von der Geometrie des Descartes veranstaltet hat, mit aufzunehmen.

Wir begnügen uns hier in seinen Briefen eine besondre Methode anzumerken, welche dieser berühmte Philosoph für die Auflösung eines Problems ausgedacht hat, das damals von ihm und von seinen Zeitgenossen Fermat, Roberval und Pascal vielfach behandelt wurde; es ist dieses das Problem von der Tangente der Cycloide. Diese Methode, die damals sehr berühmt wurde, war ausserordentlich einfach und passte, wie es Descartes sehr wohl gesehen hat, für die verkürzten und verlängerten Cycloiden und selbst für alle Arten von Radlinien, die durch einen Punkt der Ebene irgend einer Curve, die auf einer andern festen Curve rollt, beschrieben werden. Sie besteht darin, die beiden Curven als zwei Polygone von unendlich vielen Seiten zu betrachten. Diese Polygone haben eine Berührung in einer gemeinschaftlichen Seite und haben folglich in jedem Augenblick zwei gemeinschaftliche Scheitel; während einer unendlich kleinen Bewegung dreht sich das erste Polygon um den einen dieser beiden Scheitel, der fest bleibt, der beschreibende Punkt erzeugt also einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in dem festen Scheitel liegt; die Normale dieses Kreisbogens, welcher das Element der beschriebenen Radlinie ist, geht also durch diesen Scheitel.

Diese Methode, welche sich von allen andern Methoden für die Construction der Tangenten wesentlich unterscheidet, ist, wegen ihrer ausserordentlichen Einfachheit, seitdem beständig angewandt worden. Aber ohne Zweifel gerade weil sie so einfach war, so hat sie nicht die gehörige Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen; diese machten nur bei dieser Aufgabe selbst von ihr Gebrauch, indem sie sich einzig damit begnügten, sie auf die sphärischen Epicycloiden auszudehnen. Indem wir das erkannten, was diese Methode Unterscheidendes und Eigenthümliches in Vergleich mit den andern Lösungen des Tangentenproblems hat, so lag es sehr nahe zu untersuchen, ob das Princip, auf dem sie beruht, nicht einer Verallgemeinerung fähig wäre, die sie auch auf jede andre Aufgabe anwendbar macht.

Folgendes Theorem scheint uns die Verallgemeinerung des von Descartes zu liefern:

Wenn eine ebene Figur eine unendlich kleine Bewegung in ihrer Ebene erfährt, so giebt es immer einen Punkt, der während dieser Bewegung fest bleibt.

Die Geraden, welche durch die verschiedenen Punkte der Figur, senkrecht auf die Trajectorie, die sie während der unendlich kleinen Bewegung beschreiben, gezogen werden, gehen alle durch diesen festen Punkt.

Wenn ein Punkt einer Figur, die sich in ihrer Ebene bewegt, eine Curve beschreibt, und man will durch den beschreibenden Punkt eine Normale ziehen, so ist es nach diesem Theorem hinreichend, den Punkt zu bestimmen, welcher in dem Augenblick der Bewegung, wo der beschreibende Punkt die in Betracht kommende Stellung einnimmt, fest bleibt. Dieser Punkt wird sich durch die verschiedenen Bedingungen der Bewegung der Figur bestimmen lassen.

Wenn man z. B. die Bewegung zweier Punkte der Figur kennt, so wird man durch diese Punkte die Normalen an die Curven, welche sie durchlaufen, ziehen und der Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen wird der gesuchte Punkt sein.

Es bewege sich etwa eine Gerade von gegebener Länge auf die Art, dass ihre beiden Endpunkte zwei feste Gerade durchlaufen, so weiss man, dass jeder Punkt der Geraden und selbst jeder Punkt, der ausserhalb der Geraden liegt, aber unveränderlich fest mit ihr verbunden ist, eine Ellipse beschreibt. Um die Normale dieser Curve zu bestimmen, wird man Normalen auf die beiden festen Geraden durch die Endpunkte der beweglichen Geraden ziehen; diese beiden Normalen werden sich in einem Punkte schneiden, durch den die gesuchte Normale geht.

Die Bewegung der beweglichen Figur kann noch durch verschiedene andre Bedingungen geregelt werden, welche ebenfalls gestatten, den fraglichen Punkt sehr leicht zu bestimmen.

Es werde z. B. die Conchoide des Nicomedes durch einen Punkt einer Geraden beschrieben, deren Endpunkt eine feste Gerade durchläuft, während die bewegliche Gerade stets durch einen festen Punkt geht. Wenn man die bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen betrachtet, so fälle man auf sie durch den festen Punkt ein Perpendikel und lege durch dessen Endpunkt ein Perpendikel auf die feste Gerade: dann wird der Durchschnittspunkt dieser beiden Perpendikel der gesuchte Punkt sein, durch den die Normale der Conchoide geht.

Wir wollen hier nicht alle andern verschiedenen Bedingungen der Bewegung der beweglichen Figur durchgehen, für welche man den in Rede stehenden Punkt bestimmen kann, auch wollen wir nicht alle Curven aufführen, an welche es, durch dieses Mittel, leicht sein würde, die Tangenten zu ziehen.

Das Vorhergehende genügt, zu zeigen, dass das von uns ausgesprochene Theorem eine Verallgemeinerung der von Descartes über die Tangente an der Cycloide gegebenen Idee ist, und dass es eine wirkliche Tangentenmethode ausmacht, welche von allen andern und selbst von der des Roberval verschieden ist, obgleich diese wie jene auf Betrachtungen der Bewegung beruht. Man bemerkt aber, dass auch diese so leichte Methode, eben so wie die des Roberval, bei ihren Anwendungen stehen bleibt, weil sie voraussetzt, dass man die geometrischen Bedingungen der Bewegung einer Figur von unveränderlicher Form, zu welcher der beschreibende Punkt gehört, kennt. Sie lässt sich jedoch auf eine grosse Anzahl von besondern Curven und auf ganze Familien von Curven anwenden.

Die Anwendungen unsres Theorems beschränken sich nicht auf die einfache Geometrie, sondern es kann auch in der Mechanik bei der Berechnung der lebendigen Kräfte von Nutzen sein; denn es folgt daraus, dass die lebendigen Kräfte der verschiedenen Punkte einer beweglichen Figur proportional sind den Quadraten der Entfernungen dieser Punkte von demjenigen, welcher während dieses Augenblicks, indem man die Bewegung betrachtet, fest bleibt; wenn also dieser Punkt bestimmt ist, so genügt es, die lebendige Kraft irgend eines andern Punkts der Figur zu kennen. Poncelet berichtet uns, dass er einen solchen Gebrauch von diesem Theorem bei mehren Fragen über Maschinen gemacht habe, wo man bisher keine geometrische Methode für die Rechnung der lebendigen Kräfte gehabt hatte.

Während wir dieses in Rede stehende Theorem aussprechen, haben wir dasselbe vor einigen Jahren (s. *Bulletin universel des scien-*

ces, t. 14) als einen besondern Fall eines Theorems über irgend eine endliche Ortsveränderung einer ebenen Figur in dieser Ebene dargestellt, und selbst als den besondern Fall eines noch allgemeinern Theorems, das sich auf zwei ähnliche Figuren bezieht, die irgendwie in einer Ebene liegen. Diese beiden Theoreme hängen aber selbst wieder von einem noch allgemeinern Princip ab, welches dieses ist:

Wenn man in 'einer Ebene zwei Figuren annimmt, die ursprünglich die Perspective von einander sind und die jetzt irgendwie in Bezug auf einander liegen; dann wird jeder Punkt in der einen Figur seinen homologen in der andern haben; es wird im Allgemeinen drei Punkte in der einen Figur geben, die sich respective auf ihre homologen in der andern Figur superponirt finden werden; der eine dieser Punkte wird immer reell sein, die beiden andern können imaginär sein.

Hieraus folgt, dass es auch drei gerade Linien in der einen Figur giebt, welche sich superponirt auf ihre homologen in der zweiten Figur finden; dieses sind die Geraden, welche zu je zwei die drei Punkte verbinden.

Die eine dieser drei Geraden ist immer reell, die beiden andern können auch imaginär sein.

Wenn die beiden Figuren ähnlich sind, was ein besondrer Fall der Perspective ist, so sind zwei von den drei Punkten und zwei von den drei Geraden immer imaginär; der dritte Punkt ist reell; die dritte Gerade ist auch reell, liegt aber in der Unendlichkeit.

Dasselbe findet statt, wenn die Figuren unter einander gleich sind.

Diese Eigenschaften der ebenen Figuren haben ihre analogen bei den Figuren dreier Dimensionen, wofür ich schon einige Theoreme angeführt habe, die sich auf diese Theorie beziehen. (S. *Bulletin universel des sciences*, t. 14, p. 321, 1830.)

Seite 95. §. 4.

Die Araber haben sich auch mit der organischen Beschreibung der Curven, besonders der Kegelschnitte beschäftigt. Dieses sehen wir aus dem Titel der folgenden drei Werke, die sich in der Bibliothek zu Leyden finden:

1) *Ahmed ben Ghalil Sugiureus De conicarum sectionum descriptione;*
2) *Abu Schel Cumaeus De circino perfecto, quo etiam sectiones conicae et aliae lineae curvae describi possunt;*
3) *Mah. ben Husein De circino perfecto et perfectione linearum.* (S. *Catalogus librorum tam impressorum quam manuscriptorum bibliothecae publicae universitatis Lugduno Batavae*, in fol., 1716, p. 454 et 455.

Seite 116.

Unter den neuen Verfahrungsarten, welche die Gnomonik des De La Hire enthält, ist eine, die wir hätten anführen müssen, weil sie auf geometrischen Betrachtungen beruht, die in die Lehren der modernen Geometrie eingehen.

Es handelt sich um die Construction der Stundenlinien, indem man sich einiger unter ihnen, welche schon gezogen sind, bedient. De La Hire löst drei Fragen:

In der ersten nimmt er 7 auf einander folgende Stundenlinien als bekannt an;

In der zweiten, 4 auf einander folgende Stunden und die Aequinoxiale;

In der dritten, 3 auf einander folgende Stunden, die Aequinoxiale und die Horizontale;

und bestimmt die andern Stundenlinien.

In dem ersten Fall seien die sieben Linien der Stunden X, XI, XII, I, II, III und IV bekannt; dann ist die Construction des Verfassers zur Bestimmung der fünf andern diese:

Durch einen Punkt *o* der Linie IV ziehe man eine Transversale parallel mit der Linie X; diese trifft die Linien III, II, I, XII und XI in den Punkten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; auf dieser Transversale trägt man zur andern Seite des Punktes *o* die Segmente oa^1, ob^1, oc^1, od^1, oe^1 respective gleich den Segmenten *oa*, *ob*, *oc*, *od*, *oe* auf: dann werden die Punkte a^1, b^1, c^1, d^1, e^1 zu den fünf andern Stunden gehören.

In der That, die beiden Stundenebenen X und IV bilden einen rechten Winkel, die beiden Stundenebenen III und V sind gleich gegen die Ebene IV geneigt und folglich sind diese beiden Ebenen conjugirte harmonische in Bezug auf die beiden ersten X und IV. Daraus folgt, dass die beiden Stundenlinien III und V conjugirte harmonische sind in Bezug auf die beiden Stundenlinien X und IV; jede Transversale trifft also diese vier Linien in vier harmonischen Punkten; und folglich wenn diese Transversale parallel mit der Linie X ist, so werden die beiden Punkte, in denen sie die Linien III und V trifft, gleich weit von dem entfernt sein, in welchem sie die Linie IV trifft. [8])

---

8) Dieser geometrische Beweis, den wir aus dem Werke des De La Hire entlehnen, ist eben so strenge als kurz; Delambre jedoch betrachtet ihn nicht als ganz genügend; und da die in Rede stehende Verfahrungsart ihm nützlich und gut zu sein scheint und eine *démonstration en forme* verdient, so setzt er sich vor, sie ganz allgemein und strenge zu beweisen. (*Hist. de l'astronomie au moyen âge*, p. 634.) Wir müssen aber sagen, der Beweis des Delambre nimmt beinahe zwei Seiten Rechnung ein und ist gewiss nicht strenger als das kurze Raisonnement des De La Hire.

Wir wollen diese Bemerkung nicht in dem Geiste der Kritik machen: denn der Name und die Arbeiten Delambre's, seine Aufopferung für die Wissenschaft und die langweiligen und mühevollen Untersuchungen, denen er sich hingegeben hat, um seine Geschichte der Astronomie zu schreiben, finden bei uns Anerkennung und Bewunderung; sondern unsre Bemerkung gehört wesentlich zu dem Geiste, der bei der Verfassung unsres Werks vorgeherrscht hat; weil sie, einer Seits, ein handgreifliches Beispiel von den Vortheilen liefert, welche häufig der geometrische Weg oder das einfache Raisonnement vor dem Calcul hat; und weil sie ausserdem die Richtung zeigt, welche die mathematischen Studien genommen haben, dass man nämlich klare und überzeugende Beweise von einer Wahrheit in der Geometrie und die *démonstration en forme* nur in der Verification durch den algebraischen Calcul findet. Diese neue Richtung ist der entgegengesetzt, welche zu allen Zeiten war: bei den Griechen, wo die Geometrie wegen der Strenge ihrer Beweise berühmt war; bei den Indern und Arabern, welche sich durch einen geometrischen Beweis Rechenschaft von den

Wir führen nicht die Verfahrungsarten des De La Hire für die beiden andern Aufgaben an; sie sind eben so einfach als die erste und beruhen auch auf Principien der elementaren Geometrie, welche in die Theorie der Transversalen eingehen.

Aber diese drei Probleme geben so natürlich zu einer Bemerkung Veranlassung, dass ich mich wundre, dass sie in den Werken, welche sie reproducirt haben, nicht gemacht ist. Diese Bemerkung bezieht sich auf die grosse Anzahl von *Datis*, welche De La Hire zur Construction der unbekannten Stundenlinien annimmt. Im ersten Fall nimmt er sieben, im zweiten vier und noch die Aequinoxiallinie, im dritten drei und ausserdem noch die Aequinoxiallinie und die Horizontallinie an; hierzu kommt noch die Bedingung, dass sie auf einander folgende sein müssen.

Sind alle diese Data nothwendig? Und welches ist die kleinste Anzahl von Stundenlinien, die zur Construction der andern hinreichen?

Die Antwort hierauf ist, dass drei beliebige Stundenlinien zur Bestimmung aller andern genügen, wofür man eine durchaus eben so einfache Construction geben kann, als die des Da La Hire für den Fall, dass sieben auf einander folgende Stundenlinien bekannt sind.

Folgendes ist diese Construction, welche uns eine neue Anwendung der Theorie des *anharmonischen Verhältnisses* giebt, auf das wir schon an mehren Stellen dieses Werks die Aufmerksamkeit der Geometer zu lenken versucht haben.

Es mögen a, b, c die drei gegebenen Linien bezeichnen, welche bestimmmten, aber beliebigen Stunden entsprechen, und welche, wenn man will, selbst Brüche von Stunden sein können. Es sei d die Linie irgend einer vierten Stunde, die man vermittelst der drei ersten construiren will. Das anharmonische Verhältniss dieser vier Linien wird gleich dem der vier Stundenebenen sein, deren Durchschnittslinien mit der Ebene der Sonnenuhr die erstern sind.

Es seien also A, B, C, D diese vier Ebenen, so hat man:

$$\frac{\sin. c, a}{\sin. c, b} : \frac{\sin. d, a}{\sin. d, b} = \frac{\sin. C, A}{\sin. C, B} : \frac{\sin. D, A}{\sin. D, B}.$$

Die Winkel, welche die vier Ebenen A, B, C, D unter sich bilden, sind bekannt, weil diese Ebenen den vier bestimmten Stunden entsprechen; die zweite Zahl ist also eine bekannte Grösse n.

Man sieht mithin schon, dass unsre Gleichung zur Bestimmung der Richtung der Linie d dient, und dass sie also die Aufgabe löst.

Resultaten der Algebra ablegten; bei den Neuern bis zum letzten Jahrhundert, wo Newton und Maclaurin den Calcul nur ungern und nur dann anwandten, wenn er unvermeidlich wurde.

Welches ist die Ursache dieser ausschliesslichen Richtung der mathematischen Studien? Welches war ihr Einfluss auf den Charakter und die Fortschritte der Wissenschaft? Wir wollen nicht versuchen, auf diese Fragen zu antworten, über die man nicht leicht einstimmig sein dürfte. Welche aber auch die Meinungen in Bezug hierauf sein mögen, so wird man wenigstens nicht in Abrede stellen, dass es nützlich wäre, wenn die alte Methode, die bis zum letzten Jahrhundert befolgt wurde, weiter angeregt und neben der neuen ausgebildet würde.

Um daraus eine leichte Construction abzuleiten, ziehen wir willkührlich eine Transversale, welche die drei Linien a, b, c in den drei Punkten α, β, γ trifft, und nennen δ den Punkt, in dem sie der gesuchten Linie d begegnet. Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte α, β, γ, δ wird dasselbe sein, als das der vier Geraden a, b, c, d; die vorhergehende Gleichung wird sich also in folgende umwandeln:

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \mathrm{n}, \text{ oder } \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{1}{\mathrm{n}} \cdot \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}.$$

Das zweite Glied ist bekannt und diese Gleichung wird also die Lage des Punkts δ erkennen lassen, welcher zur gesuchten Linie gehört.

Diese Auflösung wird ausserordentlich leicht, wenn man die Transversale mit einer der beiden Linien a, b parallel zieht, z. B. mit der ersten, denn man hat alsdann $\frac{\delta\alpha}{\gamma\alpha} = 1$, und die Gleichung reducirt sich auf

$$\delta\beta = \mathrm{n} \, . \, \gamma\beta.$$

Das Segment $\gamma\beta$ ist bekannt, also ist es auch das Segment $\delta\beta$; der Punkt δ und folglich die Linie d sind daher bestimmt. Die Aufgabe ist demnach gelöst. Und diese allgemeine Construction, die nur drei beliebige Stundenlinien gebraucht, um eine vierte ebenfalls willkührliche zu bestimmen, ist, wie wir angedeutet haben, eben so einfach, als die von De La Hire, welche die Kenntniss von sieben Linien, statt dreier, nöthig hat.

Was die Quantität n betrifft, die nicht direct gegeben ist, die aber von den Winkeln abhängt, welche die vier Stundenebenen A, B, C, D unter einander bilden, so ist es leicht, denselben graphisch zu berechnen, ohne die trigonometrischen Linien, welche darin eingehen, zu gebrauchen. Zu dem Ende ziehe man durch einen Punkt O vier gerade Linien OA^1, OB^1, OC^1, OD^1, die unter sich dieselben Winkel bilden, als die Stundenebenen; darauf ziehe man irgend eine Transversale, welche diese Linien in den Punkten α^1, β^1, γ^1, δ^1 trifft: dann wird das anharmonische Verhältniss dieser vier Punkte gleich dem der vier Ebenen sein, so dass man hat:

$$\frac{\gamma^1\alpha^1}{\gamma^1\beta^1} : \frac{\delta^1\alpha^1}{\delta^1\beta} = \mathrm{n}.$$

Dieses ist der Werth von n, dessen Ausdruck man dadurch vereinfacht, wenn man die Transversale parallel mit einer der vier Geraden OA^1, OB^1, OC^1, OD^1, z. B. mit der ersten zieht, denn man hat alsdann $\frac{\gamma^1\alpha^1}{\delta^1\alpha^1} = 1$, und es wird

$$\mathrm{n} = \frac{\delta^1\beta^1}{\gamma^1\beta^1}.$$

Seite 158. §. 17.

Die Betrachtung der Epicycloiden geht sehr weit zurück, weil sie in dem astronomischen System des Ptolemäus eine grosse Rolle spielen. Aber es scheint nicht, dass man jemals die Natur und die Eigenschaften dieser Curven geometrisch untersucht hat. Albrecht Dürer hat sie unter die Zahl derjenigen krummen Linien gesetzt, welche er durch Punkte zu beschreiben gelehrt hat und deren Gebrauch in den construirenden Künsten nützlich sein kann; aber er hat auch weiter keine Eigenschaft derselben erforscht.

Die erste Epicycloide, deren Natur bekannt war, schreibt sich von Cardan her; es ist die, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, der auf der concaven Seite eines Kreises von doppeltem Radius fortrollt. Diese Linie ist, wie man weiss, eine Gerade. Cardan hat diese Eigenschaft bewiesen, in seinem Buch *Opus novum de proportionibus numerorum*, *motuum*, etc. (s. *prop.* 173, p. 186).

Sodann hat Huygens (1678) gefunden, dass die Enveloppe der *Reflexionswellen* in einem Kreise, auf den parallele Strahlen auffallen, eine Epicycloide ist, die durch einen Punkt der Peripherie eines Kreises beschrieben wird, wenn dieser auf der Concavität eines erleuchteten Kreises hinrollt, während der Radius dieses beweglichen Kreises der vierte Theil von dem Durchmesser des andern ist. Huygens hat die Rectification und die Quadratur dieser Curve gegeben (s. *Tractatus de lumine*, cap. VI).

Um dieselbe Zeit hat De La Hire gefunden, dass die *Caustica* von Tschirnhausen, welche durch die Reflexion von parallelen Strahlen an einem erleuchteten Kreise gebildet wird, auch eine Epicycloide ist, die man erzeugt, indem man eine Kreisperipherie auf der Convexität eines andern Kreises von doppelt so grossem Radius rollen lässt.

Diese Curve ist genau die Evolute von der des Huygens.

Diese sind, wie ich glaube, die ersten Epicycloiden, von denen man einige geometrische Eigenschaften gekannt hat. Diese Curven haben sich später bei mehren andern Fragen aus der Physik und Mechanik gezeigt, wo sie eine merkwürdige Rolle spielen.

Seite 214.

Clairaut hat vor Euler die Curven betrachtet, welche dieser *lineae affines* nennt; er betrachtet sie als gegenseitige Projectionen von einander, d. h. als zwei ebene Schnitte eines und desselben Cylinders, und nennt sie Curven *de même espèce*. Er zeigt, dass, wenn die Coordinaten eines Punkts der Einen, bezogen auf zwei Axen in ihrer Ebene, x und y sind, die Coordinaten des entsprechenden Punkts in der zweiten Curve, bezogen auf zwei Axen, die in der Ebene dieser Curve den beiden ersten entsprechen, von der Form $X=\lambda x$, $Y=\mu y$ sind; woraus sich ergiebt, dass diese Curven von Clairaut dieselben als die von Euler sind. (S. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1731.)

Seite 263.

Ein Charakter, der den Principien der Dualität und der Homographie, wie wir sie auseinandersetzen, eigenthümlich ist, und der auf dem Gebrauche beruht, den wir von dem *anharmonischen Verhältniss* machen, ist der, dass nach der Natur dieses Verhältnisses selbst alle Theoreme, die wir erhalten, sich ganz von selbst, und beinahe stets, auf Figuren auf der Kugel anwenden. Auf diese Weise werden diese beiden Theorien ein leichtes und natürliches Mittel darbieten, auf sphärische Figuren alle Eigenschaften der ebenen Figuren überzutragen und selbst die schon bekannten Eigenschaften der sphärischen Figuren zu verallgemeiuern.

Das Princip der Dualität z. B. wird zeigen, dass für eine erste Figur auf der Kugel, ausser der *supplementären* Figur, die bisher die einzig bekannte war, welche die Eigenschaft besass, dass den *Punkten und Bögen grösster Kreise* der gegebenen Figur respective *Bögen grösster Kreise und Punkte* in dieser supplementären entsprechen; dass man ausser dieser supplementären Figur, sag' ich, noch unendlich viele andre auf der Kugel zeichnen kann, welche dieselbe Eigenschaft besitzen; und dieses Princip lehrt die Constructionsart dieser Figuren, unter denen die supplementäre nur ein besondrer Fall ist.

Also können wir sagen, dass die beiden Principien der Dualität und der Homographie eine wahrhaft rationelle Methode darbieten, um die Eigenschaften ebener Figuren auf sphärische Figuren anzuwenden und, mit Einem Wort, die Geometrie der Kugel zu bilden. Dieser Theil der Wissenschaft von der Ausdehnung kann gegenwärtig sehr schnelle und leichte Fortschritte machen.

Seite 282.

Die beiden Porismen der ebenen Geometrie, welche wir auf die Geometrie dreier Dimensionen angewandt haben, haben auch ihre analogen auf der Kngel. Es sind folgende:

Erstes Porisma. *Man nehme auf der Kugel zwei feste Punkte* P *und* P^1, *und zwei Bögen, welche den Bogen* PP^1 *in* E *und* E^1 *treffen, an; auf diesen beiden Bögen nehme man respective zwei feste Punkte* O *und* O^1:

Wenn man von jedem Punkt eines gegebenen Bogens zwei Bögen nach den Punkten P *und* P^1 *zieht, welche respective die Bögen* EO *und* E^1O^1 *in den beiden Punkten* a *und* a^1 *treffen, so wird man zwei solche Quantitäten* λ, μ *finden können, dass man immer die Relation hat:*

$$\frac{\sin. Oa}{\sin. Ea} + \lambda \cdot \frac{\sin. O^1a^1}{\sin. E^1a^1} = \mu.$$

Zweites Porisma. *Es seien auf der Kugel zwei Bögen grösster Kreise gezogen, die sich in* S *treffen, und es seien auf diesen beiden Bögen respective zwei feste Punkte* O *und* O^1 *genommen:*

Wenn man um einen gegebenen Punkt der Kugel einen Bogen drehen lässt, der die beiden festen Bögen in zwei Punkten a *und* a^1 *trifft, so wird man zwei solche Quantitäten* λ, μ *finden können, dass man immer hat:*

$$\frac{\sin. Oa}{\sin. Sa} + \lambda \cdot \frac{\sin. O^1a^1}{\sin. Sa^1} = \mu.$$

Seite 299.

Nachdem die Note VII, über das Werk *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* von J. Ceva, schon gedruckt war, erschien das 24ste Heft des *Journal de l'école Polytechnique*, worin sich ein Memoire von Coriolis findet, betitelt: *Sur la Théorie des momens considérés comme analyse des rencontres des lignes droites*, welches denselben Zweck hat, als dieses Werk von Ceva. Coriolis beweist darin, durch die Theorie der Elemente, mit wenigen Worten und ohne Rechnung solche Theoreme, wie die sind, welche sich in der Theorie der Transversalen von Carnot finden; nur dass sie hier eine grössere Allgemeinheit haben. Man bemerkt darin besonders einen Beweis für die doppelte Erzeugung eines Hyperboloids mit Einem Fach durch eine gerade Linie.

Seite 322.

Nach dem Artikel 12 ist hinzuzufügen:

12 *bis*. Es folgt aus dem Theorem 12, dass, wenn man drei Systeme von zwei Punkten A, A^1, B, B^1 und C, C^1 hat, welche die harmonisch conjugirten zu zwei festen Punkten E, F sind, dass die sechs Punkte A, A^1, B, B^1, C, C^1 in Involution sind.

Denn es sei O der Mittelpunkt des Segments EF, so hat man:

$$OA.OA^1 = \overline{OE}^2;\ OB.OB^1 = \overline{OE}^2;\ OC.OC = \overline{OE}^2.$$

Es bilden also die sechs Punkte A, A^1, B, B^1, C, C^1 eine Involution (Art. 12).

Seite 422. Art. 27.

In einem Memoire, welches zum Titel hat: *Untersuchung, betreffend die Frage nach einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte*, hat Minding, Doctor an der Universität zu Berlin, ein merkwürdiges Theorem bewiesen, welches eine neue Eigenschaft der beiden excentrischen Kegelschnitte einer Oberfläche des zweiten Grades liefert. Es ist dieses Theorem:

„*Wenn die Kräfte eines Systems so angenommen werden, dass sie sich nicht das Gleichgewicht halten, und wenn man sie um ihre respectiven Anheftungspunkte drehen lässt, ohne ihre gegenseitige Neigung zu verändern, so giebt es unendlich viele Lagen des Systems, in welchen alle Kräfte durch eine einzige Resultante ersetzt werden können. Die Richtung dieser Resultante schneidet immer die Umfänge einer Ellipse und einer Hyperbel, welche in zwei auf einander senkrechten Ebenen liegen, und welche eine solche Beziehung zu einander haben, dass die Brennpunkte der einen mit den Scheiteln der andern zusammenfallen.*

Umgekehrt kann jede Gerade, welche einen Punkt der Ellipse mit einem Punkt der Hyperbel verbindet, als die Richtung der einzigen Resultante für eine bestimmte Lage des Systems betrachtet werden." (S. *Compte rendu des séances de l'Académie de sciences de Paris*, 1835, p. 282; und Crelle *math. Journ.* B. 14.)

Indem man die beiden in Rede stehenden Curven als die Grenzen einer Reihe von Oberflächen des zweiten Grades, die alle in eine und dieselbe developpable eingeschrieben sind (s. S. 431), betrachtet, so wird man auf die Vermuthung geführt, dass das Theorem von Minding nur ein besondrer Fall eines allgemeinern Theorems ist, in welchem diese Oberflächen des zweiten Grades eine Rolle spielen, die denen der Kegelschnitte analog ist.

Statt z. B. anzunehmen, dass alle Kräfte des Systems um ihre Anheftungspunkte solche Richtungen erhalten, dass sie eine einzige Resultante haben, nehme man an, dass die *kleinste* Koppel, in Bezug auf jede Lage des Systems, einen gegebenen Werth hat (der für den Fall einer einzigen Resultante Null wird), und frage, welches für die Axe dieser *kleinsten Koppel* oder für die *Central-Axe der Momente* die Lage im Raume sein wird. (S. *Elémens de statique* von Poinsot, 6te Ausgabe, p. 359.) Das Resultat dieser Untersuchung muss nothwendig eine Verallgemeinerung des schönen Theorems von Minding liefern und vielleicht werden die Oberflächen des zweiten Grades darin die von uns angedeutete Rolle spielen.

Diese Theorie eines Systems von Kräften, die sich um ihre Anheftungspunkte drehen, während sie ihre Grösse und ihre gegenseitige Lage beibehalten, lässt eine grosse Erweiterung zu und kann zu mehren interessanten Aufgaben Gelegenheit geben, wenn man darin die Betrachtung der *Centralaxe der Momente* einführt, statt sich auf den besondern Fall einer einzigen Resultante zu beschränken. Zum Beispiel:

1) Wenn die Centralaxe der Momente parallell mit einer und derselben Linie bleiben soll, welches wird die cylindrische Oberfläche sein, die sie beschreibt?

2) Wenn sie parallel mit einer Ebene bleiben soll, welches wird die krumme Oberfläche sein, die sie in allen ihren Lagen berührt?

3) Wenn sie immer durch einen Punkt gehen soll, welches wird die konische Oberfläche sein, die sie beschreibt?

4) Wenn sie immer in einer gegebenen Ebene liegen soll, welches wird die Curve sein, die sie einhüllt?

Wir können uns in diesem Augenblick nicht mit dieser Art von Untersuchungen beschäftigen; wir führen sie nur an, in der Hoffnung, dass sie das Interesse einiger Leser anregen wird.

Seite 430. §. 45.

Seitdem diese Note gedruckt ist, bin ich zu der Verallgemeinerung der beiden Theoreme der §§. 41 und 43 gekommen und habe, wie ich es vermuthet hatte, erkannt, dass das zweite zu einem rein synthetischen und von jeder Formel der Analysis unabhängigen Beweis für das schöne Theorem von der Attraction führt, welche zwei Ellipsoide, deren Hauptschnitte um dieselben Brennpunkte beschrieben sind, auf einen ausserhalb ihrer Oberfläche liegenden Punkt ausüben.

Es hat berühmten Geometern geschienen, dass ein solcher Beweis Schwierigkeiten darbieten müsse und vielleicht über die Hülfsmittel der Synthesis hinausgehe.[9])

Die beiden verallgemeinerten Theoreme lassen sich aus den beiden besondern Fällen, die in den §§. 41 und 43 ausgesprochen sind, vermittelst eines andern Theorems ableiten, das ebenfalls eine schöne Eigenschaft der Oberflächen zweiten Grades, welche dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, enthält. Wir begnügen uns hier mit der Anführung dieses Theorems:

Wenn mehre Oberflächen des zweiten Grades A, A^1, A^{11} *u. s. w. dieselben excentrischen Kegelschnitte haben, so lasse man um einen festen Punkt eine Transversale drehen, welche die eine von ihnen* A *in zwei Punkten* a, a^1 *trifft, und trage auf der Transversale vom Punkt* S *aus ein Segment* $Sm = \delta \,.\, \frac{D^2}{Sa - Sa^1}$ *auf, wo wir* D *denjenigen Durchmesser dieser Oberfläche* A *nennen, welcher parallel mit der Sehne* aa^1 *ist und worin* δ *eine Constante ist; dann wird der Endpunkt* m *dieses Segments auf einer Oberfläche* Σ *liegen, die ihren Mittelpunkt im Punkt* S *hat;*

Für die andern Oberflächen A^1, A^{11} *u. s. w. wird man auf ähnliche Weise, mit andern Constanten* δ^1, δ^{11} *u. s. w., andre Oberflächen* Σ^1, Σ^{11} *u. s. w. bilden;*

Alle Oberflächen Σ, Σ^1, Σ^{11} *u. s. w. werden, der Richtung nach, dieselben Hauptaxen haben;*

Und man wird die Constanten δ^1, δ^{11} *u. s. w. so wählen können, dass sie auch dieselben excentrischen Kegelschnitte haben.*

Seite 519.

Die Formel

$$\frac{(n-2)\,a^2 - (n-4)\,a}{2},$$

deren sich die römischen Feldmesser zur Berechnung der Fläche eines regelmässigen Polygons von n Seiten bedienten, ist die, welche die Polygonalzahlen der $(n-2)$ten Ordnung ausdrückt.

Diese Polygonalzahlen waren bei den Alten sehr bekannt; man findet sie in den Werken des Nicomachus, Jamblicus, Theon, Diophantus und in der Arithmetik des Boëtius, wo sie einen bedeutenden Platz einnehmen. Dieses ist der Ursprung dieser Formel, welche von den lateinischen Schriftstellern angewandt wurde und die von ihnen nur als approximativ betrachtet sein kann. Aber die Annäherung ist sehr roh und beruht auf keiner wirklich geometrischen Betrachtung.

---

9) Legendre, *Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes*, in den *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1788, p. 486. — Poisson, *Note sur le mouvement de rotation d'un corps solide*; 1834.

Wir sagten, dass Gerbert erkannt habe, dass die aufs Dreieck bezügliche Formel nicht genau wäre, und dass er versucht habe, sie als eine approximative Formel zu beweisen; dass aber sein Raisonnement zu der Formel

$$\frac{a^2 + a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

hätte führen müssen, welche wirklich die Annäherungsformel ist: die Annäherung ist um so grösser, je kleiner die lineäre Einheit ist, welche dem Ausdruck der Seite *a* zu Grunde liegt.

Seite 534.

Die Worte *pagina* und *paginula*, die wir durch das Wort *Columne* übersetzt haben, was uns zu einem klaren Verständniss des Textes von Boëtius geführt hat, werden von diesem Verfasser im 16ten Kapitel des 4ten Buch seines Werks über Musik angewandt, wo sie ganz offenbar dieselbe Bedeutung haben. Die Columnen werden in der Figur und im Text durch Buchstaben angezeigt.

Wir finden noch eine beinahe gleiche Bedeutung der Worte *pagina* und *paginula* in einer Schrift über Astronomie, wo sie bei der Beschreibung eines Astrolabiums angewandt sind, um den Zwischenraum zwischen zwei concentrischen Kreisen zu bezeichnen. Diese Schrift findet sich in einem Manuscript aus dem 11ten Jahrhundert, hinter dem Briefe Gerbert's an Constantin über die Construction einer Himmelskugel. (*Manuscrits de la bibliothèque de Chartres.*)

Seite 535.

Statt des Satzes: „Wenn man diese Columnen hat weglassen und sich nicht an den Gebrauch eines, zu dieser Art von Rechnung vorbereiteten Tableaus hat binden wollen, so hat man dieselben vielleicht nur da stehen lassen, wo sich Nullen fanden; so dass alsdann zwei kleine vertikale Striche (die eine Columne bildeten) die Stelle der Null vertraten", muss man diesen substituiren: „Wenn man diese Columnen hat weglassen und sich nicht an den Gebrauch eines, zu dieser Art von Rechnung vorbereiteten Tableaus hat binden wollen, hat man dieselben vielleicht nur da stehen lassen, wo sich leere Stellen fanden, so dass alsdann zwei kleine vertikale Striche (die eine Columne bildeten) eine leere Stelle andeuteten und die Stelle der gegenwärtigen Null vertraten."

Seite 538 und 539.

Das *Vocabularium* von Nestor Dionysius giebt dem Wort *Abacus* folgende Bedeutung: *Tabella super qua decuplationes fiunt: Abacus dicta est quin etiam ipsa decuplatio.* (Ausgabe von 1496, Venedig, in fol.). Diese Stelle schliesst sich vollständig an unsre Auslegung von *Abacus* an und dürfte zu beweisen scheinen, dass im 15ten Jahrhundert die Bedeutung dieses Worts noch nicht verloren gegangen war, so wie wir es schon nach einer Stelle der *Bibliothèque historiale* von Vignier vermuthet haben.

Seite 544.

Beweist dieses, dass sie dieses indische System durchaus nicht gekannt haben? Es ist eine Unachtsamkeit, die in der Uebereilung des Drucks lag, dass wir den Ausdruck *indisches System* gebraucht haben, statt *System des Abacus* zu sagen. Es ist offenbar, dass wir beabsichtigt haben zu beweisen, dass die Behauptung von Boëtius nicht zulässig wäre, d. h. dass das Zahlensystem, welches er auseinandersetzt, von den Pythagoräern habe gekannt sein können, wie er es sagt: und dieses System war, wir wiederholen es, nicht genau das der Inder, d. h. unser gegenwärtiges; es unterschied sich aber davon nur durch das Fehlen der *Null* und durch den nothwendigen Gebrauch der *Columnen*, welche die Stelle der Ziffern bezeichneten.

Dieses System war im Grunde nur die geschriebene Darstellung des *Zählbretts*, das bei den Römern unter demselben Namen *Abacus* bekannt war. Es bestand aus parallel neben einander gespannten Schnüren; auf jeder von ihnen konnte man 9 Kugeln hingleiten lassen, die, in Gruppen zusammengefügt, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 darstellten: die erste Schnur war die der einfachen Einer, die zweite die der Zehner, die dritte die der Hunderte, u. s. w. f.

Man sieht, dass der *gezeichnete Abacus* kein andrer war, als der *manuale Abacus*: die Columnen stellen die Schnüre dar und die neun Charaktere (oder Ziffern) repräsentiren die neun Zusammenstellungen von Kugeln, die man auf jeder Schnur bilden kann.

Der Uebergang vom manualen Abacus zum gezeichneten war daher sehr natürlich und erforderte keine Anstrengung des Geistes; und man würde nicht anstehen, die Ehre davon den Römern zu geben, wenn nicht Boëtius es dem Pythagoras zuschriebe. Es ist dieser Name des Pythagoras, welcher in den Augen einiger Personen den stärksten Einwurf gegen unsre Auslegung der Stelle bei Boëtius hervorruft; denn man will nicht zugeben, dass Archimedes und Apollonius von diesem Zahlensystem, das ihnen die Idee des *Stellenwerths* der Ziffern geben musste, Kenntniss gehabt hätten.

Aber schon mehre Schriftsteller haben gemeint, dass die Griechen, selbst zur Zeit des Pythagoras, die *Maschine zum Zählen*, die wir so eben unter dem Namen des *Abacus* der Römer beschrieben, kannten; denn diese Maschine findet sich bei allen Völkern schon im frühesten Alterthum. [10]) Nun ist aber diese Maschine, wie der berühmte Humboldt [11]) bemerkt, auf das Princip von dem *Stellen-*

---

10) Diese Maschine ist der *Suanpan* der Chinesen. Sie wurde nicht allein in mehren Theilen Asiens, sondern auch in mehren andern Gegenden der Erde, bei den Etruskern, in Aegypten und Peru gebraucht. S. das Memoire von Alex. von Humboldt im 4ten Bande des *mathem. Journals* von Crelle, p. 205, unter dem Titel: *Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen.*

Man findet diese Maschine, sei es die der Chinesen oder die der Römer, in mehren Werken dargestellt. (S. Velser, *Rerum augustanarum vindelicarum libri octo*, Venedig 1593, in fol., p. 268. — La Loubère, *Du Royaume de Siam*, Paris 1691, 2 Vol., in 12. — Du Molinet, *Le cabinet de la bibliothèque de St. Geneviève*, Paris 1692, in fol., p. 23. — Hager, *An explanation of the Elementary Characters of the Chinese*, Lond. 1801, in fol.

11) S. das von Humboldt angeführte Memoire.

werth der repräsentativen Zahlzeichen gegründet. Sie musste daher eben so gut, wie der, von Boëtius angeführte, *gezeichnete Abacus*, dem Archimedes und Apollonius die Idee des *Stellenwerths* geben: eine Idee übrigens, welche diese beiden grossen Männer gehabt haben, weil sie dieselbe, wie wir gesagt, der erste auf seine *Octaden*, der zweite auf seine *Tetraden* angewandt haben.

Seite 603.

Man hat unter dem Namen des Sacro Bosco ein Werk über den *Algorismus* gedruckt, unter dem Titel: *Algorismus domini Joannis de Sacro Bosco, noviter impressum*, Venetiis 1523, in 4. Dieses Werk ist nicht von Sacro Bosco, dessen Behandlung der Arithmetik in Versen geschrieben ist; sondern es ist dasselbe, als das, welches Clichtoveus unter dem Titel: *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant*, hat drucken lassen.

Dieses Werk unterscheidet sich nur wenig von den andern; aber nichts desto weniger verdient es bemerkt zu werden. Der Verfasser schreibt vor, einen *Punkt* oberhalb der Ziffer der *Tausende* zu stellen, um sie von den andern zu unterscheiden; sodann eben so einen *Punkt* oberhalb der vierten Ziffer nach der der Tausende, und so weiter fort oberhalb der Ziffern von vier zu vier. Dieses sind, wie man sieht, die Tetraden des Apollonius, welche in dem gegenwärtigen System auf die Abtheilungen von drei Ziffern reducirt sind, weil wir eine Zahl nach Abtheilungen von drei Ziffern benennen, indem wir uns der Worte *Einer*, *Tausende*, *Millionen*, *Billionen* u. s. w. bedienen. Für den *Punkt* hat man Striche substituirt, welche diese Abtheilungen von drei Ziffern sondern.

Man findet auch die durch einen Punkt markirten Tetraden in dem arithmetischen Werk von Purbach: *Algorithmus G. Peurbachii in integris*, Viennae 1515, in 4.

Empfehlenswerthe Werke, welche bei uns und in allen Buchhandlungen zu haben sind:

Euclidis elementor. VI libri priores et XI. textum e Peyrardi recensione, in usum gymnas. edidit glossarioque instruxit J. G. C. Neide. 8 maj. 1825. 1 Thlr. 6 Gr.

Flügel, J. G. B., Anleitung zur ebenen Trigonometrie, nach neuerer Methode bearbeitet, nebst elementaren Abhandlungen der Logarithmen und Sammlungen trigonometrischer Aufgaben. Mit Holzschn. gr. 8. 1829. 12 Gr.

Gartz, J. C., allgemeine Größenlehre, namentlich die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen nach Euclid's und neuen Ansichten. gr. 8. 1820. 12 Gr.

Kämtz, L. F., Lehrbuch der Meteorologie. 3 Bände.
1r Band. Mit 3 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1831. 2 Thlr. 12 Gr.
2r Band. Mit 3 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1832. 3 Thlr.
3r Band. Mit 3 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1836. 3 Thlr.

— Vorlesungen über Meteorologie. gr. 8. 1839.

— Lehrbuch der Experimentalphysik. Mit 3 lithograph. Tafeln. gr. 8. 1839. 1 Thlr. 18 Gr.

Ottemann, F., Materialien für den heuristischen Unterricht in der Geometrie. Zur Privatbeschäftigung der Schüler in den Gelehrtenschulen. Mit Kupfern. 8. 1827. 15 Gr.

Gebauersche Buchhandlung.
